## Řešení úloh krajského kola 50. ročníku fyzikální olympiády

*Kategorie C*

Autorka úloh: M. Jarešová.

**1.** a) Úroveň hladiny vody se nezmění, protože tíha ledu je v rovnováze se vztlakovou silou, která se rovná tíze vody vytlačené ledem. Když led roztaje, přemění se na vodu o stejném objemu, jaký měla voda, kterou před tím vytlačoval.

**2 body**

b) Označme $V_1 = a^3$ objem větší krychle, $V_2 = b^3$ objem ocelové krychličky. Protože $(V_1 - V_2)\varrho_1 + V_2\varrho_3 = 1{,}42 \cdot 10^{-2}$ kg $> \varrho_2 V_1 = 8{,}0 \cdot 10^{-3}$ kg, krychle se celá potopí. Označme $V_4$ objem vody, která vznikne potom, co všechen led roztaje. Platí

$$\varrho_1(V_1 - V_2) = \varrho_2 V_4, \qquad V_4 = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}(V_1 - V_2).$$

Protože $\varrho_3 > \varrho_2$, zůstane po roztátí ledu ocelová krychlička potopená pod vodou. Změna objemu ve válci tedy bude po roztátí ledu rovna

$$\Delta V = V_4 - (V_1 - V_2) = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} - 1\right)(V_1 - V_2).$$

Pokles hladiny

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = -\frac{4\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)(a^3 - b^3)}{\pi d^2}.$$

Pro dané hodnoty je $\Delta h = -0{,}30$ mm. Hladina vody ve válci tedy poklesne o 0,30 mm.

**4 body**

c) Pokud místo ocelové krychličky necháme v ledové krychli zamrznout dřevěnou téhož objemu, jaký měla krychlička ocelová, bude krychle plavat na vodě. Označme $V_3$ objem ponořené části krychle a $V_4$ objem vody vzniklé při roztátí ledu. Tíha ledové krychle s dřevěnou krychličkou pak bude v rovnováze se vztlakovou silou, tj.

$$\varrho_1(V_1 - V_2)g + \varrho_4 V_2 g = \varrho_2 V_3 g,$$
$$\varrho_1(V_1 - V_2) = \varrho_2 V_4.$$

Z toho

$$V_3 = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}(V_1 - V_2) + \frac{\varrho_4}{\varrho_2}V_2\,, \qquad V_4 = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}(V_1 - V_2)\,.$$

Protože $\varrho_4 < \varrho_1$, je třeba uvážit, že po roztátí ledu bude dřevěná krychlička plavat na vodě. Určíme, jaká část objemu $V_5$ krychličky ze dřeva bude ponořena ve vodě. Platí

$$\varrho_4 V_2 = \varrho_2 V_5,$$

z čehož

$$V_5 = \frac{\varrho_4}{\varrho_2} V_2.$$

Změna objemu ve válci tedy po roztátí ledu bude

$$\Delta V' = V_4 - V_3 + V_5 = -\frac{\varrho_4}{\varrho_2} V_2 + \frac{\varrho_4}{\varrho_2} V_2 = 0.$$

Hladina vody ve válci se tedy nezmění.

**4 body**

**2.** a) Nejprve pomocí zákona zachování mechanické energie určíme velikost rychlosti $v_1$ kuličky o hmotnosti $m_1$, se kterou dopadne na krychličku o hmotnosti $m_2$. Dostaneme

$$v_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)}.$$

Dále napíšeme zákon zachování hybnosti a mechanické energie pro okamžik srážky. Označíme $u_1$ souřadnici rychlosti kuličky o hmotnosti $m_1$ po srážce, $u_2$ souřadnici rychlosti krychličky o hmotnosti $m_2$ po srážce. Platí

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2. \end{aligned}$$

Po dosazení za $m_2 = k m_1$ a úpravě dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 + k u_2, \\ v_1^2 &= u_1^2 + k u_2^2. \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $u_1 = v_1 - k u_2$ a dosadíme do druhé. Dostaneme kvadratickou rovnici

$$k^2 u_2^2 + k u_2^2 - 2 k v_1 u_2 = 0,$$

z níž pro nás má význam pouze řešení $u_2 = \dfrac{2v_1}{1+k}$, potom $u_1 = \dfrac{1-k}{1+k} v_1$.

Pro dané hodnoty je $v_1 = 1{,}15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $u_1 = -\dfrac{2}{3} v_1 = -0{,}76\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $u_2 = 0{,}38\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

**4 body**

b) Pro velikost rychlosti dopadu $v_1$ platí z úlohy a) vztah $v_1^2 = 2gl(1 - \cos\alpha)$, z čehož $\cos\alpha = 1 - \dfrac{v_1^2}{2gl}$. Analogicky po odrazu platí

$$\cos\beta = 1 - \frac{u_1^2}{2gl}.$$

Po dosazení za $u_1$ z části a) dostaneme

$$\cos\beta = 1 - \frac{(1-k)^2 v_1^2}{2gl(1+k)^2}.$$

Nakonec po dosazení za $v_1^2$ dostaneme po úpravě

$$\cos\beta = \frac{4k}{(1+k)^2} + \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 \cos\alpha.$$

Pro dané hodnoty je $\cos\beta = 0{,}94$, z čehož $\beta = 20°$.

**4 body**

c) Krychlička o hmotnosti $m_2$ doletí do vodorovné vzdálenosti $d$ od místa srážky. V tomto případě jde o vrh vodorovný a platí

$$d = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot u_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot \frac{2v_1}{1+k} = \frac{4}{1+k}\sqrt{Hl(1-\cos\alpha)}.$$

Pro dané hodnoty: $d = 0{,}15$ m.

**2 body**

**3.** a) Ze vztahu $m\frac{4\pi^2}{T^2}r = \varkappa\frac{mM}{r^2}$ vyjádříme neznámou $r$ (obr. R1), dostaneme $r = \sqrt[3]{\frac{T^2\varkappa M}{4\pi^2}}$. Protože zároveň také $r = R_\mathrm{z} + h$, můžeme oba vztahy pro $r$ porovnat a vyjádřit $h$. Dostaneme

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2\varkappa M}{4\pi^2}} - R_\mathrm{z} = 20\,200\ \mathrm{km}.$$

**3 body**

b) Vztah pro $r$ z úlohy a) dosadíme do vztahu pro $F_\mathrm{g}$ a upravíme. Obdržíme

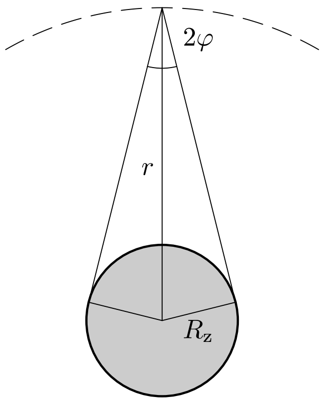
$$F_\mathrm{g} = \varkappa\frac{mM}{r^2} = \sqrt[3]{\frac{16\pi^4\varkappa M}{T^4}}m = 1020\ \mathrm{N}.$$

Velikost rychlosti $v$ pak určíme pomocí vztahu

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt[3]{\frac{2\pi\varkappa M}{T}} = 3{,}9\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

**4 body**

c) Dle obr. R1 můžeme psát




Obr. R1

$$\sin\varphi = \frac{R_\mathrm{z}}{r},.$$

Po dosazení za $r$ z úlohy a) dostaneme

$$\sin\varphi = \frac{R_\mathrm{z}}{\sqrt[3]{\frac{T^2\varkappa M}{4\pi^2}}},$$

z čehož $\varphi = 14°$. Potom zorný úhel ze satelitu je $2\varphi = 28°$. Největší vzdálenost bodů je $s = (\pi - 2\varphi)\cdot R_\mathrm{z}$, kde je za úhel $\varphi$ nutno v tomto případě dosadit v radiánech. Pro dané hodnoty je $s = 16\,900$ km.

**3 body**

**4.** a) Stěna má plochu o obsahu $S_1 = (4 \cdot 2{,}8 - 0{,}6 \cdot 1{,}2)\ \mathrm{m}^2 = 10{,}48\ \mathrm{m}^2$, obsah plochy okna je $S_2 = 0{,}6 \cdot 1{,}2\ \mathrm{m}^2 = 0{,}72\ \mathrm{m}^2$. Sledovaná doba $\tau = 24\ \mathrm{hod} = 86\,400\ \mathrm{s}$; teploty $t_1 = 22\ {}^\circ\mathrm{C}$, $t_2 = -5\ {}^\circ\mathrm{C}$.

Únik tepla stěnou:

$$Q_{1a} = Q_{\tau a} \cdot \tau = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{1}{\alpha}} S_1 \tau = 34\ \mathrm{MJ}.$$

Únik tepla oknem: $Q_{2a} = \dfrac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha}} S_2 \tau = 16\ \mathrm{MJ}.$

Celkový únik tepla za den

$$Q_a = Q_{1a} + Q_{2a} = 50\ \mathrm{MJ}.$$

Minimální výkon topení:

$$P_a = Q_{\tau a} = \frac{Q_a}{\tau} = 580\ \mathrm{W}.$$

**5 bodů**

b) Po zateplení.

Únik tepla stěnou:

$$Q_{1b} = Q_{\tau b} \cdot \tau = \frac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_4}{\lambda_4} + \frac{1}{\alpha}} S_1 \tau = 28\ \mathrm{MJ}.$$

Únik tepla oknem: $Q_{2b} = \dfrac{t_1 - t_2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha}} S_2 \tau = 8\ \mathrm{MJ}.$

Celkový únik tepla za den

$$Q_b = Q_{1b} + Q_{2b} = 36\ \mathrm{MJ}.$$

Minimální výkon topení:

$$P_b = Q_{\tau b} = \frac{Q_b}{\tau} = 415\ \mathrm{W}.$$

Dále vypočteme poměr:

$$\frac{P_b}{P_a} = \frac{415\ \mathrm{W}}{580\ \mathrm{W}} = 0{,}72.$$

Tepelné ztráty klesly o 28%.

**5 bodů**