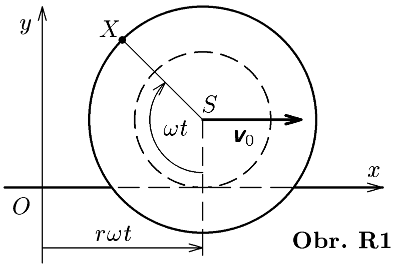
Řešení úloh 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: M. Krebs(1), D. Kluvanec (4), Z. Polák(2), P.Šedivý(3,6), B. Vybíral (5,7)

1. a) Pohyb válce s kolem je složen z rovnoměrného posuvného pohybu a z rovnoměrného otáčivého pohybu s úhlovou rychlostí $\omega = \frac{v_0}{r}$. Za dobu t se osa válce posune do vzdálenosti $r\omega t = v_0 t$ a válec se pootočí o úhel ωt. Souřadnice bodu X budou podle obr. R1 určeny vztahy:

$$x = r\omega t - R\sin\omega t\,, \quad y = r - R\cos\omega t\,. \quad (1)$$



Obr. R1

2 body

b) Derivací vztahů (1) dostaneme:

$$v_x = r\omega - R\omega\cos\omega t\,, \qquad v_y = R\omega\sin\omega t\,. \tag{2}$$

Velikost rychlosti bodu X závisí na čase podle vztahu

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(r\omega - R\omega\cos\omega t)^2 + (R\omega\sin\omega t)^2} =$$
$$= \omega\sqrt{(R^2 + r^2) - 2Rr\cos\omega t}\,. \tag{3}$$

V nejnižších bodech trajektorie, kde $\cos\omega t = 1$, je rychlost bodu X nejmenší:

$$v_{\min} = \omega(R - r) = v_0\frac{R - r}{r} = 3{,}33\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \tag{4}$$

V nejvyšších bodech trajektorie, kde $\cos\omega t = -1$, je rychlost bodu X největší:

$$v_{\max} = \omega(R + r) = v_0\frac{R + r}{r} = 13{,}33\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}. \tag{5}$$

2 body

c) Bod X se pohybuje dopředu, jestliže

$$v_x > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\omega t < \frac{r}{R} = 0{,}6\,.$$

V základním intervalu to platí pro $53{,}13^\circ < \omega t < 306{,}87^\circ$. Doby pohybu vpřed a vzad jsou ve stejném poměru jako příslušné úhly otočení:

$$t_{\text{vpřed}} : t_{\text{vzad}} = 253{,}74 : 106{,}26 \doteq 5 : 2\,.$$

1 bod

d) Souřadnice vektoru zrychlení dostaneme derivováním vztahů (2):

$$a_x = R\omega^2 \sin \omega t\,, \qquad a_y = R\omega^2 \cos \omega t\,. \tag{6}$$

Zrychlení má konstantní velikost $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2$ a v každém okamžiku má opačný směr než vektor $\overrightarrow{SX}$, to znamená, že vždy míří do středu kola.

1 bod

e) V nejnižších a nejvyšších bodech trajektorie je zrychlení kolmé k rychlosti. Mění proto jen směr vektoru rychlosti a platí vztah pro výpočet dostředivého zrychlení:

$$a = \frac{v^2}{\varrho} \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{v^2}{a}\,, \tag{7}$$

kde ϱ je poloměr oskulační kružnice. Pro nejnižší body trajektorie dosazením z (4) dostaneme:

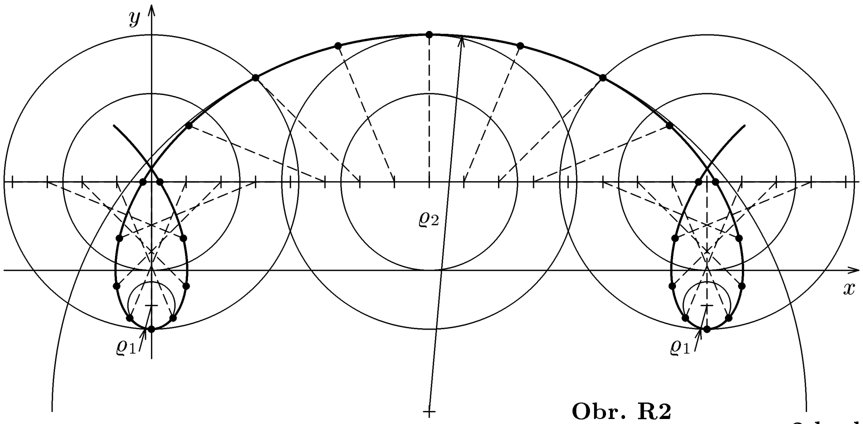
$$\varrho_1 = \frac{v_{\min}^2}{a} = \frac{\omega^2 (R-r)^2}{\omega^2 R} = \frac{(R-r)^2}{R} = 0{,}08 \text{ m}\,.$$

Pro nejvyšší body trajektorie dosazením z (5) dostaneme:

$$\varrho_2 = \frac{v_{\max}^2}{a} = \frac{\omega^2 (R+r)^2}{\omega^2 R} = \frac{(R+r)^2}{R} = 1{,}28 \text{ m}\,.$$

2 body

f) Při sestrojování jednotlivých bodů trajektorie vycházíme ze stejného principu jako v úloze a). Oblouky oskulačních kružnic mohou trajektorii nahradit s dostatečnou přesností v okolí nejvyšších a nejnižších bodů (obr. R2).



Obr. R2

2 body

2. a) Počátek vztažné soustavy zvolíme v místě, odkud házíme. Pohyb kamene je popsán parametrickými rovnicemi:

$$x = v_0 t \cos\alpha\,, \qquad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Vyloučením času dostaneme neparametrickou rovnici trajektorie:

$$y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2\,. \tag{8}$$

Je to rovnice paraboly procházející počátkem vztažné soustavy. Bod dopadu má souřadnice

$$y = 0\,, \qquad x = \frac{v_0^2}{g}2\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Souřadnice vrcholu jsou:

$$x = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = h\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\,,$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha = h\cdot\sin^2\alpha\,,$$

kde h je výška vrhu pro $\alpha = 90°$ (svislý vrh vzhůru s počáteční rychlostí v_0). Tyto vztahy budeme chápat jako parametrické rovnice křivky, kde parametrem je úhel α. Umocněním první rovnice a dosazením z druhé rovnice parametr odstraníme:

$$x^2 = 4h^2\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha) = 4y(h-y)$$

a po úpravě dostaneme:

$$x^2 + 4y^2 - 4hy + h^2 = h^2\,, \qquad \frac{x^2}{h^2} + \frac{4\left(y-\frac{h}{2}\right)^2}{h^2} = 1\,.$$

To je rovnice elipsy se středem $S \equiv \left[0, \frac{h}{2}\right]$, s hlavní poloosou o velikosti h ve směru osy x a s vedlejší poloosou o velikosti $\frac{h}{2}$ ve směru osy y.

3 body

b) Každým bodem uvnitř oblasti zasažitelné kamenem, jehož počáteční rychlost má velikost v_0, procházejí dvě parabolické trajektorie. Vztah (8) můžeme upravit na tvar

$$y = \operatorname{tg}\alpha\cdot x - \frac{g}{2v_0^2}(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot x^2\,,$$

$$\frac{gx^2}{2v_0^2}\operatorname{tg}^2\alpha - x\operatorname{tg}\alpha + y + \frac{gx^2}{2v_0^2} = 0\,.$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici s neznámou $\operatorname{tg}\alpha$ a parametry $x,\ y,\ v_0,\ g$. Jejím řešením nalezneme příslušné elevační úhly.

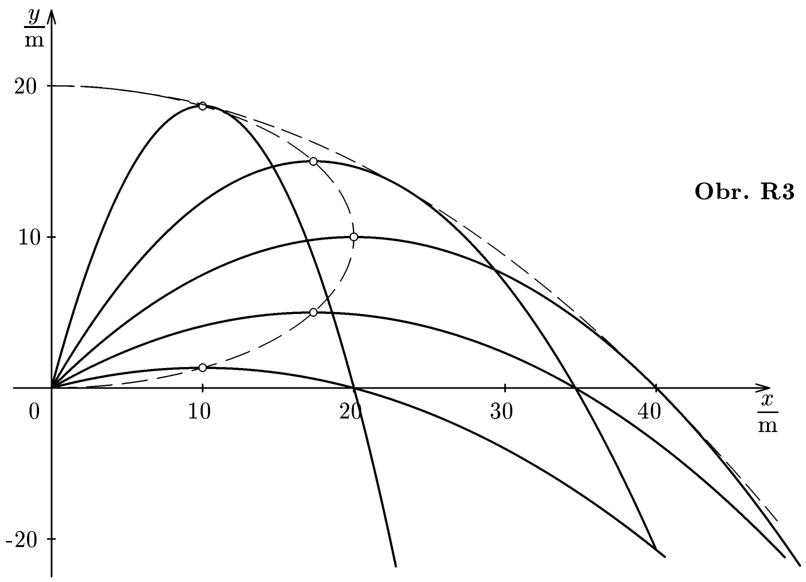
Bodem, který leží na hranici zasažitelné oblasti, prochází jen jediná trajektorie. Pro ně je diskriminant rovnice nulový:

$$D = x^2 - \frac{2gx^2}{v_0^2}\left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2}\right) = 0\,, \quad \text{po úpravě} \quad y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2\,.$$

Hranici zasažitelné oblasti tvoří parabola s vrcholem $V \equiv \left[0, \frac{v_0^2}{2g}\right] = [0, h]$, která protíná osu x v bodě $D = \left[\frac{v_0^2}{g}, 0\right] = [2h, 0]$.

4 body

c)



Obr. R3

3 body

3. a) Paprsky přicházející do oka pozorovatele jsou prakticky rovnoběžné s rovinou určenou středem oka a osou trubice. Vzdálenost y paprsku, který zobrazuje obrys vnitřní části trubice, od této roviny určíme podle obr. R4:

$$y = R\sin\alpha = Rn\sin\beta = Rn\frac{r}{R} = nr\,.$$

Zdánlivý průměr vnitřní části trubice je $d' = 2y = nd$. Pro daný index lomu $d' = 1{,}52d$. Řešení má ovšem smysl, pokud $nr < R$. Není-li tato podmínka splněna, rozhraní mezi kapalinou a sklem nevidíme a trubice je zbarvena až po vnější obrys.

4 body

b) Okraj čáry je ve vzdálenosti h (polovina tloušťky čáry) od roviny určené středem oka a osou tyče. Paprsek zobrazující okraj čáry vystupuje z tyče ve vzdálenosti h' od této roviny (obr. R5). Platí:

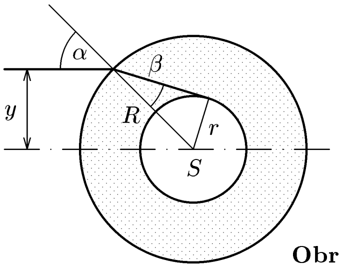
$$h' = R\sin\alpha\,, \qquad h = R\sin\varphi\,, \qquad \varphi = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\beta) = 2\beta - \alpha\,.$$

Je-li tloušťka čáry malá, jsou malé i úhly α, β a můžeme psát:

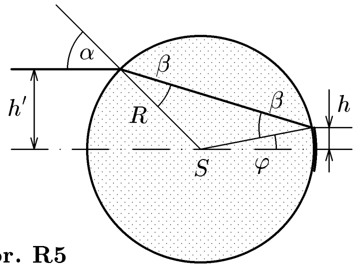
$$\beta \doteq \frac{\alpha}{n}\,, \qquad \sin\varphi \doteq \varphi \doteq \alpha\left(\frac{2}{n}-1\right), \qquad h \doteq R\alpha\frac{2-n}{n}\,, \qquad h' \doteq R\alpha \doteq h\frac{n}{2-n}\,.$$

Zdánlivá tloušťka čáry je $2h'$. Pro daný index lomu $2h' \doteq 3{,}2 \cdot 2h$.

6 bodů



Obr. R4



Obr. R5

4. a) Mřížka sodíku je prostorově centrovaná. Na jednu elementární buňku připadají $N = 2$ atomy. Z úhlopříčného řezu elementární buňky (obr. R6) odvodíme

$$a\sqrt{3} = 4r\,, \qquad a = r\frac{4}{\sqrt{3}}\,, \qquad V_0 = \frac{64}{\sqrt{27}} \cdot r^3\,.$$

Koeficient zaplnění je

$$f = \frac{V}{V_0} = \frac{2\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{64}{\sqrt{27}} \cdot r^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \doteq 0{,}680\,.$$

Mřížka stříbra je plošně centrovaná. Na jednu elementární buňku připadají $N = 4$ atomy. Z obr. R7 odvodíme

$$a\sqrt{2} = 4r\,, \qquad a = r\frac{4}{\sqrt{2}}\,, \qquad V_0 = \frac{64}{\sqrt{8}} \cdot r^3\,.$$

Koeficient zaplnění je

$$f = \frac{V}{V_0} = \frac{4\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{64}{\sqrt{8}} \cdot r^3} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \doteq 0{,}740\,.$$

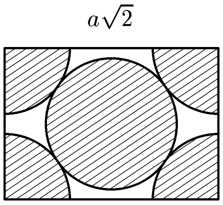
Na jednu hexagonální elementární buňku hořčíku připadá $N = 6$ atomů. Středy sousedních atomů leží ve vrcholech pravidelného čtyřstěnu (obr. R8). Z toho odvodíme:

$$a = 2r\,, \qquad c = 4r\sqrt{\frac{2}{3}}\,, \qquad V_0 = 24\sqrt{2} \cdot r^3\,.$$

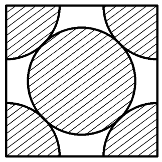
Koeficient zaplnění je

$$f = \frac{V}{V_0} = \frac{6\frac{4}{3}\pi r^3}{24\sqrt{2} \cdot r^3} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \doteq 0{,}740\,,$$

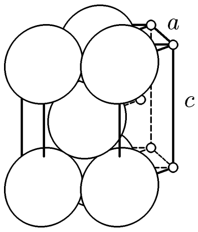
což je stejná hodnota jako u stříbra a větší než u sodíku. **5 bodů**



Obr. R6



Obr. R7



Obr. R8

b) Průměrná hustota látky v krystalu je $\varrho = \dfrac{NA_{\mathrm{r}}m_{\mathrm{u}}}{V_0}$. Z toho určíme objem elementární buňky:

$$V_0 = \frac{NA_{\mathrm{r}}m_{\mathrm{u}}}{\varrho}\,.$$

Pro sodík dostaneme:

$$R^3_{\mathrm{Na}} = \frac{3\sqrt{3}}{64} \cdot \frac{2 \cdot 22{,}99 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}}{971}\ \mathrm{m}^3\,, \qquad R_{\mathrm{Na}} = 1{,}85 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

Pro stříbro dostaneme:

$$R^3_{\mathrm{Ag}} = \frac{\sqrt{2}}{32} \cdot \frac{4 \cdot 107{,}87 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}}{10\,500}\ \mathrm{m}^3\,, \qquad R_{\mathrm{Ag}} = 1{,}44 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

Pro hořčík dostaneme:

$$R^3_{\mathrm{Mg}} = \frac{1}{24\sqrt{2}} \cdot \frac{6 \cdot 24{,}305 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}}{1\,740}\ \mathrm{m}^3\,, \qquad R_{\mathrm{Mg}} = 1{,}60 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

5 bodů

5. a) Urychlením získal deuteron kinetickou energii $E_{\mathrm{k}} = 15\ \mathrm{MeV} = 2{,}4 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J}$. Klidová energie deuteronu je $E_0 = m_0c^2 = 3{,}0 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{J} = 1880\ \mathrm{MeV} \doteq 125E_{\mathrm{k}}$. Hmotnost urychleného deuteronu je $m = m_0 + \dfrac{E_{\mathrm{k}}}{c^2} \doteq 1{,}008m_0$. Během urychlení se zvětší o 0,8 %, což můžeme při přibližném výpočtu zanedbat.

1 bod

b) Zakřivení trajektorie je způsobeno dostředivou magnetickou silou. Pro částici o náboji e a hmotnosti m_0 platí:

$$Bev = \frac{m_0v^2}{r}\,, \qquad \frac{v}{r} = 2\pi f_0 = \frac{Be}{m_0}\,, \qquad f_0 = \frac{Be}{2\pi m_0} = 1{,}07 \cdot 10^7\ \mathrm{Hz}\,.$$

2 body

c) Během jednoho oběhu je deuteron urychlen dvakrát. V optimálním případě je počet oběhů

$$N = \frac{E_k}{2U_{\mathrm{m}}e} = \frac{15\ \mathrm{MeV}}{0{,}32\ \mathrm{MeV}} \doteq 47\,.$$

1 bod

d) Podle představ klasické fyziky:

$$v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{k}}{m_0}} = 3{,}79 \cdot 10^7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,, \qquad r_0 = \frac{m_0 v}{Be} = \frac{\sqrt{2E_\mathrm{k} m_0}}{Be} = 0{,}565\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

e) Relativistickým výpočtem dostaneme pro konečnou rychlost deuteronu, poloměr poslední kružnice a konečnou frekvenci obíhání:

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = c\sqrt{1-\left(\frac{m_0}{m_0+\dfrac{E_\mathrm{k}}{c^2}}\right)^2} = 3{,}77 \cdot 10^7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

$$r = \frac{mv}{Be} = 0{,}566\ \mathrm{m} \qquad f = \frac{Be}{2\pi m} = \frac{Be}{2\pi m_0}\frac{m_0}{m} = f_0\frac{m_0}{m} = 0,992 f_0 = 1{,}06 \cdot 10^7\ \mathrm{Hz}.$$

Hodnoty získané relativistickým výpočtem se téměř neliší od výsledků získaných v b) a d). Nejzávažnější je postupný pokles frekvence obíhání až o 0,8 %. Optimální průběh urychlení předpokládaný v úloze c) se proto nedá realizovat a skutečný počet oběhů bude vždy větší než 47.

4 body

6. Energie kondenzátoru po překmitnutí obvodu je téměř rovna součtu energie kondenzátoru a cívky před rozepnutím spínače:

$$\frac{1}{2}CU_2^2 \doteq \frac{1}{2}CU_1^2 + \frac{1}{2}LI^2\,, \qquad L = \frac{C\left(U_2^2 - U_1^2\right)}{I^2}\,.$$

Indukčnost cívky 1200 závitů z rozkladného transformátoru s uzavřeným jádrem je přibližně 1,6 H, s rovným jádrem 0,2 H.

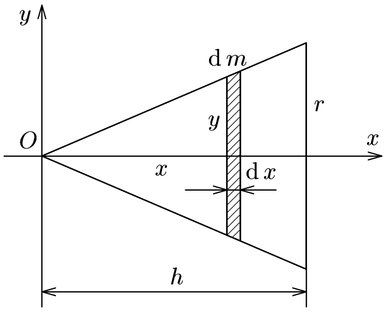
7. a) Pro výpočet polohy těžiště umístíme kužel podle obr. R9 a řezy rovnoběžnými s podstavou jej rozdělíme na tenké kruhové vrstvy o poloměru y a tloušťce dx. Meridián kužele je popsán funkcí

$$y = \frac{r}{h}x\,, \qquad x \in [0, h]\,.$$

Souřadnici těžiště určíme integrací:

$$\mathrm{d}m = \varrho\pi y^2\,\mathrm{d}x\,, \qquad m = \varrho\frac{1}{3}\pi r^2 h\,,$$

$$x_T = \frac{1}{m}\int_0^m x\,\mathrm{d}m\,.$$



Obr. R9

Po dosazení:

$$x_T = \frac{\int\limits_0^h \varrho\pi\left(\frac{rx}{h}\right)^2 \mathrm{d}x \cdot x}{\varrho\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{3}{h^3}\int\limits_0^h x^3\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}h = 0{,}150\ \mathrm{m}\,.$$

3 body

b) Ze stejného obrázku vyjdeme i při určení momentu setrvačnosti. Platí:

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}m \cdot y^2 = \frac{1}{2}\varrho\pi y^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\varrho\pi\left(\frac{r}{h}\right)^4 x^4\,\mathrm{d}x\,,$$

$$J = \frac{\varrho\pi r^4}{2h^4}\int\limits_0^h x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\varrho\pi r^4 h = \frac{3}{10}mr^2 = 9{,}00\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\,.$$

3 body

c) Koncový bod vektoru momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ obíhá po kružnici o poloměru $L\sin\vartheta$. Platí:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}\,\mathrm{d}t\,, \qquad L\sin\vartheta\,\Omega\,\mathrm{d}t = mg\cdot\frac{3}{4}h\sin\vartheta\,\mathrm{d}t\,, \qquad L = \frac{3}{10}mr^2\omega\,,$$

$$\Omega = \frac{5hg}{2\omega r^2} = 1{,}23\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}\,.$$

4 body