Řešení úloh 1. kola 43. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: J.Blažek (1), V. Vícha (2), P.Šedivý (3, 5, 6), M. Jarešová (4, 6), B. Vybiral (7)

1. a) Označme F_{t1} třecí sílu mezi válcem a nakloněnou rovinou a F_{t2} třecí sílu mezi kvádrem a nakloněnou rovinou. Pro soustavu v klidu je $F_{t1} = 0$ (v opačném případě by na válec působil nenulový moment síly). Třecí síla F_{t2} je v rovnováze s pohybovými složkami tíhových sil, takže

$$F_{t2} = (m_1 + m_2)g \sin\alpha \,.$$

Soustava se udrží v klidu, pokud $F_{t2} \le f m_2 g \cos\alpha$. V opačném případě, tj. pro

$$f < \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \operatorname{tg}\alpha = f_{\max}$$

bude po nakloněné rovině sjíždět. Pro dané hodnoty: $f_{\max} = 0{,}67$. **3 body**

b) Vyjdeme z pohybových rovnic pro válec a kvádr ve tvaru

$$(m_1 g \sin\alpha - F)r = (J + m_1 r^2)\frac{a}{r}\,,$$
$$m_2 g \sin\alpha + F - f m_2 g \cos\alpha = m_2 a\,.$$

2 body

Jejich řešením je

$$a = g\frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - f m_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2 + \dfrac{J}{r^2}} = g\frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - f m_2 \cos\alpha}{\dfrac{3}{2}m_1 + m_2}\,,$$

$$F = m_2 g\frac{f\left(m_1 + \dfrac{J}{r^2}\right)\cos\alpha - \dfrac{J}{r^2}\sin\alpha}{m_1 + m_2 + \dfrac{J}{r^2}} = m_1 m_2 g\frac{3f\cos\alpha - \sin\alpha}{3m_1 + 2m_2}\,,$$

(Pro $F > 0$ jsou tyč namáhány tahem, pro $F < 0$ jsou namáhány tlakem.) Pro dané hodnoty: $a = 2{,}15\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $F = 2{,}0\ \mathrm{N}$. **2 body**

c) Třecí síla F_{t1} mezi válcem a nakloněnou rovinou uděluje válci úhlové zrychlení. Pokud se válec pohybuje bez prokluzování, platí

$$F_{t1} r = J\frac{a}{r}\,, \qquad F_{t1} \le f m_1 g \cos\alpha\,.$$

Po úpravě a dosazení dostaneme

$$\frac{Ja}{r^2} = \frac{Jg[(m_1 + m_2)\sin\alpha - f m_2 \cos\alpha]}{m_1 r^2 + m_2 r^2 + J} \le f m_1 g \cos\alpha\,,$$

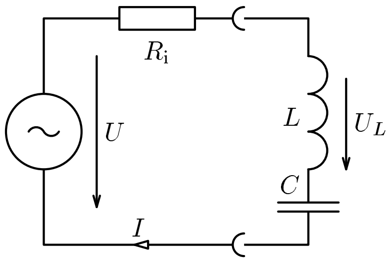
$$J(m_1 + m_2)\sin\alpha - J f m_2 \cos\alpha \le f m_1 (m_1 + m_2) r^2 \cos\alpha + J f m_1 \cos\alpha\,,$$

$$f \ge \frac{J\sin\alpha}{m_1 r^2 \cos\alpha + J\cos\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\dfrac{m_1 r^2}{J} + 1} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{3} = f_{\min}\,.$$

Pro dané hodnoty: $f_{\min} = 0{,}155$. **3 body**

2. a) Vyjdeme ze schématu na obr. R1. Obvodem prochází proud o efektivní hodnotě $I = U/Z$, kde Z je velikost celkové impedance

$$Z = \sqrt{R_i^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}\,.$$



Obr. R1

Při rezonanci platí

$$X_{L1} = X_C\,,\quad \omega L_1 = \frac{1}{\omega C}\,,\quad L_1 = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = 0,158\ \mathrm{H}\,.$$

1 bod

b) Při rezonanci bude obvodem procházet proud $I_\mathrm{rez} = \dfrac{U}{R_i}$ a na cívce bude napětí

$$U_{L\mathrm{rez}} = X_{L1} I_\mathrm{rez} = X_C I_\mathrm{rez} = \frac{U}{2\pi f R_i C} = 8{,}0\ \mathrm{V}\,.$$

1 bod

c) Napětí U_L na cívce závisí na její indukčnosti podle vztahu

$$U_L = X_L I = \frac{\omega L U}{\sqrt{Ri^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}\,.$$

Maximum této funkce vyšetříme užitím diferenciálního počtu:

$$\frac{\mathrm{d}U_L}{\mathrm{d}L} = \omega U \frac{\sqrt{Ri^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} - \frac{L\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\omega}{\sqrt{Ri^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}}{Ri^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} =$$

$$= \omega U \frac{R_i^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} - \frac{L}{C}}{\left[Ri^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Derivace je definována pro libovolné L a pro $L = L_2$ musí být nulová.

$$R_i^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} - \frac{L_2}{C} = 0\,,\qquad L_2 = C\left(R_i^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2}\right) = 0{,}168\ \mathrm{H}\,.$$

Vyšetřením znaménka derivace v okolí L_2 dokážeme, že jde o maximum:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Jmenovatel je vždy kladný}\\ \text{Pro } \ L < L_2 \text{ je čitatel kladný}\\ \text{Pro } \ L > L_2 \text{ je čitatel záporný}\end{array}\right\} \Rightarrow \ \text{v } L_2 \text{ je maximum.}$$

2 body

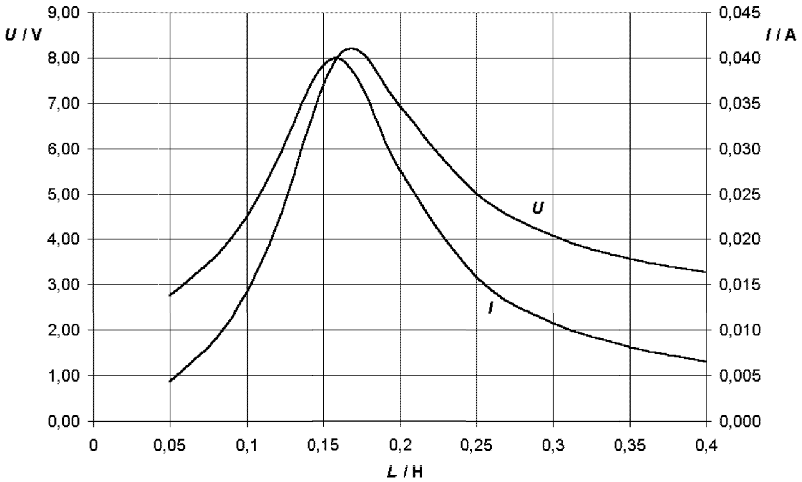
d)

$$U_{Lmax} = \frac{\omega L_2 U}{\sqrt{Ri^2 + \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = 8{,}2\ \mathrm{V}\,.$$

1 bod

e) Tabulka a graf z EXCELU:

L / H	0,05	0,08	0,1	0,12	0,14	0,15	0,16	0,17	0,18	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
I / A	0,0138	0,0181	0,0225	0,0288	0,0363	0,0392	0,0400	0,0384	0,0351	0,0276	0,0159	0,0108	0,0081	0,0065
U_L / V	0,867	1,821	2,833	4,345	6,392	7,38	8,035	8,199	7,944	6,941	5,003	4,077	3,576	3,266



3 body

f)

$$U'_{L\mathrm{rez}} = \sqrt{R'^2 + (\omega L_1)^2}\,\frac{U}{R' + R_i} = \frac{U\sqrt{R'^2 + \frac{1}{4\pi^2 f^2 C^2}}}{R' + R_i} = 7{,}8\ \mathrm{V}\,.$$

2 body

3. a) Zahříváme-li vzduch ve vznášejícím se balonu velmi pomalu, je aerostatická vztlaková síla v rovnováze s tíhou balonu:

$$mg + V\varrho_{\mathrm{i}}g = V\varrho g\,, \qquad m = V(\varrho - \varrho_{\mathrm{i}})\,,$$

kde ϱ, ϱ_{i} jsou hustoty vzduchu vně a uvnitř balonu. Ze stavové rovnice odvodíme

$$\frac{pV}{T} = \frac{m}{M}R\,, \qquad \varrho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}\,. \quad \text{Po dosazení} \quad m = \frac{VpM}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\mathrm{i}}}\right)\,.$$

U země $p = p_0$, $T_{\mathrm{i}} = T_{\mathrm{i0}}$

$$mRTT_{\mathrm{i0}} = p_0VM(T_{\mathrm{i0}} - T)\,, \qquad T_{\mathrm{i0}} = \frac{T}{1 - \dfrac{mRT}{p_0VM}} = 364{,}38\ \mathrm{K} \doteq 364\ \mathrm{K}\,.$$

$t_{\mathrm{i0}} \doteq 91\ {}^\circ\mathrm{C}$. **3 body**

b) Řešením rovnice

$$\mathrm{d}p = -\varrho g\mathrm{d}h = -\frac{pMg}{RT}\mathrm{d}h \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{Mg}{RT}\mathrm{d}h$$

dostaneme

$$\int_{p_0}^{p}\frac{\mathrm{d}p}{p} = \ln\frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{RT}\int_0^h \mathrm{d}h = -\frac{Mgh}{RT}\,, \qquad \frac{p}{p_0} = \mathrm{e}^{-\frac{Mgh}{RT}}\,, \qquad p = p_0\mathrm{e}^{-\frac{Mgh}{RT}}\,.$$

3body

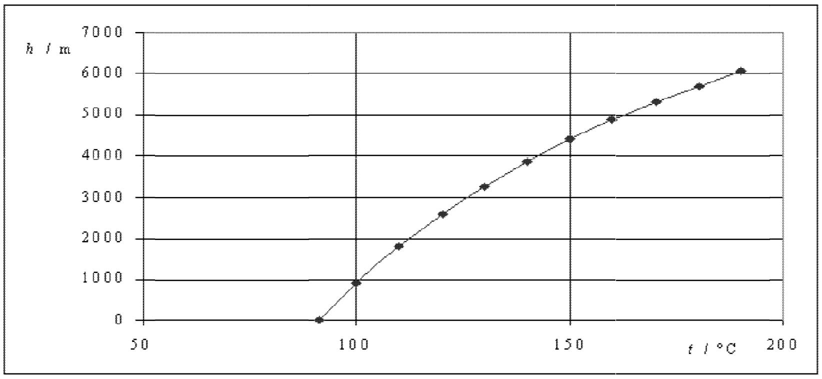
c) Ve výšce h nad zemí platí

$$m = \frac{Vp_0M}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\mathrm{i}}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{Mgh}{RT}}\,, \qquad \mathrm{e}^{\frac{Mgh}{RT}} = \frac{p_0VM(T_{\mathrm{i}} - T)}{mRTT_{\mathrm{i}}}\,,$$

$$h = \frac{RT}{Mg}\ln\frac{p_0VM}{mRT}\left(1 - \frac{T}{T_{\mathrm{i}}}\right)\,, \quad \text{kde} \quad T = 300{,}15\ \mathrm{K}, \quad T_{\mathrm{i}} = (\{t_i\} + 273{,}15)\ \mathrm{K}\,.$$

Průběh závislosti h na t_{i} popisuje následující tabulka a graf: **4 body**

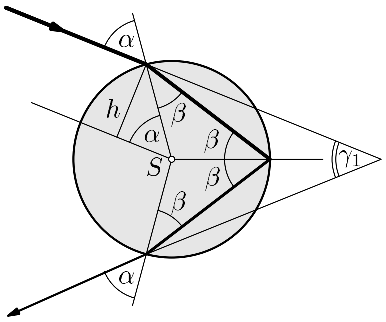
$t_{\mathrm{i}}/{}^\circ\mathrm{C}$	91,23	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
h/m	0	915	1 811	2 584	3 260	3 859	4 3 94	4 875	5 312	5 709	6 074



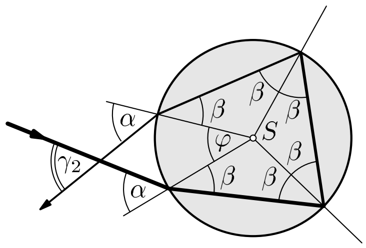
4. a) Z Obr. R2 odvodíme: $\sin\alpha = \dfrac{h}{r} = H\,, \qquad \alpha = \arcsin H\,.$

Ze zákona lomu: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n\,, \qquad \beta = \arcsin\left(\dfrac{\sin\alpha}{n}\right) = \arcsin\dfrac{H}{n}\,.$

1 bod



Obr. R2



Obr. R3

b) Z obr. R2:

$$\gamma_1 + 2(\alpha - \beta) + 2(180^\circ - \beta) = 360^\circ\,, \qquad \gamma_1 = 4\beta - 2\alpha\,,$$

Z obr. R3:

$$\varphi = 360^\circ - 3(180^\circ - 2\beta)\,, \qquad \varphi = 6\beta - 180^\circ\,,$$

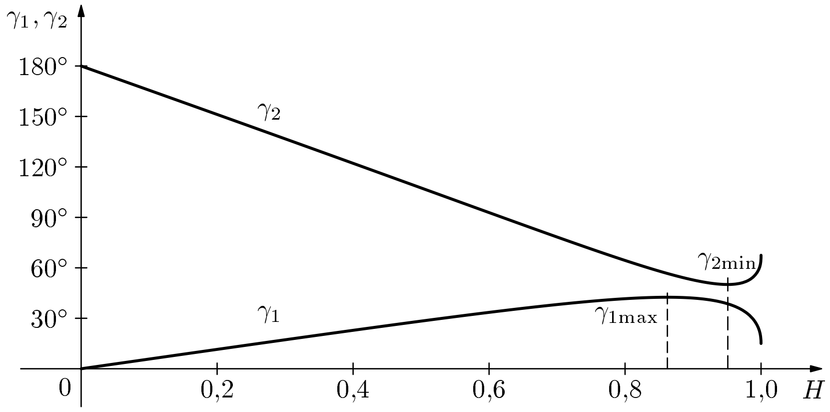
$$\gamma_2 + 2(180^\circ - \alpha) + \varphi = 360^\circ\,, \qquad \gamma_2 = 180^\circ + 2\alpha - 6\beta\,.$$

2 body

c) Po dosazení vztahů z úlohy a) do b) dostaneme

$$\gamma_1 = 4\arcsin\frac{H}{n} - 2\arcsin H\,, \qquad \gamma_2 = 180^0 + 2\arcsin H - 6\arcsin\frac{H}{n}\,. \qquad (1)$$

Pro $n = 1{,}330$ dostáváme grafy na obr. R4:



Obr. R4

2 body

d) Extrém funkce $\gamma_1(H)$:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}H} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H}(4\arcsin\frac{H}{n} - 2\arcsin H) = \frac{4}{\sqrt{n^2-H^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-H^2}} = 0\,,$$

$$H = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.\quad \text{Z grafu v úloze c) je zřejmé, že se jedná o maximum.} \qquad (2)$$

Extrém funkce $\gamma_2(H)$:

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_2}{\mathrm{d}H} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}H}(180^0 + 2\arcsin H - 6\arcsin\frac{H}{n}) = \frac{2}{\sqrt{1-H^2}} - \frac{6}{\sqrt{n^2-H^2}} = 0\,,$$

$$H = \sqrt{\frac{9-n^2}{8}}.\quad \text{Z grafu v úloze c) je zřejmé, že se jedná o minimum.} \qquad (3)$$

Hodnoty úhlů jsou uvedeny v části e).

2 body

e) Je-li kapka vody osvětlená slunečním světlem rovnoměrně, je rovnoměrné rozložení hodnot záměrného parametru vstupujících paprsků. Soustředění rozptýleného světla určité barvy bude proto největší v tom směru, ve kterém se duhový úhel v závislosti na H mění nejpomaleji, tedy ve směru určeném duhovým úhlem $\gamma_{1\max}$ (primární duha) a ve směru určeném duhovým úhlem $\gamma_{2\min}$ (sekundární duha).

Pro červené světlo je $n = 1{,}330$. Ze vztahů (2) a (3) vypočítáme:

$$H_{1č} = 0{,}862,\ \ H_{2č} = 0{,}951$$

a dosazením hodnot H do vztahů (1) dostaneme:

$$\gamma_{1č} = 42°31',\ \ \gamma_{2č} = 50°6'.$$

Obdobným postupem vypočítáme pro fialové světlo ($n_\mathrm{f} = 1{,}343$):

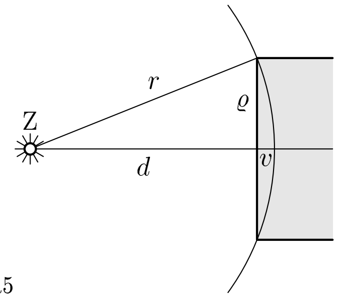
$$H_{1\mathrm{f}} = 0{,}856,\ \ H_{2\mathrm{f}} = 0{,}948,\ \ \gamma_{1\mathrm{f}} = 40°39', \gamma_{2\mathrm{f}} = 53°29'\,.$$

Úhlová šířka primární duhy je $\Delta\gamma_1 = 1°52'$ a sekundární duhy $\Delta\gamma_2 = 3°23'$.

Barvy v duze tvoří barevné spektrum. Primární duha - směrem zevnitř fialová, modrá, zelená, žlutá, oranžová, červená; sekundární duha - pořadí barev opačné, tj. červená uvnitř,..., fialová barva vně.

3 body

5. a) Zvolme zářič za střed koule, na které leží obvodová kružnice vstupního okénka detektoru (Obr. R5). Ta na kouli omezuje vrchlík o poloměru ϱ a plošném obsahu $S = 2\pi r v$, kde $r = \sqrt{d^2 + \varrho^2}$ je poloměr koule a $v = r - d = \sqrt{d^2 + \varrho^2} - d$ je výška vrchlíku.



Obr. R5

Celkový tok částic β je tolikrát větší než tok dopadající do detektoru, kolikrát je povrch celé koule S_0 větší než obsah vrchlíku.

3 body

Aktivita zářiče je

$$A = \frac{N_1}{\tau} \cdot \frac{S_0}{S} = \frac{N_1}{\tau} \cdot \frac{4\pi r^2}{2\pi r v} = \frac{N_1}{\tau} \cdot \frac{2\sqrt{d^2 + \varrho^2}}{\sqrt{d^2 + \varrho^2} - d} = 688\ \mathrm{Bq}\,.$$

4 body

b) Aktivitu zářiče můžeme vyjádřit jako $A = \lambda N$, kde N je počet atomů nuklidu a $\lambda = \ln 2 / T$ je přeměnová konstanta. Z toho

$$N = \frac{A}{\lambda} = \frac{AT}{\ln 2} = 8{,}8 \cdot 10^{11}\,.$$

Celková hmotnost stroncia je

$$m = N \mathrm{A_r} m_\mathrm{u} = 1{,}3 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{kg}\,.$$

3 body

7. a) Magnetomotorické napětí

- podle definice $U_\mathrm{m} = H_\mathrm{ž}(2\pi r_0 - 2\delta) + H_\mathrm{v} 2\delta$,
- podle zákona celk. proudu $U_\mathrm{m} = zI$.

Jedná se o sériový magnetický obvod s konstantním průřezem S, u kterého magnetický indukční tok je konstantní. Proto magnetická indukce ve vzduchové mezeře bude rovna magnetické indukci v železe.

$$\Phi = B_\mathrm{ž} S = B_\mathrm{v} S \,, \qquad B_\mathrm{ž} = B_\mathrm{v} = B \,.$$

Tedy $\mu_0 H_\mathrm{v} = \mu_\mathrm{r} \mu_0 H_\mathrm{ž} = B$, kde μ_r je relativní permeabilita železa příslušná indukci B:

$$\mu_\mathrm{r} = \frac{B}{\mu_0 H_\mathrm{ž}} \,,$$

přičemž intenzitu $H_\mathrm{ž}$ pole v železe určíme pro dané B z magnetizační křivky nebo z tabulek: Pro $B = 0{,}750$ T je $H_\mathrm{ž} = 120\ \mathrm{A \cdot m^{-1}}$. Pak $\mu_\mathrm{r} = 4{,}97 \cdot 10^3$ a pro magnetomotorické napětí platí

$$zI = H_\mathrm{ž}(2\pi r_0 - 2\delta) + H_\mathrm{v} 2\delta \approx 2H_\mathrm{ž}(\pi r_0 + \mu\mathrm{r}\delta) \,.$$

Z toho určíme magnetizační proud

$$I = \frac{2H_\mathrm{ž}(\pi r_0 + \mu\mathrm{r}\delta)}{z} = 12{,}1\ \mathrm{A} \,.$$

5 bodů

b)

$$I_1 = \frac{2H_\mathrm{ž}\left(\pi r_0 + \mu\mathrm{r}\dfrac{\delta}{3}\right)}{z} = 4{,}17\ \mathrm{A} \,. \qquad I_0 = \frac{2H_\mathrm{ž}}{z}\pi r_0 = 0{,}188\ \mathrm{A} \,.$$

2 body

c) Protože ve vzduchové mezeře se nezmění magnetická indukce B, platí

$$F = F_1 = F_0 = \frac{B^2}{2\mu_0} 2S = \frac{B^2}{\mu_0}\pi r^2 = 141\ \mathrm{N} \,.$$

3 body