Řešení úloh 1. kola 45. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: R. Horáková (2, 5), M. Jarešová (1, 3, 4), V. Vícha (6) a I. Volf (7)
Konečná úprava: P. Šedivý

1.a) Pohyb směrem nahoru je rovnoměrně zpomalený. Zrychlení má opačný směr než okamžitá rychlost a jeho velikost je $a_1 = g(\sin\alpha + f\cos\alpha)$. Pro rychlost a dráhu platí

$$v = v_0 - g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t\,, \qquad s = v_0 t - \frac{1}{2}g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t^2$$

. Když se těleso zastaví, je $v = 0$, z čehož určíme dobu výstupu a dráhu:

$$t_1 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 0{,}57\ \mathrm{s}\,, \qquad s_1 = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 0{,}57\ \mathrm{m}\,.$$

2 body

b) Při pohybu směrem dolů $a_2 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$. Aby se těleso dostalo do původní polohy, musí od místa zastavení urazit dráhu

$$s_2 = s_1 = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t_2^2\,,$$

odkud $$t_2 = \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha - f^2\cos^2\alpha}} = 0{,}85\ \mathrm{s}.$$

1 bod

c) Rychlost při průchodu zpět původní počáteční polohou je

$$v_2 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t_2 = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha}} = 1{,}35\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

1 bod

d) Nejprve určíme dobu t_3 od okamžiku zastavení tělesa, za kterou těleso dosáhne v průběhu klesání rychlosti o velikosti v_0. Platí

$$v_0 = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t_3\,, \qquad t_3 = \frac{v_0}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)} = 1{,}26\ \mathrm{s}\,.$$

Od začátku pohybu uplyne doba $T = t_1 + t_3 = 1{,}83$ s.
Dráha měřená od místa zastavení je

$$s_3 = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - f\cos\alpha)t_3^2 = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha - f\cos\alpha)} = 1{,}26\ \mathrm{m}.$$

Těleso se přitom bude nacházet ve vzdálenosti $d = s_3 - s_1 = 0{,}69$ m od počáteční polohy. Celková dráha s_c uražená od začátku pohybu je dána součtem $s_c = s_1 + s_3 = 1{,}83$ m.

2 body

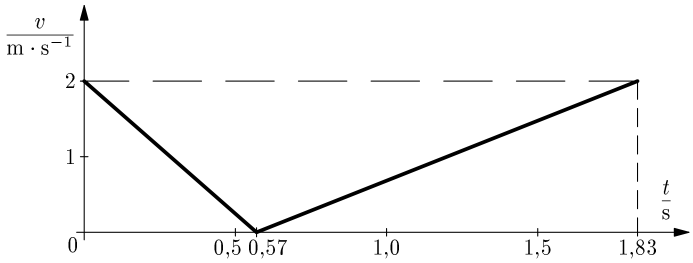
e) Dle podmínek úlohy musí být

$$t_2 = \frac{v_0}{g}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha - f^2\cos^2\alpha}} = 2t_1 = 2\frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}\,.$$

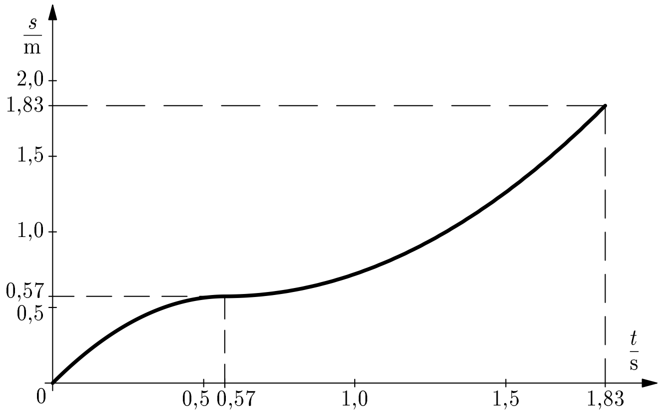
Po úpravě $3\sin\alpha = 5f\cos\alpha\,,\qquad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5f}{3}\,,\qquad \alpha = 9°28'\,.$

2 body

f) Grafy závislostí rychlosti a dráhy na čase



Obr. R1 – Graf závislosti rychlosti na čase



Obr. R2 – Graf závislosti dráhy na čase

2 body

2. a) Platí

$$M = \varrho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3\,, \qquad R = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\varrho}} = 0{,}276\ \mathrm{m}\,.$$

Na kuličku působí plná olověná koule gravitační silou o velikosti

$$F = \varkappa \frac{Mm}{4R^2} = 2{,}19 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{N}\,.$$

2 body

b) Gravitační síla, jejíž velikost jsme vypočítali v úloze a), je vektorovým součtem gravitační síly $\boldsymbol{F}_1$ od zbytku koule a gravitačních sil $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{F}_3$ od dvou koulí o poloměrech $R/2$ a hmotnostech $M/8$, jejichž odstraněním vzniknou dutiny. Pro uspořádání podle obr. 1b odvodíme z obr. R3:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3\,, \qquad F = F_1 + F_2 + F_3\,,$$

$$F_1 = F - F_2 - F_3 = \frac{\varkappa Mm}{d^2} - \frac{\varkappa Mm}{8\left(d - \frac{R}{2}\right)^2} - \frac{\varkappa Mm}{8\left(d + \frac{R}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\varkappa Mm}{d^2}\left[1 - \frac{d^2(4d^2 + R^2)}{(4d^2 - R^2)^2}\right]\,.$$

Pro $d = 2R$ dostaneme

$$F_1 = \frac{\varkappa Mm}{d^2}\left(1 - \frac{68}{225}\right) = F(1 - 0{,}302) = 0{,}698F = 1{,}53 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{N}\,.$$

Gravitační síla je o 30,2 % menší než v úloze a).

4 body

c) Pro uspořádání podle obr. 1c odvodíme z obr. R4:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3\,, \qquad F_2 = F_3\,, \qquad F = F_1 + 2F_2\cos\alpha\,,$$

$$F_1 = F - 2F_2\cos\alpha = \frac{\varkappa Mm}{d^2} - 2\frac{\varkappa Mm}{8\left(d^2 + \frac{R^2}{4}\right)} \cdot \frac{d}{\sqrt{d^2 + \frac{R^2}{4}}} =$$

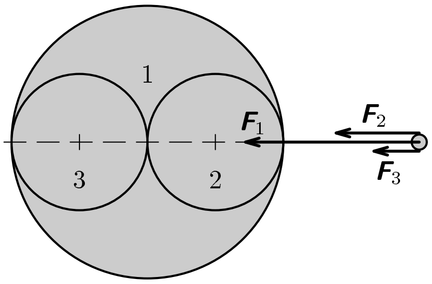
$$= \frac{\varkappa Mm}{d^2}\left[1 - \frac{2d^3}{(4d^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\,.$$

Pro $d = 2R$ dostaneme

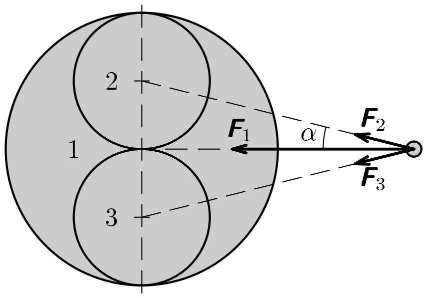
$$F_1 = \frac{\varkappa M m}{d^2}\left(1 - \frac{16}{\sqrt{17^3}}\right) = F(1 - 0{,}228) = 0{,}772F = 1{,}69 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{N}\,.$$

Gravitační síla je jen o 22,8 % menší než v úloze a) a je tedy větší než v uspořádání podle obr. 1b.

4 body



Obr. R3



Obr. R4

3.a) Síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_1'$, kterými působí řetězy, jsou v rovnováze s tíhovou silou, působící na kleště s odlitkem. Z toho

$$2F_1 \cos\alpha = mg\,, \qquad F_1 = \frac{mg}{2\cos\alpha} = 1530\ \mathrm{N}\,.$$

2 body

b,c) Na páku AOB kleští působí v bodě A řetěz silou $\boldsymbol{F}_1$, v bodě B odlitek silou $\boldsymbol{F}_2$ a v bodě O čep kleští silou $\boldsymbol{F}_3$ (obr. R5). Tyto síly jsou v rovnováze, proto jejich vektorové přímky procházejí týmž bodem. Z důvodu symetrie soustavy působí síla $\boldsymbol{F}_3$ vodorovným směrem. Síla $\boldsymbol{F}_2$ se rozkládá na svislou složku $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$, což je třecí síla mezi odlitkem a čelistí, a na vodorovnou složku $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$, kolmou k čelisti. Platí

$$F_\mathrm{t} = \frac{F_G}{2} = \frac{mg}{2} = 981\ \mathrm{N}\,.$$

1 bod

Velikost síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ určíme užitím momentové věty pro osu v bodě O:

$$F_\mathrm{n} h = F_1 l \sin(\alpha + \beta) + F_\mathrm{t}\frac{d}{2} = mg\left(\frac{l\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\alpha} + \frac{d}{4}\right)\,,$$

$$F_\mathrm{n} = mg\frac{2l\sin(\alpha+\beta) + d\cos\alpha}{4h\cos\alpha} = 5\,580\ \mathrm{N}\,.$$

3 body

Síla $\boldsymbol{F}_3$ je v rovnováze se silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ a vodorovnou složkou síly $\boldsymbol{F}_1$.

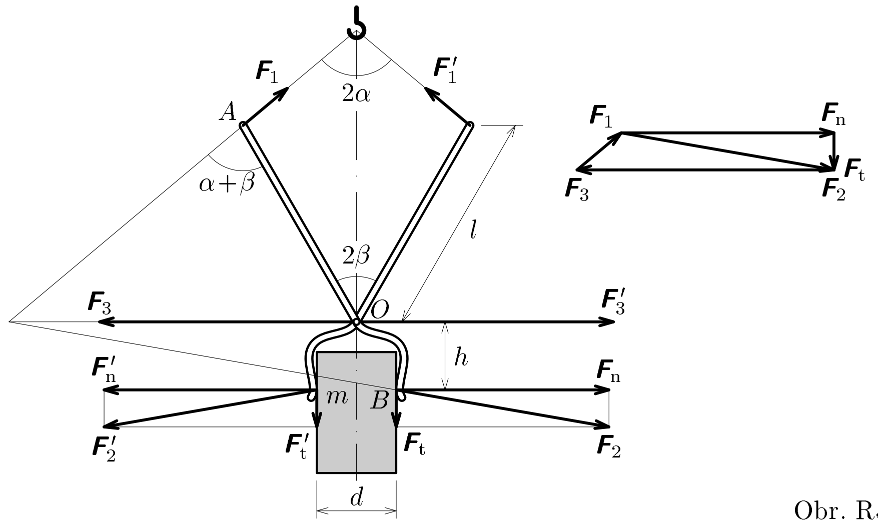
$$F_3 = F_\mathrm{n} + F_1 \sin\alpha = mg\left(\frac{2l\sin(\alpha+\beta) + d\cos\alpha}{4h\cos\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\right) = 6\,750\ \mathrm{N}\,.$$

2 body

d) Aby odlitek nesklouzl, musí součinitel smykového tření mezi čelistí a odlitkem splňovat vztah

$$f > \frac{F_\mathrm{t}}{F_\mathrm{n}} = \frac{2h\cos\alpha}{2l\sin(\alpha+\beta) + d\cos\alpha} = 0{,}18\,.$$

2 body



Obr. R5

4.a) Důkaz, že můstek M zůstává při pohybu stále rovnoběžný (obr. R6): Při malém pootočení vahadla zůstanou závěsy BE a CJ prakticky svislé. Posune-li se můstek v bodě D o h, pak se posune koncový bod J o h'.

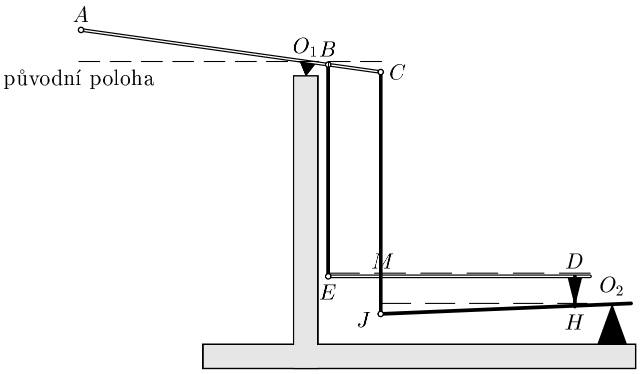
Platí $\dfrac{h'}{h} = \dfrac{|O_2J|}{|O_2H|} = 5$. Posunutí h' je z bodu J přenášeno tyčí do bodu C.

Zároveň se s bodem C také posouvá bod B, a proto i bod E o h''.

Platí: $\dfrac{h''}{h'} = \dfrac{|O_1B|}{|O_1C|} = \dfrac{|O_1B|}{5|O_1B|} = \dfrac{1}{5}$.

Potom $h'' = \dfrac{1}{5}h' = \dfrac{1}{5}\cdot 5h = h$. Můstek M tedy zůstává ve vodorovné poloze.

3 body

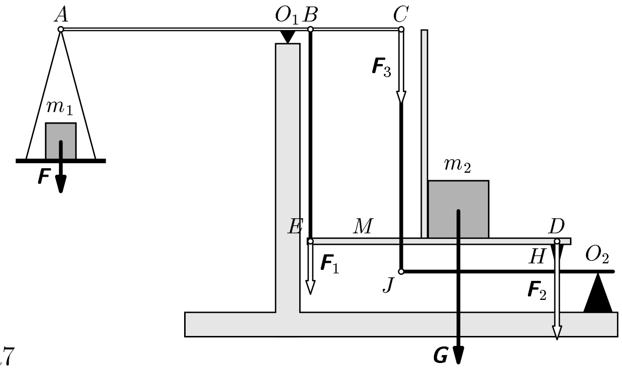


Obr. R6

b) Pro síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ platí: $G = F_1 + F_2$, $3F_1 = 2F_2$, z čehož $F_1 = \dfrac{2}{5}G$, $F_2 = \dfrac{3}{5}G$.

Pro dané hodnoty: $F_1 = 7{,}85\ \mathrm{N}$, $F_2 = 11{,}77\ \mathrm{N}$. **2 body**

c) Pro libovolnou polohu břemene na můstku můžeme rozložit tíhu břemene do dvou složek $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ - viz obr. R7. Pak $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$. Účinek složky $\boldsymbol{F}_1$ se přes vahadlo přenáší do bodu B. Složka $\boldsymbol{F}_2$ vyvolává v bodě J tahovou sílu $\boldsymbol{F}_3$.



Obr. R7

Vzhledem k ose O_2 musí ve stavu rovnováhy platit: $F_2 \cdot |O_2H| = F_3 \cdot |O_2J|$, z čehož $F_2 = 5F_3$. Aby bylo vahadlo v rovnováze, musí vzhledem k ose O_1 platit podmínka:

$$F \cdot |O_1A| = F_1 \cdot |O_1B| + F_3 \cdot |O_1C|.$$

Po dosazení za $F_3 = \dfrac{F_2}{5}$, dostaneme

$$F \cdot 10|O_1B| = F_1 \cdot |O_1B| + \frac{F_2}{5} \cdot 5|O_1B|,$$

po úpravě $10F = F_1 + F_2$, tj. $10F = G$.
Ze získaného výsledku je zřejmé, že při rovnovážné poloze nezáleží na poloze břemene na můstku. Je vidět, že můstkové zařízení působí tak, jako kdyby břemeno bylo zavěšeno v bodě B. **4 body**

d) Z předchozí rovnice plyne $F = \dfrac{G}{10}$, tj. $m_1 = \dfrac{m_2}{10}$.
Pro dané hodnoty $m_1 = 0{,}2$ kg. **1 bod**

5.a) Stav 2: $V_2 = 4V_1$. Z Poissonova zákona a stavové rovnice dostaneme:

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} = \frac{p_1}{4^{\varkappa}}, \qquad T_2 = \frac{p_2V_2T_1}{p_1V_1} = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa-1} = \frac{T_1}{4^{\varkappa-1}}.$$

Stav 4: $p_4 = p_1$. Podle zákonů pro izobarický děj:

$$V_4 = \frac{V_2}{2} = 2V_1\,, \qquad T_4 = 2T_1\,.$$

stav 3: $V_3 = 4V_1$. Podle zákonů pro izotermický děj:

$$T_3 = T_4 = 2T_1\,, \qquad p_3 = \frac{p_1V_4}{V_3} = \frac{p_1}{2}\,.$$

4 body

b) Pro dané hodnoty: $p_2 = 14{,}3\,\mathrm{kPa}\,, \quad p_3 = 50\,\mathrm{kPa}\,, \quad p_4 = 100\,\mathrm{kPa}\,,$

$$T_2 = 172\,\mathrm{K}\,, \quad T_3 = T_4 = 600\,\mathrm{K}\,, \quad V_2 = V_3 = 4{,}0\,\mathrm{dm}^3\,, \quad V_4 = 2{,}0\,\mathrm{dm}^3\,.$$

2 body

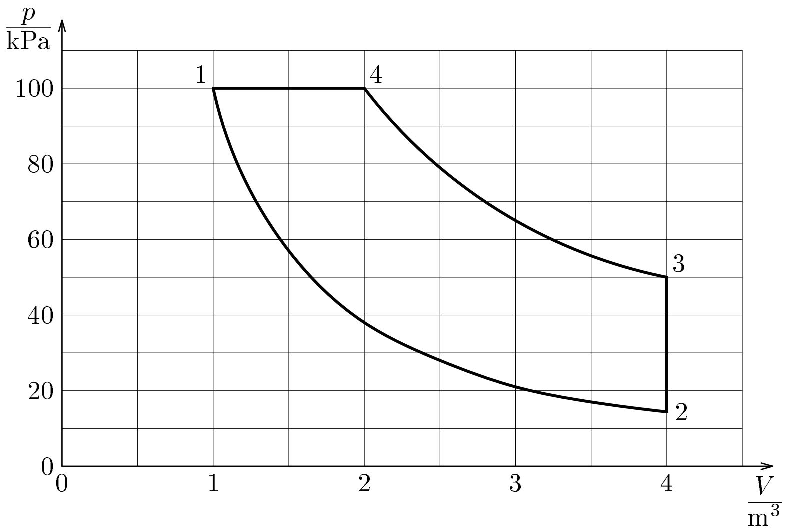
c) p-V diagram kruhového děje je na obr. R8.

Pro vykreslení adiabaty 1 – 2 použijeme vztah $p = p_1 \left(\frac{V_1}{V}\right)^{\varkappa}$ a dostaneme tabulku:

$\frac{V}{\mathrm{dm}^3}$	1,5	2,0	2,5	3	3,5
$\frac{p}{\mathrm{kPa}}$	57	38	28	21	17

Pro vykreslení izotermy 3 – 4 použijeme vztah $p = p_1 \frac{V_4}{V}$ a dostaneme tabulku:

$\frac{V}{\mathrm{dm}^3}$	2,5	3	3,5
$\frac{p}{\mathrm{kPa}}$	80	67	57



Obr. R8

3 body

d) Látkové množství plynu určíme pomocí stavové rovnice:

$$n = \frac{p_1 V_1}{R T_1} = 0{,}040\ \mathrm{mol}\,.$$

1 bod

6. *Řešení teoretických úloh:* Pro periodu kyvadla platí vztah $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{mgd}}$, kde J je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k jeho ose, m hmotnost kyvadla a d vzdálenost těžiště od osy.

Moment setrvačností tělesa vzhledem k ose rovnoběžné s osou jdoucí těžištěm vypočítáme podle *Steinerovy věty:* $J = J_\mathrm{T} + mr^2$, kde J_T je moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm, m je hmotnost tělesa a r je vzdálenost rovnoběžných os.

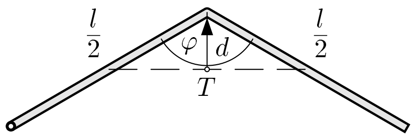
a) U rovné tyče je $d = \dfrac{l}{2}$, $J = \dfrac{ml^2}{3}$.

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{3}}{\frac{mgl}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}\,, \qquad l = \frac{3gT_1^2}{8\pi^2} = 0{,}372\ \mathrm{m}\,.$$

b) Z obr. R9 plyne: $d = \dfrac{l\cos\varphi}{4}$, $J = \dfrac{ml^2}{12}$.

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{12}}{\frac{mgl\cos\varphi}{4}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g\cos\varphi}} = T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}\,.$$

Z toho $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$, $\varphi = 60°$. Obě poloviny tyče svírají úhel $2\varphi = 120°$.



Obr. R9

c) Z obr. R10 plyne:

$$d^2 = \left(\frac{l}{2}\sin\varphi\right)^2 + \left(\frac{l}{4}\cos\varphi\right)^2 = \frac{13l^2}{64}\,, \quad d = \frac{l}{8}\sqrt{13}\,.$$

Podle kosinové věty

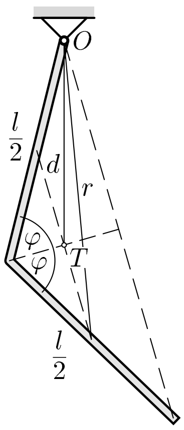
$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{4}\right)^2 - 2\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4}\cos 2\varphi = \frac{7}{16}l^2\,.$$

$$J = \frac{1}{3}\cdot\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\cdot\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m}{2}\cdot\frac{7}{16}l^2 = \frac{13}{48}ml^2\,.$$

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2\frac{13}{48}}{mgl\frac{\sqrt{13}}{8}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\sqrt{13}}{6g}}\,.$$

Po dosazení $l = \dfrac{3gT_1^2}{8\pi^2}$ dostaneme

$$T_3 = \frac{T_1}{2}\sqrt[4]{13} = 0{,}9494T_1\,.$$



Obr. R10

7. Označme si: $V_0 = 0{,}24\ \mathrm{m}^3$ objem celého sudu, V objem vody v okamžiku, kdy hladina dosáhne k otvorům, $H = 0{,}80$ m výšku sudu, $h = 0{,}60$ m výšku otvorů ode dna, h_1 výšku ustálené hladiny nad otvory, Q_V objemový průtok vody v hadici, $t = 900$ s dobu, za kterou hladina vystoupila k otvorům, $S = 2{,}0 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^2$ obsah otvoru a v velikost rychlosti vody vytékající otvory. $n = 75$ počet otvorů.

a) V okamžiku, kdy voda vystoupí k otvorům, platí

$$V = V_0 \frac{h}{H} = Q_V t\,, \quad \text{Z toho} \quad Q_V = \frac{V_0 h}{Ht} = 2{,}0 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1} = 0{,}20\ \mathrm{l} \cdot \mathrm{s}^{-1}\,.$$

2 body

b) Předpokládejme, že se hladina ustálí pod okrajem sudu. Pak bude objemový průtok vody otvory stejný jako v hadici:

$$Q_V = nSv\,, \quad \text{Z toho} \quad v = \frac{Q_V}{nS} = 1{,}33\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}\,.$$

2 body

Současně platí

$$v = \sqrt{2gh_1}\,. \quad \text{Z toho} \quad h_1 = \frac{v^2}{2g} = 0{,}091\ \mathrm{m}\,.$$

Protože $h_1 < H - h$, je splněn předpoklad o poloze ustálené hladiny pod okrajem sudu.

3 body

c) Pokud se hladina ustálí těsně pod okrajem sudu, vytéká voda rychlostí $v_{\max} = \sqrt{2g(H-h)}$. Pak platí

$$Q_{V\max} = nSv_{\max} = nS\sqrt{2g(H-h)} = 3{,}0 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{s}^{-1} = 0{,}30\ \mathrm{l} \cdot \mathrm{s}^{-1}\,.$$

3 body