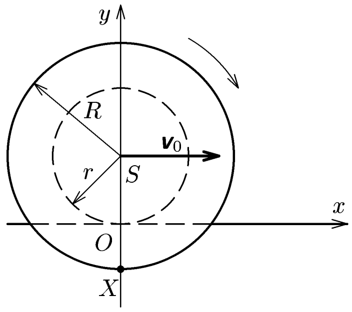
Úlohy 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

1. Na vodorovné podložce se rovnoměrně odvaluje válec o poloměru $r = 30\,\mathrm{cm}$. Osa válce se pohybuje rychlostí $v_0 = 5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Na podstavu válce je připevněno kolo o poloměru $R = 50\,\mathrm{cm}$, které přesahuje přes okraj podložky. Osy obou těles jsou totožné.



Obr. 1

a) Napište parametrické rovnice trajektorie bodu X na obvodu kola. Počáteční polohu bodu a vztažnou soustavu zvolte podle obr. 1.

b) Popište, jak se v závislosti na čase mění souřadnice rychlosti a velikost rychlosti bodu X. Určete velikost rychlosti v nejnižších a nejvyšších bodech trajektorie.

c) Bod X se střídavě pohybuje vpřed a vzad. Určete, v jakém poměru jsou doby trvání těchto pohybů.

d) Popište, jak se v závislosti na čase mění souřadnice a velikost zrychlení bodu X.

e) V okolí nejnižších a nejvyšších bodů trajektorie můžeme pohyb bodu X popsat přibližně jako rovnoměrný pohyb po kružnici. Určete poloměry příslušných oskulačních kružnic.

f) Trajektorii bodu X narýsujte v měřítku 1:10 na list papíru formátu A4.

2. Z určitého místa budeme házet kamenem. Počáteční rychlost kamene bude mít pokaždé stejnou velikost v_0, elevační úhel α budeme měnit. Všechny hody budou probíhat v téže svislé rovině. Je-li kámen dostatečně velký, můžeme zanedbat odpor vzduchu a předpokládat, že trajektorie kamene je parabola.

a) Určete množinu vrcholů všech těchto parabol.

b) Určete hranici oblasti, kterou můžeme kameny zasáhnout.

c) Výsledky úloh a), b) znázorněte graficky ve vhodném měřítku spolu s několika trajektoriemi pro různé elevační úhly. Volte $v_0 = 20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

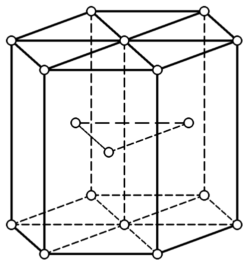
3. a) Trubice o vnějším průměru D a vnitřním průměru d vyrobená ze skla o indexu lomu n je naplněna obarvenou tekutinou. Určete zdánlivé zvětšení vnitřního průměru trubice v důsledku lomu světla.

b) Ze stejného skla je vyrobena tyč kruhového průřezu o průměru D, na kterou po jedné straně narýsujeme tenkou podélnou čáru. Určete zdánlivé zvětšení čáry při pohledu z protější strany.

Úlohu řešte obecně a pro $n = 1{,}52$ (relativní index lomu vzhledem ke vzduchu). Vnější průměry trubice a tyče jsou malé ve srovnání s konvenční zrakovou dálkou.

4. Při výkladu fyzikálních vlastností kovů se často používají modely krystalových struktur, ve kterých atomy, jako vzájemně se dotýkající koule, vytvářejí prostorovou mřížku. O kovech je známo, že většina krystaluje v některém z třech typů mřížek:

- prostorově centrované kubické mřížce (např. Li, Na, Cr, αFe, δFe),
- plošně centrované kubické mřížce (např. Cu, Ag, Ni, Pd, γFe),
- hexagonální mřížce, jejíž model je znázorněn na obr. 2 (např. Mg, Zn, Cd, Os).



Obr. 2

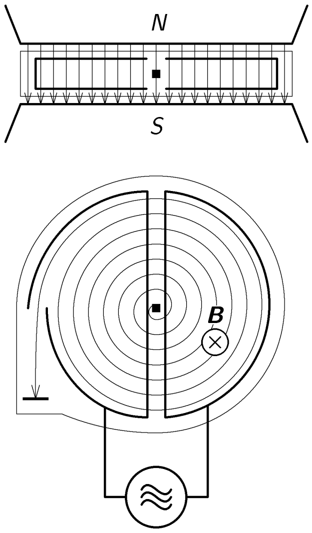
Zaplnění prostoru krystalové mřížky atomy můžeme vyjádřit *koeficientem zaplnění* $f = \dfrac{V}{V_0}$, kde V_0 je objem celé elementární buňky a V je objem její části, kterou zaplňují atomy.

a) Popište a znázorněte rozmístění atomů a určete koeficient zaplnění v krystalech sodíku, stříbra a hořčíku.

b) Určete poloměry atomů uvedených kovů, znáte-li jejich relativní atomové hmotnosti $A_{\mathrm{r\,Na}} = 22{,}990$, $A_{\mathrm{r\,Ag}} = 107,87$, $A_{\mathrm{r\,Mg}} = 24,305$
a hustoty $\varrho_{\mathrm{Na}} = 971\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\varrho_{\mathrm{Ag}} = 10\,500\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\varrho_{\mathrm{Mg}} = 1\,740\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

5. K urychlování nabitých částic, zejména protonů, deuteronů a helionů (částic α) byl r. 1931 sestrojen první kruhový urychlovač – *cyklotron*. Jeho schéma je na obr. 3. Mezi póly silného elektromagnetu, který vytváří homogenní magnetické pole o indukci $\boldsymbol{B}$, se ve vakuové komoře nacházejí dvě půlválcové urychlovací elektrody, tzv. duanty, připojené ke zdroji vysokofrekvenčního střídavého napětí o amplitudě U_{m} a frekvenci f. Částice vznikající úplnou ionizací molekul plynu (vodíku, deuteria nebo helia) přiváděného do zdroje iontů, který je umístěn uprostřed vakuové komory, mají klidovou hmotnost m_0 a náboj Ze. Uvnitř duantů se pohybují po kruhové trajektorii a při každém průchodu mezerou mezi duanty jsou urychleny elektrickým polem. Výsledný pohyb probíhá po spirále až do průchodu výstupním otvorem v jednom z duantů, za kterým částice dopadají na vhodný terčík. Cyklotrony se dodnes využívají pro náročné fyzikální experimenty a pro přípravu důležitých radionuklidů.

Vaším úkolem je dopočítat základní parametry cyklotronu, který má sloužit k urychlení deuteronů ($m_0 = 3{,}34 \cdot 10^{-27}$ kg, $Z = 1$) na kinetickou energii



Obr. 3

$E_\mathrm{k} = 15{,}0\,\mathrm{MeV}$. Magnetická indukce v komoře má velikost $B = 1{,}40\,\mathrm{T}$. Vysokofrekvenční napětí duantů má amplitudu $U_\mathrm{m} = 160\,\mathrm{kV}$.

a) Porovnejte klidovou a kinetickou energii deuteronů a ověřte, že v prvním přiblížení můžeme jejich hmotnost považovat za konstantní (rovnou m_0). Za tohoto předpokladu řešte nerelativisticky úkoly b) až d).

b) Princip cyklotronu vychází z poznatku, že frekvence, se kterou částice stálé hmotnosti obíhá po kruhové trajektorii kolmo k indukčním čarám v homogenním magnetickém poli, nezávisí na poloměru trajektorie. Stejnou frekvenci musí mít napětí přivedené na duanty. Určete její hodnotu pro náš cyklotron.

c) Urychlení proběhne optimálním způsobem, když při každém průchodu částice mezerou mezi duanty je na nich právě napětí U_m. Kolik oběhů v takovém případě částice vykoná, než vyletí výstupním okénkem?

d) Jakou rychlost deuterony získají a jaký bude poloměr poslední kruhové trajektorie?

e) Relativistické zvětšení hmotnosti částice během urychlení omezuje použití cyklotronu do energií řádově desítek MeV. Určete relativisticky, s přihlédnutím ke zvětšení hmotnosti částice, rychlost vyletujících deuteronů, poloměr poslední kružnice a příslušnou frekvenci obíhání. Výsledky porovnejte s hodnotami získanými v b) a d).

6. *Praktická úloha:* **Měření indukčnosti cívky**

Úkoly:

a) Sestavte obvod podle obr. 4. Použijte zdroje o napětí přibližně $5\,\mathrm{V}$ (např. plochou baterii), cívku 1200 závitů z rozkladného transformátoru, výkonovou diodu, stejnosměrný ampérmetr, stejnosměrný voltmetr, kvalitní kondenzátor o kapacitě alespoň $8\,\mu\mathrm{F}$ (ne elektrolytický) a páčkový spínač. Měření proveďte:

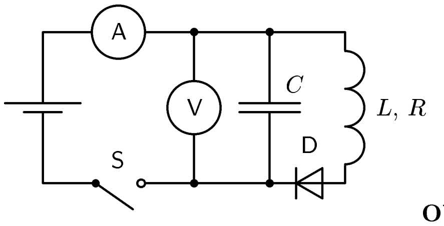
- na cívce s uzavřeným jádrem,
- na cívce s rovným jádrem,
- na cívce bez jádra.

Kapacitu kondenzátoru změřte některou běžnou metodou (např. pomocí voltmetru a ampérmetru v obvodu střídavého proudu). Voltmetr by měl mít co největší odpor a rozsahy např. $20\,\mathrm{V}$ a $200\,\mathrm{V}$.

b) Při sepnutém spínači změřte proud I procházející cívkou a napětí U_1 na kondenzátoru. Pak přepněte voltmetr na vyšší rozsah (používáte-li ručkový přístroj, změňte také jeho polaritu) a rozepněte spínač. Dojde k překmitnutí obvodu LC a na kondenzátoru se objeví velké napětí opačné polarity, které se bude zvolna zmenšovat v důsledku vybíjení kondenzátoru přes voltmetr. Změřte napětí U_2 bezprostředně po rozepnutí spínače.
Pro každý typ cívky měření několikrát zopakujte .

c) Odvoďte vztah pro výpočet indukčnosti cívky z kapacity C kondenzátoru, napětí U_1, U_2 a proudu I. Ztráty energie během překmitnutí na odporu cívky a na diodě zanedbejte.

d) Vypočtěte indukčnosti cívky s uzavřeným jádrem, s rovným jádrem a bez jádra.



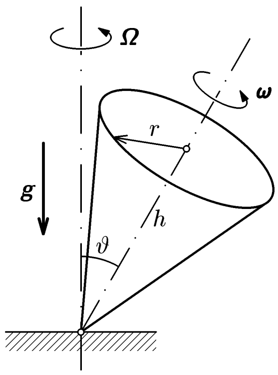
Obr. 4

7. Je dán homogenní rotační kužel hmotnosti m o poloměru základny r a výšce h.

a) Vypočtěte vzdálenost těžiště kužele od jeho vrcholu. Příslušný vzorec odvoďte.

b) Vypočtěte moment setrvačnosti kužele vzhledem k ose souměrnosti. Příslušný vzorec odvoďte.

c) Kužel postavíme na špičku tak, že jeho osa souměrnosti bude odkloněna od svislice o ostrý úhel ϑ a udělíme mu rotaci úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ okolo osy souměrnosti (obr. 5). Vypočtěte úhlovou rychlost $\boldsymbol{\Omega}$ precese užitím přibližné teorie (tj. zanedbáním příspěvku precesního pohybu k momentu hybnosti).



Obr. 5

Řešte obecně a pak numericky pro $m = 3{,}00$ kg, $r = 0{,}100$ m, $h = 0{,}200$ m, $\omega = 300\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.