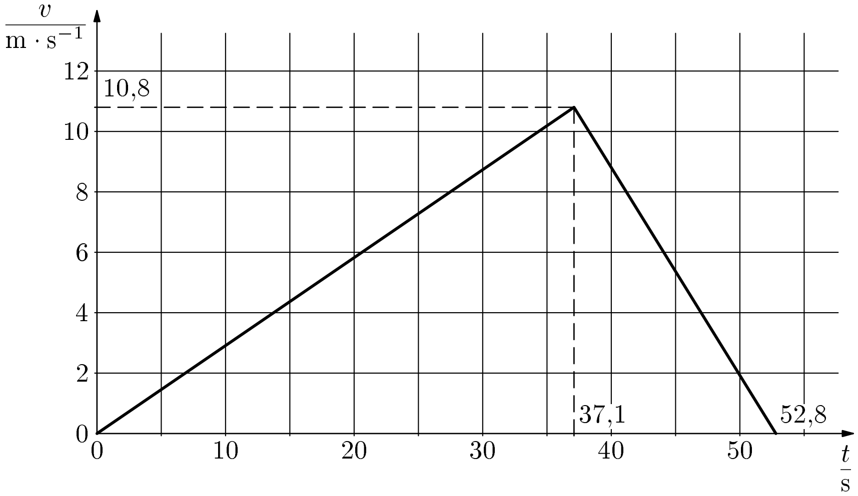
Řešení úloh 1. kola 47. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autoři úloh: J. Jírů $(1, 3, 4, 6, 7)$, P. Šedivý (2), L. Richterek (5)

1.a) K sestrojení grafu je nutné určit doby jízdy na zrychleném a na zpomaleném úseku a maximální rychlost pohybu. Vagon se na prvním úseku pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením o velikosti $a_1 = g \sin \alpha = 0{,}291 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, doba jízdy je $t_1 = \sqrt{\dfrac{2s_1}{a_1}} \doteq 37{,}1 \text{ s}$ a maximální rychlost je $v_{\max} = \sqrt{2a_1 s_1} = 10{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Na druhém úseku se vagon pohybuje rovnoměrně zpomaleným pohybem se zrychlením o velikosti

$$a_2 = g(f \cos \alpha - \sin \alpha) = 0{,}690 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}\,,$$

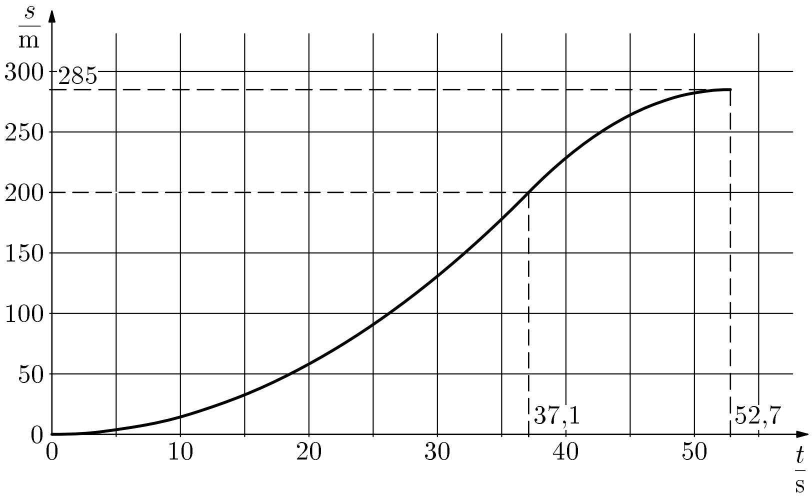
doba jízdy je $t_2 = \dfrac{v_{\max}}{a_2} \doteq 15{,}7$ s. Celková doba jízdy je $t_1 + t_2 \doteq 52{,}7$ s.



4 body

b) Během zrychlování je dráha určena rovnicí $s = \dfrac{1}{2} a_1 t^2$, během zpomalování rovnicí $s = s_1 + v_{\max}(t - t_1) - \dfrac{1}{2} a_2 (t - t_1)^2$. Graf tvoří části dvou parabol, první má vrchol v počátku a je rozevřena nahoru, druhá má vrchol o „souřadnicích“ [52,7 s, 284 m] odpovídajících okamžiku a místu zastavení.

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	5	10	15	20	25	30	35	**37,1**	40	45	50	**52,7**
$\frac{s}{\mathrm{m}}$	0	3,6	15	33	58	91	131	178	**200**	229	264	282	**284**

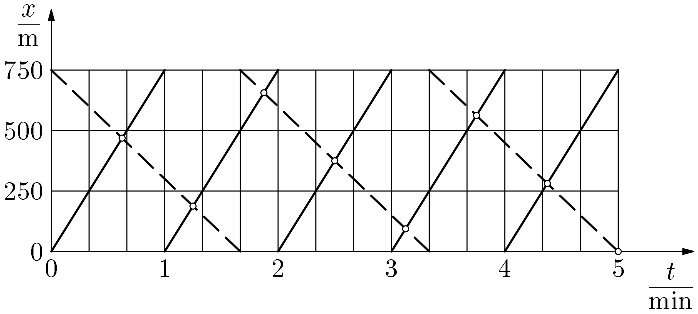


6 bodů

2.a) *Grafické řešení:*
Zaveďme na okruhu souřadnici x rostoucí ve směru pohybu rychlejšího cyklisty, tak, že v místě startu je $x = 0$. Cyklisté se pohybují po dráze s periodami

$$T_1 = \frac{o}{v_1} = \frac{750\ \mathrm{m}}{12{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} = 60\ \mathrm{s}\,, \qquad T_2 = \frac{o}{v_2} = \frac{750\ \mathrm{m}}{7{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}} = 100\ \mathrm{s}\,.$$

Z těchto údajů snadno sestrojíme grafy znázorňující jejich pohyb po okruhu (obr. R1). Časy a místa setkání určíme jako souřadnice průsečíků grafů.



Obr. R1

Početní řešení:
V okamžiku setkání je součet drah obou cyklistů roven celistvému násobku délky o:

$$s_1 + s_2 = (v_1 + v_2)t = k \cdot o\,, \quad k = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

K setkání dojde v časech $t = \dfrac{o}{v_1 + v_2} \cdot k = k \cdot 37{,}5$ s, tj. 8krát během doby 5 minut. Dráha rychlejšího cyklisty v okamžiku setkání je

$$s_1 = \frac{v_1 \cdot o}{v_1 + v_2} \cdot k = k \cdot 0{,}625o\,.$$

Souřadnice x místa setkání je rovna zbytku dráhy s_1 po dělení celkovou délkou okruhu o.

Pro $0 \leq x \leq 0{,}5o$ je vzdálenost místa setkání od místa startu $d = x$.

Pro $0{,}5o < x < o$ je vzdálenost místa setkání od místa startu $d = o - x$.

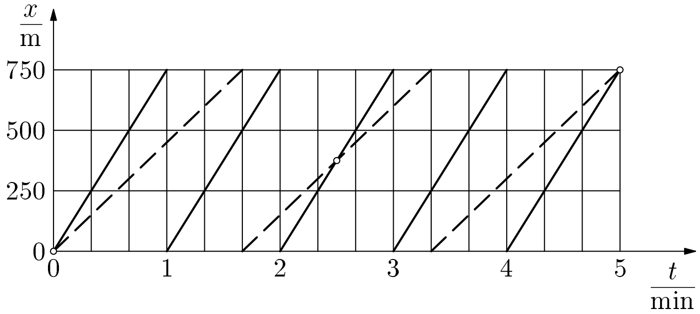
Výsledky výpočtů zapíšeme přehledně do tabulky:

k	t/s	s_1/o	d/m
1	37,5	0,625	281
2	75,0	1,250	188
3	112,5	1,875	94
4	150,0	2,500	375

k	t/s	s_1/o	d/m
5	187,5	3,125	94
6	225,0	3,750	188
7	262,5	4,375	281
8	300,0	5,000	0

3 body

b) *Grafické řešení:*



Obr. R2

Početní řešení:
V okamžiku setkání je rozdíl drah obou cyklistů roven celistvému násobku délky o:

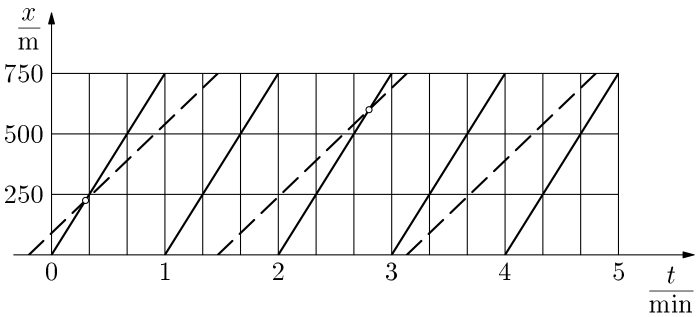
$$s_1 - s_2 = (v_1 - v_2)t = k \cdot o\,.$$

K setkání dojde v časech $t = \dfrac{o}{v_1 - v_2} \cdot k = k \cdot 150$ s, kdy dráha rychlejšího cyklisty je

$$s_1 = \frac{v_1 \cdot o}{v_1 - v_2} \cdot k = k \cdot 2{,}5o\,.$$

Z grafu na obr. R2 je zřejmé, že do 5 minut se to stane jen dvakrát, a sice
pro $k = 1$, kdy $t = 150\ \mathrm{s} = 2{,}5\ \mathrm{min}$, $s_1 = 2{,}5o$, $d = 0{,}5o = 375\ \mathrm{m}$
a pro $k = 2$, kdy $t = 300\ \mathrm{s} = 5\ \mathrm{min}$, $s_1 = 5o$, $d = 0$. **3 body**

c) *Grafické řešení:*



Obr. R3

Početní řešení

Platí $s_1 = v_1 t$, $s_2 = v_2(t + \tau)$. V okamžiku setkání

$$s_1 - s_2 = v_1 t - v_2(t + \tau) = k \cdot o\,.$$

K setkání dojde v časech $t = \dfrac{v_2 \tau + ko}{v_1 - v_2}$, kdy dráha rychlejšího cyklisty je

$$s_1 = \frac{v_1 v_2 \tau + k v_1 o}{v_1 - v_2}\,.$$

Z grafu na obr. R3 je zřejmé, že do 5 minut se to stane jen dvakrát, a sice
pro $k = 0$, kdy $t = 18\ \mathrm{s}$, $s_1 = 225\ \mathrm{m} = 0{,}3o$, $d = 0{,}3o = 225\ \mathrm{m}$
a pro $k = 1$, kdy $t = 168\ \mathrm{s}$, $s_1 = 2\,100\ \mathrm{m} = 2{,}8o$, $d = 0{,}2o = 150\ \mathrm{m}$.

4 body

3.a) V soustavě spojené s cyklistou působí v těžišti soustavy cyklisty s kolem tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a setrvačná odstředivá síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{s}$ tak, že vektorová přímka jejich výslednice $\boldsymbol{F}$ protíná vodorovnou vozovku ve spojnici dotykových bodů kol s vozovkou. Pro úhel α odklonu cyklisty od svislého směru platí:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_\mathrm{s}}{F_G} = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{r\omega^2}{g}\,.$$

Při jízdě vedle sebe mají cyklisté stejnou úhlovou rychlost. Pak větší odklon od svislé osy má cyklista, který jede po kruhovém oblouku o větším poloměru, tedy o poloměru r_2. **3 body**

b) Cyklista s kolem působí na vozovku silou $\boldsymbol{F}$. Aby při pohybu po kruhovém oblouku o poloměru r nedostal smyk, nesmí vodorovná složka této síly překročit velikost třecí síly. Tedy v krajním případě musí platit

$$fmg = mr\omega^2\,, \quad \text{kde} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{t}\,. \quad \text{Z rovnic plyne} \quad t = \pi\sqrt{\frac{r}{fg}}\,.$$

Nejkratšího času dosáhne při minimálním poloměru, tedy

$t_{\min} = \pi\sqrt{\dfrac{r_{\min}}{fg}} = 2{,}9\ \mathrm{s}\,.$ **4 body**

Obdobně musí být v krajním případě splněna podmínka $fmg = \dfrac{mv^2}{r}$, z níž plyne $v = \sqrt{fgr}$. Maximální rychlosti může cyklista dosáhnout naopak při maximálním poloměru, tedy $v_{\max} = \sqrt{fgr_{\max}} = 7{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. **3 body**

4.a) Zvolme soustavu souřadnic s počátkem na základní čáře pod míčkem. Pak platí

$$x = v_0 t\,, \qquad y = h - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Vyloučením času t dostaneme rovnici trajektorie

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2}x^2\,. \tag{1}$$

Po dosazení $x = d_1$, $y = h_1$, $v_0 = v_{\min}$ vyjádříme hledanou počáteční rychlost

$$v_{\min} = d_1\sqrt{\frac{g}{2(h_0 - h_1)}} = 20{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

b) Po dosazení $x = d_2$, $y = 0$, $v_0 = v_{\max}$ do rovnice (1) vyjádříme hledanou počáteční rychlost

$$v_{\max} = d_2\sqrt{\frac{g}{2h_0}} = 25{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

2 body

c) Z rovnic šikmého vrhu

$$x = v_0 t\cos\alpha\,, \qquad y = h_0 + v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

dostaneme vyloučením času t rovnici trajektorie

$$y = h_0 + x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2\,. \tag{3}$$

Dosazením $x = d_1 = 11{,}9\ \mathrm{m}$ dostaneme $y = 0{,}92\ \mathrm{m} > h_1 = 0{,}91\ \mathrm{m}$, tedy míček přejde přes síť.

Dosazením $y = 0$ dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou x

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 - x \operatorname{tg} \alpha - h_0 = 0\,,$$

jejíž kladný kořen

$$x = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \dfrac{2h_0 g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}}}{\dfrac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}} = 17{,}6\ \mathrm{m} < d_2 = 18,3\ \mathrm{m}\,.$$

Míček tedy dopadne do pole podání.

Jiné řešení: V rovnici (3) dosadíme $x = d_2 = 18,3\ \mathrm{m}$ a vypočítáme příslušné $y = -0{,}12\ \mathrm{m}$. Jelikož $y < 0$, míček dopadne do pole podání.

4 body

d) Vyjádřením t z rovnice (2) a dosazením $x = 17{,}6\ \mathrm{m}$ dostaneme

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} = 0{,}32\ \mathrm{s}.$$

1 bod

5.a) Po uvolnění kladky se dá celá soustava o hmotnosti $2M + m$ do pohybu působením tíhové síly na závaží o hmotnosti m. Tíhové síly působící na závaží o hmotnosti M se ve svém účinku ruší. Soustava se bude pohybovat rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením o velikosti

$$a_1 = \frac{mg}{2M + m}$$

a na dráze h_1 dosáhne rychlosti

$$v_1 = \sqrt{2h_1 a_1} = \sqrt{\frac{2h_1 mg}{2M + m}} = 1{,}48\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}\,.$$

3 body

b) V okamžiku dopadu pravého dolního závaží na podlahu bude levé závaží ve výšce h_1. Od tohoto okamžiku se soustava těles zavěšených na vlákně redukuje na levé závaží o hmotnosti M a pravé závaží o hmotnosti m, jejíž počáteční rychlost má velikost v_1. Tíhová síla působící na levé závaží je namířena proti pohybu soustavy, tíhová síla působící na pravé závaží o hmotnosti m působí ve směru pohybu. Soustava se tedy bude pohybovat rovnoměrně zpomaleným pohybem se zrychlením o velikosti

$$a_2 = \frac{M - m}{M + m} g$$

a zastaví se na dráze $s = \dfrac{v_1^2}{2a_2} = \dfrac{m(M + m)}{(2M + m)(M - m)} h_1 = 0{,}185\ \mathrm{m}\,.$

Protože $s < d$, zastaví se pravé horní závaží nad pravým dolním závažím a levé závaží vystoupí do výšky $h_2 = h_1 + s = 1{,}185$ m. **3 body**

c) Následuje rovnoměrně zrychlený pohyb redukované soustavy se zrychlením o velikosti a_2 do okamžiku, kdy levé závaží klesne do výšky h_1, pravé horní závaží vystoupí do vzdálenosti d od pravého dolního závaží a vlákno mezi závažími na pravé straně se napne. V tomto okamžiku dosáhne velikost rychlosti redukované soustavy opět hodnoty v_1. Uvedením dolního závaží do pohybu se hmotnost soustavy zvětší na původní hodnotu $2M + m$ a velikost rychlosti soustavy se změní z v_1 na v_2. (Jedná se o obdobu dokonale nepružného rázu.) Ze zákona zachování hybnosti plyne

$$(M+m)v_1 = (2M+m)v_2\,, \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{M+m}{2M+m}v_1\,.$$

Následující pohyb soustavy bude rovnoměrně zpomalený se zrychlením o velikosti a_1 a pravé dolní závaží se zastaví ve výšce

$$h_3 = \frac{v_2^2}{2a_1} = \left(\frac{M+m}{2M+m}\right)^2 \cdot \frac{2h_1 mg}{2M+m} \cdot \frac{2M+m}{2mg} = \left(\frac{M+m}{2M+m}\right)^2 h_1 = 0{,}31 \text{ m}\,.$$

Při následujících dopadech pravého závaží na podlahu bude soustava dále ztrácet mechanickou energii a nakonec se zastaví s pravým závažím o hmotnosti M na podlaze. **4 body**

Řešení užitím zákona zachování energie

Od uvolnění kladky do dopadu pravého závaží na podlahu získá soustava kinetickou energii rovnou úbytku energie potenciální:

$$\frac{1}{2}(2M+m)v_1^2 = (M+m)gh_1 - Mgh_1 = mgh_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2mgh_1}{2M+m}}\,.$$

Po dopadu pravého dolního závaží na podlahu ztratí redukovaná soustava kinetickou energii a získá stejně velkou energii potenciální:

$$(M-m)gs = \frac{1}{2}(M+m)v_1^2 \quad \Rightarrow \quad s = \frac{M+m}{M-m}\cdot\frac{v_1^2}{2g} = \frac{m(M+m)}{(2M+m)(M-m)}h_1\,.$$

Po opětném uvedení pravého dolního závaží do pohybu získá soustava při jeho výstupu potenciální energii a ztratí stejně velkou energii kinetickou:

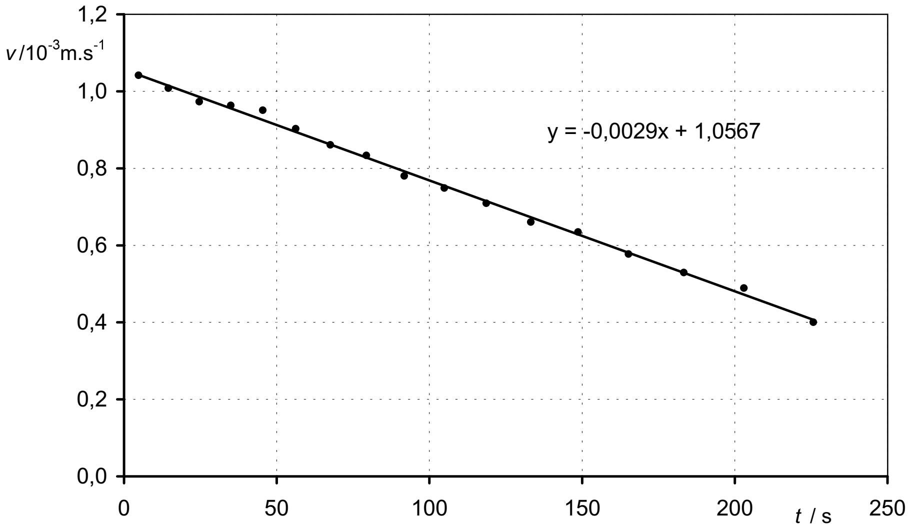
$$(M+m)gh_3 - Mgh_3 = mgh_3 = \frac{1}{2}(2M+m)v_2^2\,,$$

$$h_3 = \frac{2M+m}{2mg}\left(\frac{M+m}{2M+m}\right)^2 v_1^2 = \left(\frac{M+m}{2M+m}\right)^2 h_1\,.$$

6. Naměřené hodnoty a jejich zpracování je v tabulce. Při průchodu posledními dvěma ryskami již voda stékala po stěně, proto příslušné časy nebyly měřeny.

i	$\frac{h_i}{\mathrm{m}}$	$\frac{t_{i1}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i2}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i3}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i4}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_{i5}}{\mathrm{s}}$	$\frac{\bar{t}_i}{\mathrm{s}}$	$\frac{\Delta t_i = \bar{t}_i - \bar{t}_{i-1}}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_i = \frac{\bar{t}_i + \bar{t}_{i-1}}{2}}{\mathrm{s}}$	$\frac{v_i = \frac{\Delta h}{\Delta t_i}}{10^{-3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$
0	0,20	—	—	—	—	—	0	—	—	—
1	0,19	9,7	9,6	9,3	9,8	9,6	9,6	9,6	4,8	1,042
2	0,18	19,8	19,7	19,0	19,3	19,8	19,5	9,9	14,6	1,008
3	0,17	30,0	29,8	29,5	29,8	29,9	29,8	10,3	24,7	0,973
4	0,16	40,8	40,3	39,4	40,3	40,1	40,2	10,4	35,0	0,963
5	0,15	51,5	50,8	50,3	50,3	50,6	50,7	10,5	45,4	0,951
6	0,14	61,8	62,0	61,1	61,8	62,2	61,8	11,1	56,2	0,903
7	0,13	73,5	73,7	73,0	73,1	73,7	73,4	11,6	67,6	0,861
8	0,12	85,6	85,7	85,1	85,2	85,4	85,4	12,0	79,4	0,833
9	0,11	98,1	98,3	97,8	98,2	98,7	98,2	12,8	91,8	0,780
10	0,10	111,3	112,4	110,8	111,7	111,7	111,6	13,4	104,9	0,749
11	0,09	125,8	125,9	124,7	125,6	126,4	125,7	14,1	118,6	0,709
12	0,08	141,2	141,2	139,6	140,9	141,2	140,8	15,1	133,3	0,661
13	0,07	156,7	156,6	155,8	156,6	157,2	156,6	15,8	148,7	0,635
14	0,06	174,1	174,3	173,1	174,0	174,0	173,9	17,3	165,2	0,577
15	0,05	192,7	193,1	192,3	192,7	193,2	192,8	18,9	183,4	0,529
16	0,04	213,2	213,8	212,9	213,0	213,4	213,3	20,5	203,0	0,489
17	0,03	238,1	237,9	237,2	239,1	238,9	238,2	25,0	225,8	0,400
18	0,02	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	0,01	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Hodnoty z posledních dvou sloupců tabulky jsou vyneseny do grafu závislosti okamžité rychlosti pohybu hladiny na čase a sestrojenými body je proložena přímka.



Závěr: Z grafu lze usuzovat, že pohyb hladiny byl rovnoměrně zpomalený. Absolutní hodnota směrnice přímky udává velikost zrychlení $a = 0{,}0029\ \mathrm{mm/s^2}$.

7. a) Závislost rychlosti prvního automobilu na čase je $v = at$. Pro druhý automobil platí rovnice $Pt = \frac{1}{2}mv^2$, z níž závislost rychlosti na čase je $v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}}$. Z rovností rychlostí obou automobilů plyne pro hledaný čas $t_1 = \frac{2P}{ma^2} = 10{,}3\ \mathrm{s}$. Hledaná velikost rychlosti je $v_1 = at_1 = \frac{2P}{ma} = 18{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

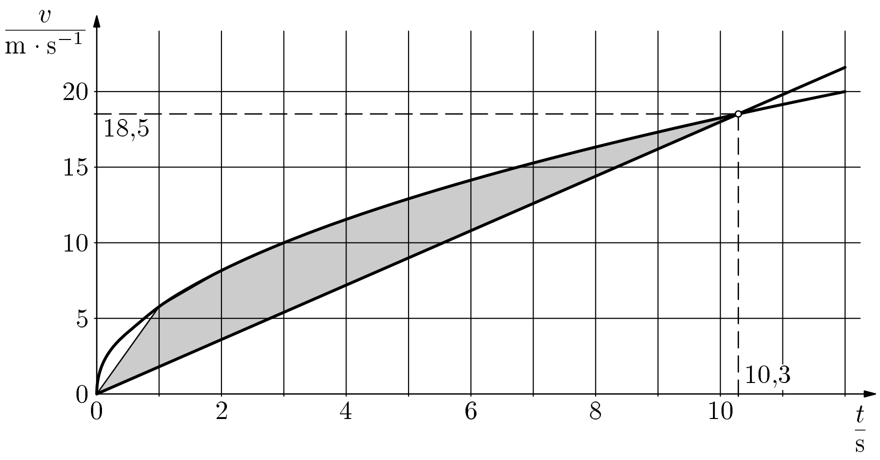
4 body

b) Rychlost prvního automobilu je přímo úměrná času, grafem je přímka procházející počátkem o rovnici $v = at$, číselně $\{v\} = 1{,}8\{t\}$. Rychlost druhého automobilu je dána rovnicí

$$v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}} = \sqrt{\frac{2P}{m}}\sqrt{t}, \quad \text{číselně} \quad \{v\} = 5{,}7735\sqrt{\{t\}}.$$

Grafem je parabola, k jejímu sestrojení sestavíme tabulku:

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{v}{\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$	0	5,8	8,2	10,0	11,5	12,9	14,1	15,3	16,3	17,3	18,3	19,1	20,0



4 body

c) Maximální vzdálenost mezi automobily je určena obsahem plochy mezi grafy. Obsah lze přibližně zjistit např. nahrazením úseků křivky úsečkami (viz graf – větší chyba vznikne na prvním úseku, na ostatních úsečka s křivkou prakticky splývá) nebo pomocí čtvercové sítě. Správná hodnota, ke které se máme přiblížit, je po zaokrouhlení na 3 platné číslice 31,8 m. **2 body**

Přesná hodnota v úloze c) je získána ze vzorce $s = \dfrac{2}{3}\dfrac{P^2}{m^2 a^3}$ *odvozeného integrálním počtem.*