Řešení praktické úlohy celostátního kola 49. ročníku FO

Vzorce použité při výpočtech

1. Statická měření

Měření deformací pružiny

$$\Delta y = y_1 - y_0\,, \qquad s(\Delta\overline{y}) = \frac{s(\Delta y)}{\sqrt{n}}\,,$$

Chyba při stanovení Δy je $\quad s'(\Delta\overline{y}) = \sqrt{(s(\Delta\overline{y}))^2 + (\Delta l)^2}\,.$

$$\Delta y = \Delta\overline{y} \pm s'(\Delta\overline{y})\,.$$

Analogicky postupujeme při výpočtu prodloužení $\Delta y_x = y_x - y_0$.

1.a Výpočet tuhosti pružiny

$$k = \frac{\Delta F_G}{\Delta y} = \frac{mg}{\Delta y}\,,$$

Relativní chyba při výpočtu tuhosti pružiny je

$$\delta(k) = \delta(\Delta y) = \frac{s'(\Delta\overline{y})}{\Delta\overline{y}}\,.$$

$$k = \frac{mg}{\Delta\overline{y}}\left(1 \pm \frac{s'(\Delta\overline{y})}{\Delta\overline{y}}\right).$$

1.b Výpočet hmotnosti tělíska

Z linearity deformace ($k =$ konst.) plyne

$$\frac{m_x}{m} = \frac{\Delta y_x}{\Delta y} \quad\Rightarrow\quad m_x = m\frac{\Delta y_x}{\Delta y_x}\,.$$

Relativní chyba při výpočtu hmotnosti tělíska je

$$\delta(m_x) = \sqrt{\delta(y_x)^2 + \delta(y)^2} = \sqrt{\left(\frac{s'(\Delta\overline{y_x})}{\Delta\overline{y_x}}\right)^2 + \left(\frac{s'(\Delta\overline{y})}{\Delta\overline{y}}\right)^2}\,.$$

$$m_x = m\frac{\Delta\overline{y_x}}{\Delta\overline{y}}\left[1 \pm \sqrt{\left(\frac{s'(\Delta\overline{y_x})}{\Delta\overline{y_x}}\right)^2 + \left(\frac{s'(\Delta\overline{y})}{\Delta\overline{y}}\right)^2}\,\right].$$

2. Dynamická měření

Měření period kmitů

$$T_1 = \overline{T_1} \pm s(\overline{T_1})\,, \qquad T_x = \overline{T_x} \pm s(\overline{T_x})\,.$$

2.a Vycházíme ze znalosti $k,\ m_0,\ T_x$

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k}{m_x + \frac{m_0}{3}}} \quad \Rightarrow \quad m_x + \frac{m_0}{3} = \frac{kT_x^2}{4\pi^2}\,.$$

Relativní chyba při výpočtu $m_x + \frac{m_0}{3}$ je

$$\delta(m_x + m_0/3) = \sqrt{\delta(k)^2 + (2\delta(T_x))^2} = \sqrt{\left(\frac{s(\overline{k})}{\overline{k}}\right)^2 + \left(\frac{2s(\overline{T_x})}{\overline{T_x}}\right)^2}\,.$$

$$m_x = \frac{\overline{kT_x}^2}{4\pi^2}\left[1 \pm \sqrt{\left(\frac{s(\overline{k})}{\overline{k}}\right)^2 + \left(\frac{2s(\overline{T_x})}{\overline{T_x}}\right)^2}\,\right] - \frac{m_0}{3}\,.$$

2.b Vycházíme ze znalosti $m_0,\ T_1,\ T_x$

$$\omega_x = \sqrt{\frac{k}{m_x + \frac{m_0}{3}}}\,, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_0}{3}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_x + \frac{m_0}{3}}{m + \frac{m_0}{3}} = \frac{T_x^2}{T_1^2}\,,$$

$$m_x + \frac{m_0}{3} = \left(m + \frac{m_0}{3}\right)\frac{T_x^2}{T_1^2}\,.$$

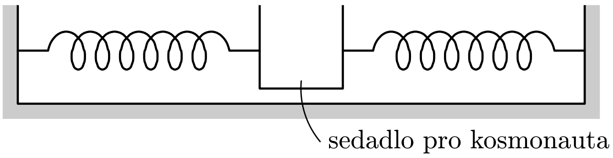
Relativní chyba při výpočtu $m_x + \frac{m_0}{3}$ je

$$\delta(m_x + m_0/3) = \sqrt{(2\delta(T_1))^2 + (2\delta(T_x))^2} = \sqrt{\left(\frac{2s(\overline{T_1})}{\overline{T_1}}\right)^2 + \left(\frac{2s(\overline{T_x})}{\overline{T_x}}\right)^2}\,.$$

$$m_x = \frac{\left(m + \frac{m_0}{3}\right)\overline{T_x}^2}{\overline{T_1}^2}\left[1 \pm \sqrt{\left(2\frac{s(\overline{T_1})}{\overline{T_1}}\right)^2 + \left(\frac{2s(\overline{T_x})}{\overline{T_x}}\right)^2}\,\right] - \frac{m_0}{3}\,.$$

3. Problémová úloha

Kosmonauti se musí vážit na setrvačných vahách konstruovaných např. podle následujícího obrázku. Obě pružiny musí být v rovnovážné poloze napnuté s dostatečným předpětím. Kosmonaut se při vážení na vahách rozkmitá; systém měří periodu kmitů, avšak výstup může být cejchován přímo v jednotkách kg.



sedadlo pro kosmonauta

Příloha – ukázka naměřených a vypočítaných hodnot

List 1

Řešitel č.	
Tělísko č.	

KONTROLA VÝPOČTŮ

1. Statická měření

Měření deformací pružiny

	Jedno závaží	Dvě závaží		Jedno závaží a tělísko	
	Výchozí poloha	Konečná poloha	Prodloužení	Konečná poloha	Prodloužení
	y_0 / mm	y_1 / mm	$\Delta y = y_1 - y_0$	y_x / mm	$\Delta y_x = y_x - y_0$
1	51	283	232	389	338
2	52	284	232	390	338
3	53	284	231	390	337
4	54	285	231	391	337
5	53	285	232	391	338

Výpočet chyby prodloužení Δy		**Výpočet chyby prodloužení Δy_x**	
Aritmetic. průměr / mm	231,6	Aritmetic. průměr / mm	337,6
Výběr. směrodat. odchylka jednoho měření / mm	0,548	Výběr. směrodat. odchylka jednoho měření / mm	0,548
Výběr. směrodat. odchylka aritmetic. průměru / mm	0,245	Výběr. směrodat. odchylka aritmetic. průměru / mm	0,245
Chyba měřidla / mm	0,5	Chyba měřidla / mm	0,5
Chyba Δy / mm	0,557	Chyba Δy_x / mm	0,557
$\Delta y =$ (231,6 ± 0,6) mm		$\Delta y_x =$ (337,6 ± 0,6) mm	

1.a Výpočet tuhosti pružiny		**1b. Výpočet hmotnosti m_x**	
Aritmet. průměr / N.m^{-1}	2,1179	Aritmet. průměr / g	72,884
Relativní chyba	0,002404	Relativní chyba	0,002915
$k =$ (2,118 ± 0,005) N.m-1		$m_x =$ (72,88 ± 0,21) g	

2. Dynamická měření

Měření period kmitů

	$10T_1$ / s	$10T_x$ / s
1	9,74	11,71
2	9,8	11,50
3	9,53	11,75
4	9,78	11,62
5	9,64	11,62
6	9,62	11,82
7	9,64	11,71
8	9,72	11,65
9	9,64	11,72
10	9,72	11,66

Výpočet chyby $10T_1$		**Výpočet chyby** $10T_x$	
Aritmetic. průměr /s	9,683	Aritmetic. průměr / s	11,676
Výběrová směrodat. odchylka jednoho měření / s	0,083	Výběrová směrodat. odchylka jednoho měření / s	0,087
Výběrová směrodat. odchylka aritmet. průměru / s	0,026	Výběrová směrodat. odchylka aritmet. průměru / s	0,028
T_1 = (0,9683 ± 0,0026) s		T_x = (1,1676 ± 0,0028) s	

2a. Vycházíme ze znalosti k, m_0, T_x
Výpočet $m_x + m_0/3$

Aritmetic. průměr / g	73,14	
Relativní chyba	0,00486	
$m_x + m_0/3$ = (73,14 ± 0,36) g		m_x = (72,7 ± 0,36) g

2b. Vycházíme ze znalosti m_0, T_1, T_x
Výpočet $m_x + m_0/3$

Aritmetic. průměr / g	73,34	
Relativní chyba	0,0072	
$m_x + m_0/3$ = (73,34 ± 0,53) g		m_x = (72,9 ± 0,53) g