## Řešení úloh 1. kola 50. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: M. Jarešová (1, 2, 3, 6), P. Šedivý (4, 6), J. Jírů (5, 7).

**1.** a) Jedná se o vrh šikmo vzhůru. Pro první střelu platí

$$T_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}, \qquad l_1 = v_0 T_1 \cos\alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Pro pohyb druhé střely můžeme psát

$$l_1 = v_0 t_2 \cos 2\alpha.$$

Porovnáním obou vztahů pro $l_1$ dostaneme

$$v_0 T_1 \cos\alpha = v_0 t_2 \cos 2\alpha.$$

Dále užijeme součtové vzorce $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, z nichž dostaneme $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$. Po dosazení tohoto vztahu do výše uvedené rovnice dostaneme

$$(2\cos^2\alpha - 1)t_2 - T_1 \cos\alpha = 0,$$

tj.

$$2t_2 \cos^2\alpha - T_1 \cos\alpha - t_2 = 0,$$

což je kvadratická rovnice. My budeme hledat její řešení pro $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Z tohoto důvodu bude mít význam pouze řešení

$$\cos\alpha = \frac{T_1 + \sqrt{T_1^2 + 8t_2^2}}{4t_2}. \tag{1}$$

Po dosazení za $t_2 = 1{,}20\,T_1$ dostaneme $\cos\alpha = 0{,}9455$, z čehož $\alpha = 19{,}0^\circ$.
Pro další výpočty za použití součtových vzorců a vztahů na jednotkové kružnici pak můžeme psát

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = 0{,}3256,$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}6158,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0{,}7879.$$

Ze vztahu $T_1 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$, pak můžeme vyjádřit rychlost $v_0$

$$v_0 = \frac{gT_1}{2\sin\alpha} = 1{,}5354\,gT_1.$$

**4 body**

b) Doba $T_2$, za kterou dopadne druhá střela, je dána vztahem

$$T_2 = \frac{2v_0 \sin 2\alpha}{g} = \frac{4v_0 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = 2T_1 \cos\alpha.$$

Po dosazení za $\cos\alpha$ dostaneme $T_2 = 1{,}891\, T_1$.

**2 body**

c) Dolety obou střel jsou dány vztahy

$$l_1 = v_0 T_1 \cos\alpha = 1{,}5354 \cdot 0{,}9455 g T_1^2 = 1{,}45\, g T_1^2,$$

$$l_2 = v_0 T_2 \cos 2\alpha = 1{,}5354\, g T_1 \cdot 1{,}891 T_1 \cdot 0{,}7879 = 2{,}29\, g T_1^2.$$

**3 body**

d) Maximální dolet $l_{\max}$ nastává pro úhel $\alpha = 45^\circ$ a je dán vztahem

$$l_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2 \cdot 45^\circ) = \frac{1{,}5354^2 g^2 T_1^2}{g} = 2{,}36\, g T_1^2.$$

**1 bod**

**2.** a) Označíme $V_1$ část objemu koule ponořené v kapalině hustoty $\varrho_1$, $V_2$ část objemu koule ponořené v kapalině hustoty $\varrho_2$, $R$ poloměr koule a $\varrho_\mathrm{k}$ hustotu materiálu koule. Objem $V_1$ spodní části koule určíme jako objem kulové úseče, tj.

$$V_1 = \frac{\pi v}{6}(3\varrho^2 + v^2)\,,$$

kam dosadíme $\varrho = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}R^2}$, $v = \frac{R}{2}$.

Po dosazení

$$V_1 = \frac{\pi\frac{R}{2}}{6}\left[3 \cdot \frac{3}{4}R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2\right] = \frac{5}{24}\pi R^3.$$

Objem $V_2$ pak určíme pomocí objemu celé koule a objemu $V_1$, tj.

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{5}{24}\pi R^3 = \frac{9}{8}\pi R^3.$$

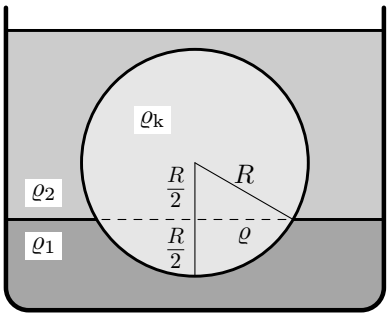
Z rovnosti sil $F_{\mathrm{vz}1} + F_{\mathrm{vz}2} = F_\mathrm{G}$ pak užitím Archimedova zákona dostaneme

$$\frac{5}{24}\pi R^3 \varrho_1 g + \frac{9}{8}\pi R^3 \varrho_2 g = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_\mathrm{k} g.$$

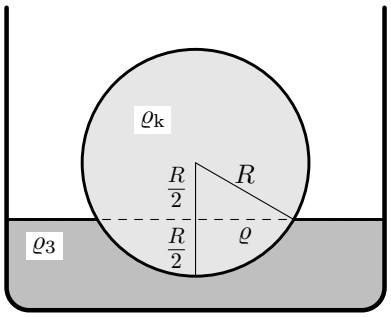
Z tohoto vztahu po úpravě pak můžeme vyjádřit $\varrho_\mathrm{k}$, tj.

$$\varrho_k = \frac{5\varrho_1 + 27\varrho_2}{32}\,.$$

**6 bodů**




Obr. R1




Obr. R2

b) Označíme $V_1$ část objemu koule ponořeného v kapalině hustoty $\varrho_3$. Podle úlohy a) velikost objemu

$$V_1 = \frac{5}{24}\pi R^3.$$

Z rovnosti vztlakové a tíhové síly a užitím Archimedova zákona dostaneme

$$\frac{5}{24}\pi R^3 \varrho_3 g = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_\mathrm{k} g.$$

Po úpravě dostaneme $\varrho_3 = \frac{32}{5}\varrho_\mathrm{k}$. Po dosazení za $\varrho_\mathrm{k}$ z úlohy a) a úpravě je

$$\varrho_3 = \varrho_1 + \frac{27}{5}\varrho_2 = \varrho_1 + 5{,}4\varrho_2.$$

**4 body**

**3.** a) Před zasunutím slídové desky má kondenzátor kapacitu $C_0 = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}1}\varepsilon_0 ab}{d}$, kde $\varepsilon_{\mathrm{r}1}$ je relativní permitivita vzduchu. Po připojení ke zdroji napětí na něj přejde náboj $Q_0 = C_0 U$ a kondenzátor získá energii

$$E_0 = \frac{1}{2}C_0 U^2 = \frac{1}{2}UQ_0.$$

Zasuneme-li slídovou desku do výšky $x$, změní se kapacita kondenzátoru na

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}1}\varepsilon_0 b(a-x)}{d} + \frac{\varepsilon_{\mathrm{r}2}\varepsilon_0 bx}{d} = \frac{\varepsilon_0 b}{d}\left[\varepsilon_{\mathrm{r}1}a + (\varepsilon_{\mathrm{r}2} - \varepsilon_{\mathrm{r}1})x\right],$$

což lze přepsat do tvaru

$$C = C_0 + \Delta C = C_0 + \frac{\varepsilon_0 b}{d}(\varepsilon_{\mathrm{r}2} - \varepsilon_{\mathrm{r}1})x.$$

Náboj na kondenzátoru se zvětší o $\Delta Q = \Delta C{\cdot}U$ a zdroj přitom vykoná elektrickou práci $W_\mathrm{z} = U \cdot \Delta Q = \Delta C \cdot U^2$. Energie kondenzátoru se ale zvýší jen o $\Delta E = \frac{1}{2}\Delta C{\cdot}U^2 = \frac{1}{2}W_\mathrm{z}$. Zbývající energie se spotřebuje na práci spojenou s vtažením desky z dielektrika mezi desky kondenzátoru:

$$W = W_{\mathrm{z}} - \Delta E = \frac{1}{2}W_{\mathrm{z}} = \frac{1}{2}\Delta Q \cdot U = \frac{1}{2}\Delta C U^2 = \frac{\varepsilon_0 b}{2d}(\varepsilon_{\mathrm{r}2} - \varepsilon_{\mathrm{r}1})U^2 x\,.$$

Vykonaná práce je přímo úměrná $x$. Síla působící na slídovou desku je tedy konstantní a pro výpočet její velikosti lze použít vztah

$$W = Fx \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 b}{d}(\varepsilon_{\mathrm{r}2} - \varepsilon_{\mathrm{r}1})U^2.$$

**4 body**

b) Při řešení této části úlohy využijeme výsledku úlohy a). Síla $F$ musí být v rovnováze s tíhovou silou $F_G$, tj.

$$\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 b}{d}(\varepsilon_{\mathrm{r}3} - \varepsilon_{\mathrm{r}1})U^2 = hdb\varrho g,$$

z čehož

$$h = \frac{\varepsilon_0}{2d^2}(\varepsilon_{\mathrm{r}3} - \varepsilon_{\mathrm{r}1})\frac{1}{\varrho g}U^2.$$

Pro dané hodnoty je $h = 6{,}7$ mm. **2 body**

c) Nejprve určíme hodnotu kapacity kondenzátoru z úlohy b) s užitím výsledku úlohy a). Dostaneme

$$C = C_0 + \frac{\varepsilon_0 b}{d}(\varepsilon_{\mathrm{r}3} - \varepsilon_{\mathrm{r}1})h\,,$$

po dosazení za $h$ z úlohy b) a úpravě je

$$C = C_0 + \frac{\varepsilon_0^2 b}{2d^3}(\varepsilon_{\mathrm{r}3} - \varepsilon_{\mathrm{r}1})^2\frac{1}{\varrho g}U^2.$$

**2 body**

d) Má-li glycerin vystoupit až do výšky horních hran desek kondenzátoru, musí být $h = a$. Na základě úvahy v úloze b) o silách můžeme psát

$$\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 b}{d}(\varepsilon_{\mathrm{r}3} - \varepsilon_{\mathrm{r}1})U_{\mathrm{a}}^2 = abd\varrho g\,,$$

z čehož

$$U_{\mathrm{a}} = \sqrt{\frac{2a\varrho g}{\varepsilon_0(\varepsilon_{\mathrm{r}3} - \varepsilon_{\mathrm{r}1})}}d.$$

Pro dané hodnoty je $U_{\mathrm{a}} = 3{,}5$ kV. **2 body**

**4.** Celý děj se skládá z jednoho volného pádu a řady svislých vrhů vzhůru. Označme:

| | | |
|---|---|---|
| $\tau_0$ | ... | doba volného pádu, |
| $\tau_i$ | ... | doba výstupu a pádu po $i$-tém odrazu, |
| $v_0$ | ... | rychlost dopadu při volném pádu, |
| $v_i$ | ... | rychlost na počátku a na konci $i$-tého vrhu, |
| $h_0$ | ... | počáteční výška kuličky, |
| $h_i$ | ... | výška $i$-tého vrhu, |
| $t_i$ | ... | doba od počátku děje do $i$-tého odrazu, |
| $t_i^\star$ | ... | doba od počátku děje do $i$-tého výstupu. |

a) Můžeme-li zanedbat odpor vzduchu, platí

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\,, \qquad v_0 = \sqrt{2gh_0}\,, \qquad v_1 = kv_0\,, \qquad h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = k^2 h_0\,,$$

$$v_i = k^i v_0\,, \qquad h_i = \frac{v_i^2}{2g} = k^{2\mathrm{i}} h_0\,,$$

$$\tau_1 = \frac{2v_1}{g} = 2k\tau_0\,, \qquad \tau_i = \frac{2v_i}{g} = 2k^i\tau_0\,.$$

Celkovou dobu pohybu můžeme vyjádřit pomocí součtu nekonečné geometrické řady:

$$t = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \,\cdots\, = \tau_0\left[-1 + 2\left(1 + k + k^2 + \,\cdots\right)\right] = \tau_0\left(-1 + \frac{2}{1-k}\right)\,,$$

$$t = \tau_0\frac{1+k}{1-k}\,, \qquad\qquad k = \frac{t-\tau_0}{t+\tau_0}\,.$$

Pro dané hodnoty $\tau_0 = 0,452$ s, $k = 0,893$.

**3 body**

b) Při každém odrazu se zmenší mechanická energie kuličky v poměru

$$E_i : E_{\mathrm{i}+1} = \frac{1}{2}mv_i^2 : \frac{1}{2}mv_{\mathrm{i}+1}^2 = 1 : k^2\,.$$

Relativní změna energie je

$$\frac{E_{\mathrm{i}+1} - E_i}{E_i} = k^2 - 1 = -0,202 = -20,2\,\%\,.$$

**2 body**

c) Také celkovou dráhu kuličky $s$ určíme užitím součtu nekonečné geometrické řady:

$$s = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + \,\cdots\, = h_0\left[-1 + 2\left(1 + k^2 + k^4 + \,\cdots\right)\right]\,,$$

$$s = h_0\left(-1 + \frac{2}{1-k^2}\right) = h_0\frac{1+k^2}{1-k^2}\,.$$

Pro dané hodnoty $s = 8,9$ m. **2 body**

d) Dobu $t_i$ od počátku děje do $i$-tého odrazu určíme užitím vztahu pro výpočet součtu prvních $i$ členů geometrické posloupnosti:

$$t_i = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \,\cdots\, + \tau_{\mathrm{i}-1} = \tau_0\left[-1 + 2\left(1 + k + k^2 + \,\cdots\, + k^{\mathrm{i}-1}\right)\right]\,,$$

$$t_i = \tau_0\left(-1 + 2\frac{k^i - 1}{k-1}\right) = \tau_0\frac{2k^i - k - 1}{k-1}\,.$$

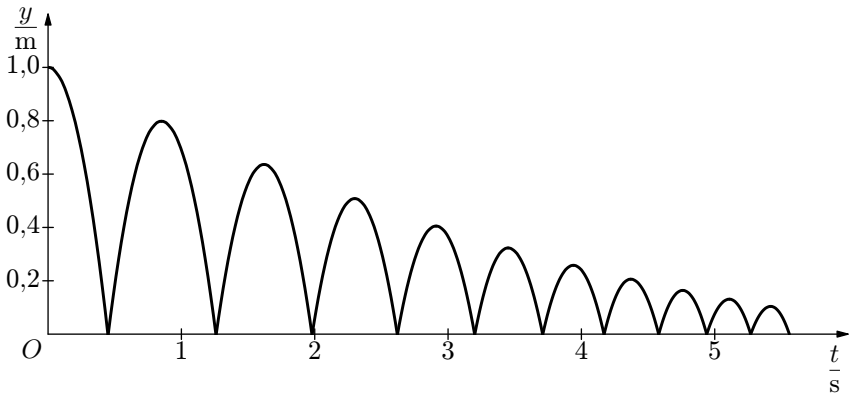
Dobu $t_i^\star$ od počátku děje do $i$-tého výstupu určíme pomocí vztahu

$$t_i^\star = t_i + \frac{\tau_i}{2} = t_i + \tau_0 k^i.$$

Výsledky výpočtů pro dané hodnoty jsou v následující tabulce; graf závislosti okamžité výšky kuličky na čase je na obr. R3.

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t_i$/s | 0,45 | 1,26 | 1,98 | 2,62 | 3,20 | 3,71 | 4,17 | 4,58 | 4,94 | 5,27 | 5,56 |
| $t_i^\star$/s | 0,85 | 1,62 | 2,30 | 2,91 | 3,45 | 3,94 | 4,37 | 4,76 | 5,11 | 5,42 | 5,69 |
| $h_i$/mm | 798 | 636 | 508 | 405 | 323 | 258 | 206 | 164 | 131 | 104 | 83 |

**3 body**




Obr. R3

**5.** a) Označme $R_1$ odpor žárovky. Podle Ohmova zákona platí vztah

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_\mathrm{e} - U_1}{R}\,. \tag{1}$$

Dále odpor žárovky splňuje rovnici

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1} \qquad \Rightarrow \qquad R_1 = \frac{U_1^2}{P_1} \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) plyne $R = \dfrac{U_1(U_\mathrm{e} - U_1)}{P_1}$.

Úloha má řešení za předpokladu $R < R_0$.

Účinnost obvodu je $\eta = \dfrac{U_1}{U_\mathrm{e}}$.

Číselně dostaneme $R = 6{,}0\ \Omega,\ \eta = \dfrac{1}{3}$.

**4 body**

b) Obdobně podle Ohmova zákona platí

$$\frac{U_1}{\dfrac{RR_1}{R+R_1}} = \frac{U_\mathrm{e} - U_1}{R_0 - R}\,.$$

Úpravou dostaneme kvadratickou rovnici

$$U_1 R^2 + (U_\mathrm{e} R_1 - U_1 R_0) R - U_1 R_1 R_0 = 0\,.$$

Z jejich dvou kořenů má fyzikální význam

$$R = \frac{U_1 R_0 - U_\mathrm{e} R_1 + \sqrt{U_1^2 R_0^2 + U_\mathrm{e}^2 R_1^2 + 2U_1 R_1 R_0 (2U_1 - U_\mathrm{e})}}{2U_1}\,.$$

Dosazením za $R_1$ z rovnice (2) a úpravou dostaneme

$$R = \frac{1}{2}\left[R_0 - \frac{U_\mathrm{e} U_1}{P_1} + \sqrt{R_0^2 + \frac{U_\mathrm{e}^2 U_1^2}{P_1^2} + \frac{2U_1(2U_1 - U_\mathrm{e})}{P_1} R_0}\right]\,. \tag{3}$$

**4 body**

Účinnost obvodu je

$$\eta = \frac{P_1}{\dfrac{U_\mathrm{e}^2}{R_0 - R + \dfrac{R R_1}{R + R_1}}}\,.$$

Dosazením za $R_1$ z rovnice (2) a úpravou dostaneme

$$\eta = \frac{P_1}{U_\mathrm{e}^2}\left(R_0 - \frac{P_1 R^2}{P_1 R + U_1^2}\right)\,.$$

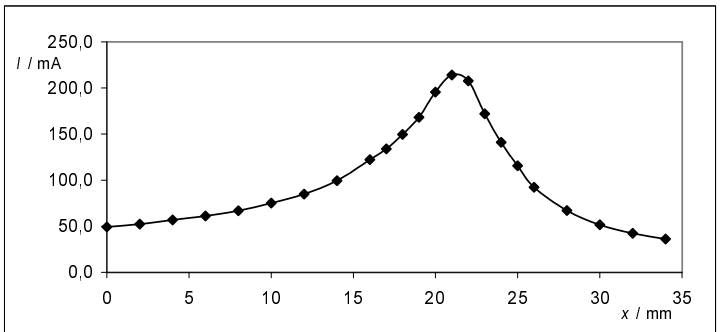
kde $R$ je dáno rovnicí (3).

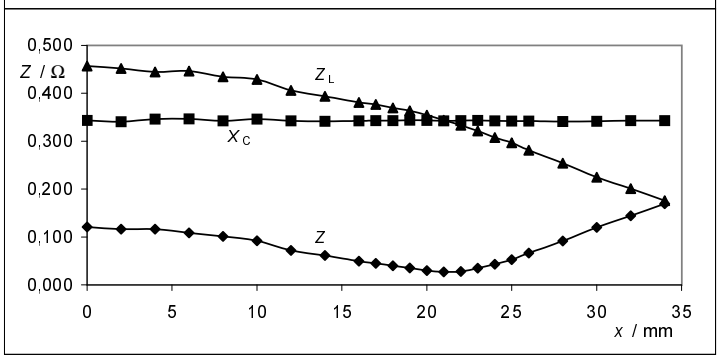
Číselně dostaneme $R = 15\ \Omega,\ \eta = \dfrac{5}{18}$.

**2 body**

**6.** Ukázka výsledků měření je v následující tabulce a grafech. K rezonanci došlo pro $x = 21$ mm. Rezonanční impedance byla $Z_\mathrm{min} = R = 27\ \Omega$, tedy asi 2,2krát větší než stejnosměrný odpor vinutí $R_\mathrm{ss} = 12{,}1\ \Omega$. Impedance samotné cívky při rezonanci měla hodnotu $Z_{LR} = 344\ \Omega$. Kapacitní reaktance kondenzátoru se během měření neměnila; průměr změřených hodnot je $X_C = 343\ \Omega$. Z toho vypočítáme skutečnou kapacitu kondenzátoru $C = 9{,}28\ \mu$F. Výpočet indukčnosti cívky při rezonanci pomocí vztahů (2) a (3) vede ke stejnému výsledku $L = 1{,}09$ H.

| x / mm | I / mA | U / V | $U_C$ / V | $U_{LR}$ / V | Z / Ω | $X_C$ / Ω | $Z_{LR}$ / Ω |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 49,3 | 5,97 | 16,92 | 22,53 | 0,121 | 0,343 | 0,457 |
| 2 | 52,4 | 6,10 | 17,86 | 23,69 | 0,116 | 0,341 | 0,452 |
| 4 | 56,8 | 6,17 | 18,14 | 23,30 | 0,116 | 0,346 | 0,445 |
| 6 | 61,1 | 6,17 | 19,70 | 25,37 | 0,109 | 0,347 | 0,447 |
| 8 | 66,9 | 6,17 | 20,94 | 26,54 | 0,101 | 0,343 | 0,434 |
| 10 | 75,1 | 6,13 | 23,16 | 28,70 | 0,092 | 0,346 | 0,429 |
| 12 | 84,9 | 6,11 | 29,08 | 34,50 | 0,072 | 0,343 | 0,406 |
| 14 | 99,4 | 6,09 | 33,97 | 39,16 | 0,061 | 0,342 | 0,394 |
| 16 | 122,2 | 6,05 | 41,88 | 46,58 | 0,050 | 0,343 | 0,381 |
| 17 | 133,9 | 6,03 | 45,90 | 50,43 | 0,045 | 0,343 | 0,377 |
| 18 | 149,6 | 5,98 | 51,30 | 55,29 | 0,040 | 0,343 | 0,370 |
| 19 | 168,1 | 5,92 | 57,83 | 61,14 | 0,035 | 0,344 | 0,364 |
| 20 | 195,6 | 5,84 | 67,15 | 69,28 | 0,030 | 0,343 | 0,354 |
| 21 | 214,1 | 5,80 | 73,32 | 73,67 | 0,027 | 0,342 | 0,344 |
| 22 | 207,6 | 5,83 | 71,15 | 69,23 | 0,028 | 0,343 | 0,333 |
| 23 | 172,0 | 5,96 | 59,06 | 55,29 | 0,035 | 0,343 | 0,321 |
| 24 | 141,0 | 6,05 | 48,30 | 43,37 | 0,043 | 0,343 | 0,308 |
| 25 | 115,7 | 6,09 | 39,56 | 34,35 | 0,053 | 0,342 | 0,297 |
| 26 | 92,3 | 6,13 | 31,57 | 25,94 | 0,066 | 0,342 | 0,281 |
| 28 | 67,1 | 6,16 | 22,90 | 17,05 | 0,092 | 0,341 | 0,254 |
| 30 | 51,5 | 6,18 | 17,58 | 11,58 | 0,120 | 0,341 | 0,225 |
| 32 | 42,3 | 6,10 | 14,50 | 8,50 | 0,144 | 0,343 | 0,201 |
| 34 | 36,2 | 6,13 | 12,42 | 6,36 | 0,169 | 0,343 | 0,176 |
| | | | | | Průměr | 0,343 | |



**7.** a) Podle ZZE pružina zmenší svoji potenciální energii pružnosti vykonáním práce při posunutí kvádru:

$$\frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 = fmg(x_1 - x_2)\,.$$

Z rovnice plyne $\quad f = \dfrac{k(x_1 + x_2)}{2mg} = 0{,}33\,.$

**3 body**

b) Souřadnice výsledné síly působící na kvádr splňuje rovnici

$$F_x = -kx + fmg\,.$$

Výsledná síla je nulová pro $\quad x = x_0 = \dfrac{fmg}{k}\,.$

Posuneme-li počátek osy do bodu o souřadnici $x_0$ a provedeme transformaci $x = x_0 + x'$, bude souřadnice výsledné síly splňovat rovnici

$$F_{x'} = -kx'\,,$$

což je podmínka harmonického pohybu s úhlovou frekvencí $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. Tedy uvedený pohyb kvádru představuje polovinu harmonického kmitu mezi krajními body o souřadnicích $x_1$ a $x_2$ přes rovnovážnou polohu o souřadnici

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}\,.$$

Velikost maximální výchylky tohoto pohybu je $x_\mathrm{m} = \dfrac{x_1 - x_2}{2}$

a velikost maximální rychlosti $v_\mathrm{max} = \omega x_\mathrm{m} = \dfrac{x_1 - x_2}{2}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 0{,}27\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$

**5 bodů**

*Jiné řešení:* Rychlost kvádru je největší při průchodu rovnovážnou polohou. Ze zákona zachování energie plyne

$$\frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}mv_\mathrm{max}^2 + fmg(x_1 - x_0) =$$
$$\frac{1}{2}k\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + \frac{1}{2}mv_\mathrm{max}^2 + \frac{k(x_1 + x_2)}{2}\cdot\frac{x_1 - x_2}{2}\,.$$

Z toho

$$v_\mathrm{max}^2 = \frac{x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2}{4}\cdot\frac{k}{m}\,, \qquad v_\mathrm{max} = \frac{x_1 - x_2}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

c) Doba pohybu je rovna polovině periody uvažovaného harmonického pohybu:

$$t = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}41\ \mathrm{s}\,.$$ **2 body**