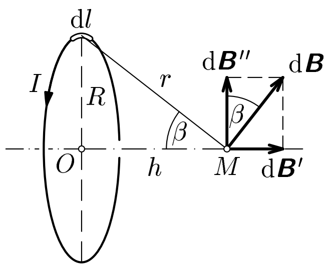
Řešení teoretických úloh celostátního kola 42. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: P. Šedivý (1, 2, 3), B. Vybíral (4)

1. a) Nejprve určíme magnetickou indukci $\boldsymbol{B}_1$ pole jediného závitu o poloměru R, kterým prochází proud I, na jeho ose ve vzdálenosti h od středu (obr R1). Proudový element délky $\mathrm{d}l$ budí pole o indukci $\mathrm{d}\boldsymbol{B}$, ze které se uplatní jen složka $\mathrm{d}\boldsymbol{B}'$ ve směru osy, jejíž velikost je

$$|\mathrm{d}\boldsymbol{B}'| = \frac{\mu_0 I \,\mathrm{d}l \sin\beta}{4\pi r^2}\,.$$

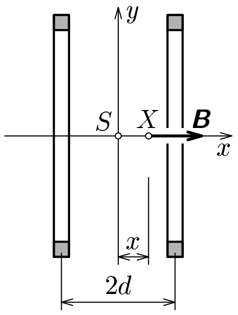


Obr. R1

Integrací dostaneme

$$B_1 = \frac{\mu_0 I \sin\beta}{4\pi r^2}\int\limits_0^{2\pi R} \mathrm{d}\,l = \frac{\mu_0 I \sin\beta}{4\pi r^2}\cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+h^2)^{3/2}}\,.$$

Kruhová cívka o N závitech vyvolá ve stejném bodě magnetické pole o indukci N krát větší. Na ose Helmholtzových cívek je velikost výsledné indukce rovna součtu indukcí obou cívek. Zvolíme-li vztažnou soustavu podle obr. R2, je velikost magnetická indukce na ose v bodě o souřadnici x



Obr. R2

$$B = \frac{N\mu_0 I R^2}{2}\left\{\left[R^2+(d-x)^2\right]^{-\frac{3}{2}} + \left[R^2+(d+x)^2\right]^{-\frac{3}{2}}\right\}.$$

4 body

b) Má-li být magnetické pole v okolí bodu S co nejhomogennější, musí být graf funkce, kterou jsme obdrželi řešením úkolu a), v bodě $x = 0$ co nejrovnější. Její druhá derivace musí být nulová (*inflexní bod*). Stačí ovšem derivovat výraz ve složené závorce, který označíme symbolem V:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = 3\left\{\left[R^2 + (d-x)^2\right]^{-\frac{5}{2}}(d-x) - \left[R^2 + (d+x)^2\right]^{-\frac{5}{2}}(d+x)\right\},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} = 15\left\{\left[R^2 + (d-x)^2\right]^{-\frac{7}{2}}(d-x)^2 + \left[R^2 + (d+x)^2\right]^{-\frac{7}{2}}(d+x)^2\right\} -$$

$$- 3\left\{\left[R^2 + (d-x)^2\right]^{-\frac{5}{2}} + \left[R^2 + (d+x)^2\right]^{-\frac{5}{2}}\right\}.$$

Pro $x = 0$:

$$30(R^2 + d^2)^{-\frac{7}{2}}d^2 - 6(R^2 + d^2)^{-\frac{5}{2}} = 6(R^2 + d^2)^{-\frac{7}{2}}(5d^2 - R^2 - d^2) = 0\,,$$

Řešením je $R^2 = 4d^2\,,\quad R = 2d\,,$ což jsme měli dokázat.

4 body

c) V bodě S platí

$$B_0 = \frac{N\mu_0 I R^2}{(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}\,. \quad \text{Z toho} \quad I = \frac{B_0 (R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}{N\mu_0 R^2}\,.$$

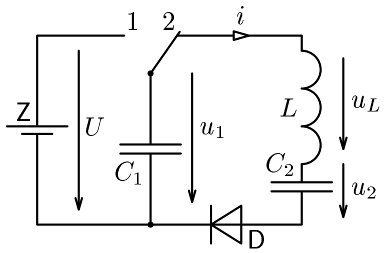
Pro dané hodnoty $I = 16{,}7$ A.

2 body

2. a) Po překlopení přepínače začne obvodem procházet proud ve směru vyznačeném na obr. R3. Dioda, pro kterou je to propustný směr, se neuplatní. Dostali jsme netlumený kmitavý obvod LC tvořený cívkou o indukčnosti L a sériovou kombinací kondenzátorů o celkové kapacitě

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

ve kterém proběhne jedna polovina kmitu o periodě, kterou určíme pomocí Thomsonova vztahu $T = 2\pi\sqrt{LC}$.



Obr. R3

Druhá polovina kmitu se už neuskuteční, protože tomu zabrání dioda, která přejde do nevodivého stavu. Přechodný děj tedy proběhne za dobu

$$\frac{T}{2} = \pi\sqrt{LC} = \pi\sqrt{\frac{LC_1C_2}{C_1 + C_2}}\,.$$

1,5 bodu

Podrobnější odvození: Označme q_1, q_2 okamžité náboje na kondenzátorech. V obvodu platí

$$u_1 = u_L + u_2\,, \quad i = -\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}\,, \quad \frac{q_1}{C_1} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q_2}{C_2}\,, \quad -\frac{i}{C_1} = L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i}{C_2}\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}i = 0\,.$$

Řešením této rovnice za počáteční podmínky $i = 0$ je

$$i = I_\mathrm{m}\sin\omega t\,, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}\,.$$

b) Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2}C_1U^2 = \frac{(C_1U - Q)^2}{2C_1} + \frac{Q^2}{2C_2}\,, \qquad Q^2\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = 2UQ\,,$$

$$Q = U\frac{2C_1C_2}{C_1 + C_2}\,, \quad U_1 = U - \frac{Q}{C_1} = U\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\,, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2} = U\frac{2C_1}{C_1 + C_2}\,.$$

1,5 bodu

Diskuse:

a) $C_1 \gg C_2$: $\quad U_1 \to U, \quad U_2 \to 2U,$

b) $C_1 > C_2$: $\quad U > U_1 > 0, \quad 2U > U_2 > U,$

c) $C_1 = C_2$: $\quad U_1 = 0, \quad U_2 = U,$

d) $C_1 < C_2$: $\quad -U < U_1 < 0, \quad 0 < U_2 < U,$

e) $C_1 \ll C_2$: $\quad U_1 \to -U, \quad U_2 \to 0.$ **1 bod**

Během přechodného děje se náboj na druhém kondenzátoru postupně zvětšuje:

$$q_2 = \int_0^t I_\mathrm{m} \sin \omega t \, \mathrm{d}t = \frac{I_\mathrm{m}}{\omega}(1 - \cos \omega t),$$

až v čase $t = T/2$ dosáhne hodnoty

$$Q = \frac{2UC_1C_2}{C_1 + C_2} = \frac{2I_\mathrm{m}}{\omega} = 2I_\mathrm{m}\sqrt{\frac{LC_1C_2}{C_1 + C_2}}. \quad \text{Z toho} \quad I_\mathrm{m} = U\sqrt{\frac{C_1C_2}{L(C_1 + C_2)}}.$$

2 body

c) Časové průběhy napětí popisují vztahy

$$u_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{I_\mathrm{m}}{\omega C_2}(1 - \cos \omega t) = \frac{UC_1}{C_1 + C_2}(1 - \cos \omega t) = \frac{U_2}{2}(1 - \cos \omega t),$$

$$u_1 = U - \frac{q_2}{C_1} = U - \frac{I_\mathrm{m}}{\omega C_1}(1 - \cos \omega t) = U - U\frac{C_2}{C_1 + C_2}(1 - \cos \omega t).$$

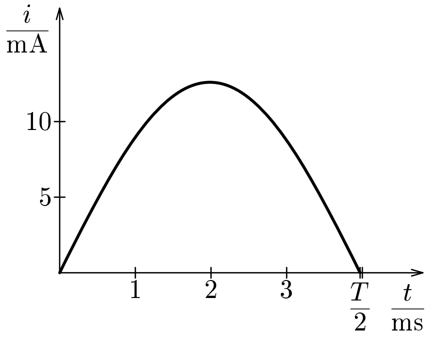
1 bod

Pro dané hodnoty vychází:

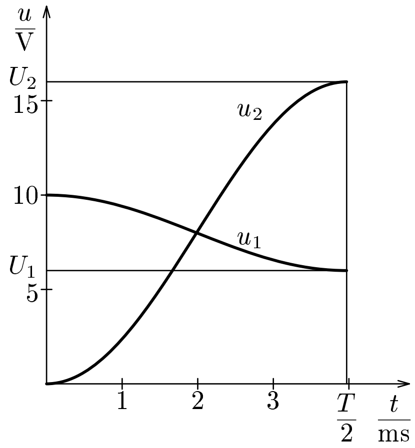
$\frac{T}{2} = 3{,}97$ ms, $I_\mathrm{m} = 12.6$ mA, $Q = 32\ \mu$C, $U_1 = 6$ V, $U_2 = 16$ V.

1 bod

Časové průběhy proudu a obou napětí jsou graficky znázorněny na obr. R4 a R5.



Obr. R4



Obr. R5

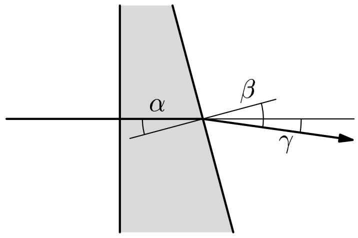
2 body

3. V horní polovině dvojhranolu se světelný paprsek odchýlí dolů podle obr. R6. Pro malé úhly platí

$$\beta \doteq n\alpha\,, \quad \gamma = \beta - \alpha \doteq (n-1)\alpha\,.$$

V dolní polovině dvojhranolu se paprsek odchýlí o stejný úhel γ vzhůru.

2 body



Obr. R6

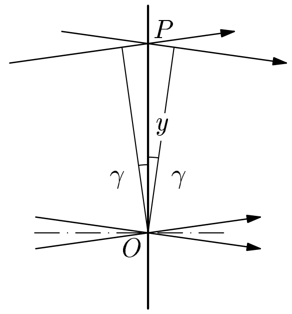
Do středu O stínítka přicházejí obě vlnění s nulovým fázovým rozdílem (obr. R7). V bodě P o souřadnici y přichází vlnění z horní poloviny dvojhranolu s dráhovým předstihem $y \sin\gamma \doteq y\gamma$ a dolní vlnění je o stejnou dráhu opožděno. Aby vzniklo *interferenční maximum*, musí pro celkový dráhový rozdíl platit

$$\delta = 2y\gamma = k\lambda\,,$$

$$y = k\frac{\lambda}{2\gamma} = k\frac{\lambda}{2(n-1)\alpha} = ks\,,$$

kde s je šířka jednoho interferenčního proužku, která zřejmě nezávisí na vzdálenosti stínítka od dvojhranolu, ale jen na lámavém úhlu α.

3 body



Obr. R7

Předepsané šířky proužku dosáhneme volbou

$$\gamma = \frac{\lambda}{2s}\,, \qquad \alpha = \frac{\lambda}{2s(n-1)} = 5{,}75 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{rad} = 0{,}329^\circ \doteq 20'\,.$$

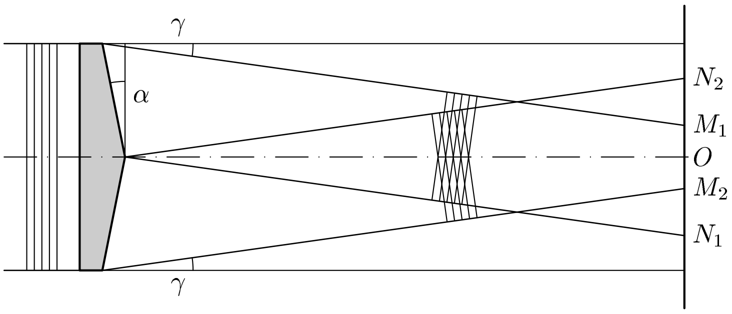
2 body

Svazek vln, které prošly horní polovinou dvojhranolu, dopadá na stínítko mezi body M_1 a N_1 o souřadnicích

$$y_1 = h - (d + h\,\mathrm{tg}\,\alpha)tg\gamma \doteq h - (d + h\alpha)\gamma\,, \qquad y_2 = -d\,\mathrm{tg}\,\gamma \doteq -d\gamma\,.$$

Druhý svazek vln, které prošly dolní polovinou dvojhranolu, dopadá mezi body M_2 a N_2 o souřadnicích $-y_1$ a $-y_2$ (obr. R8). Aby společná oblast, kde se objeví interferenční proužky, byla co největší, musí platit:

$$y_1 = |y_2|\,, \qquad h - (d + h\alpha)\gamma = d\gamma\,, \qquad d = \frac{h}{2\gamma} - \frac{h\alpha}{2} \doteq \frac{h}{2\gamma} = \frac{hs}{\lambda} = 3{,}2\ \mathrm{m}\,.$$



Obr. R8

3 body

4.a) Odstředivá síla se bude rovnat vnitřní síle napjatosti. Z toho

$$4\frac{M}{2}\pi^2 f_0^2 \frac{R}{2} = \sigma_\mathrm{p} S\,, \qquad \sigma_\mathrm{p} = \frac{MR\pi^2 f_0^2}{S} = 296\ \mathrm{MPa}\,.$$

1 bod

b) Před přetržením drátu má soustava moment setrvačnosti

$$J_0 = MR^2 + 2\frac{M}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}MR^2 = 0{,}0045\ \mathrm{kg\cdot m^2}\,,$$

po dopadu závaží na konce příčky se moment setrvačnosti zvětší na

$$J_1 = MR^2 + 2\frac{M}{2}R^2 = 2MR^2 = 0{,}0072\ \mathrm{kg\cdot m^2}\,.$$

Ze zákona zachování momentu hybnosti plyne

$$J_0\omega_0 = J_1\omega_1\,, \qquad f_1 = f_0\frac{J_0}{J_1} = \frac{5}{8}f_0 = 31{,}3\ \mathrm{s^{-1}}\,.$$

2 body

c) Kinetická energie soustavy těsně před přetržením drátu

$$E_\mathrm{k0} = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2 = 2{,}5MR^2\pi^2 f_0^2 = 222\ \mathrm{J}\,.$$

Kinetická energie po dopadu závaží

$$E_\mathrm{k1} = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}2MR^2\cdot 4\pi^2\frac{25}{64}f_0^2 = \frac{25}{16}MR^2\pi^2 f_0^2 = 139\ \mathrm{J}\,.$$

$$\frac{E_{\mathrm{k}_1}}{E_\mathrm{k0}} = \frac{5}{8} = 0{,}625\,, \qquad E_{\mathrm{k}_0} - E_\mathrm{k1} = 0{,}375E_\mathrm{k0} = 83\ \mathrm{J}\,.$$

Příčina úbytku mechanické energie soustavy je v deformační práci, kterou vykonají závaží při dopadu na prstenec. Úbytek mechanické energie se projeví jako přírůstek vnitřní energie soustavy.

2 body

d) α) Až do okamžiku dopadu závaží na konce příčky platí vedle zákona zachování momentu hybnosti také zákon zachování energie. Z něj určíme velikost rychlosti $\boldsymbol{v}$ závaží těsně před dopadem na konec příčky ve vztažní soustavě spojené s laboratoří.

$$E_\mathrm{k0} = 2{,}5MR^2\pi^2 f_0^2 = \frac{1}{2}MR^2 4\pi^2 f_1^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\frac{M}{2}v^2 = \frac{25}{32}MR^2\pi^2 f_0^2 + \frac{Mv^2}{2}\,,$$

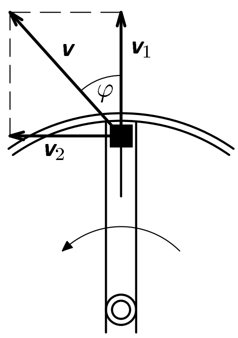
$$v = \sqrt{\frac{55}{16}}\pi R f_0 = 87{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Rychlost $\boldsymbol{v}$ můžeme rozložit na složku $\boldsymbol{v}_1$ v okamžitém směru příčky a složku $\boldsymbol{v}_2$ ve směru kolmém k příčce (Obr. R9). Složka $\boldsymbol{v}_1$ při nepružném nárazu na konec příčky zaniká, složka $\boldsymbol{v}_2$ se při nárazu zachová a má velikost

$$v_2 = 2\pi R f_1 = \frac{5}{4}\pi R f_0 = 58{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

Velikost složky $\boldsymbol{v}_1$ určíme pomocí Pythagorovy věty:

$$v_1 = \sqrt{v^2 - v_2^2} = \sqrt{\frac{30}{16}}\pi R f_0 = 64{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$



Obr. R9

Rychlost $\boldsymbol{v}$ svírá s okamžitým směrem příčky úhel

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{v_2}{v_1} = 42{,}4^\circ\,.$$

4 body

β) Ve vztažné soustavě spojené s rotující příčkou má závaží těsně před dopadem na konec příčky rychlost $\boldsymbol{v}_1$.

1 bod

Kontrolní výpočet: Úbytek kinetické energie soustavy při dopadu závaží na konce příčky odpovídá zániku složky $\boldsymbol{v}_1$:

$$E_{\mathrm{k0}} - E_{\mathrm{k1}} = \frac{15}{16} M R^2 \pi^2 f_0^2 = 2 \cdot \frac{1}{2}\frac{M}{2} v_1^2\,, \qquad v_1 = \sqrt{\frac{30}{16}}\pi R f_0\,.$$