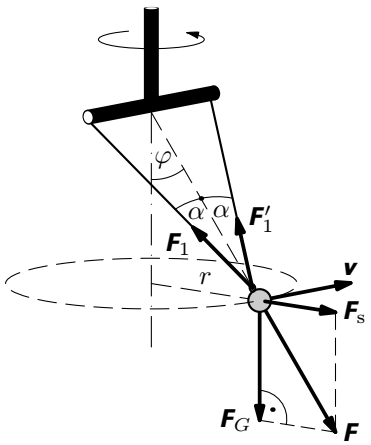
**Řešení úloh celostátního kola 52. ročníku fyzikální olympiády.**

Autoři úloh: J. Thomas (1), J. Jírů (2), P. Šedivý (4).

3. úloha je převzata z časopisu Kvant. Konečná úprava P. Šedivý

**1.** Úlohy a) a b) budeme řešit z hlediska pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě spojené s rotujícím závěsem, úlohu c) z hlediska pozorovatele v inerciální vztažné soustavě spojené s místností. Vyjdeme z obr. R1.




Obr. R1

a) Výslednice tíhové síly a setrvačné odstředivé síly, které působí na kuličku, leží v rovině vychýleného závěsu. Platí

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{F_\mathrm{s}}{F_G} = \frac{m4\pi^2 f^2 r}{mg} = \frac{4\pi^2 f^2 l \sin\varphi}{g} \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{g}{4\pi^2 f^2 l}. \tag{1}$$

Protože $\cos\varphi \leq 1$, může situace podle obr. R2 nastat až pro

$$f > f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = 0{,}91 \text{ Hz}.$$

**4 body**

b) Výslednice tíhové síly a setrvačné odstředivé síly je v rovnováze se silami, kterými na kuličku působí obě poloviny bifilárního závěsu. Z obr. R1 plyne

$$F = \frac{F_G}{\cos\varphi} = 2F_1 \cos\alpha.$$

V okamžiku přetržení bylo vlákno napínáno silou

$$F_1 = F_1' = \frac{mg}{2\cos\varphi_1 \cos\alpha} = 1{,}26 \text{ N}.$$

**2 body**

c) Podle (1) se v okamžiku přetržení závěsu držák otáčel s frekvencí

$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\varphi_1}}.$$

Okamžitá rychlost kuličky měla velikost $v_1 = 2\pi f_1 l \sin\varphi_1 = \sin\varphi_1\sqrt{\frac{gl}{\cos\varphi_1}}$.

Následoval vodorovný vrh z výšky $H + l(1-\cos\varphi_1)$ ve směru tečny k trajektorii. Délka vrhu byla

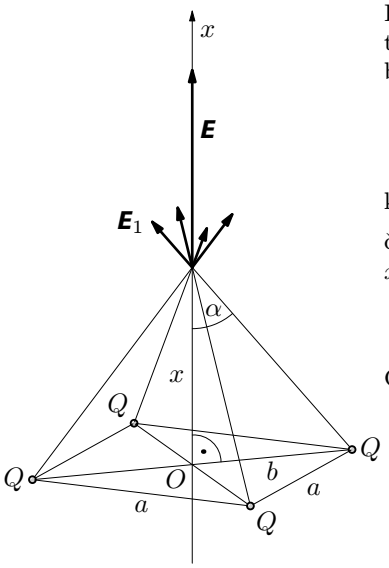
$$L = v_1\sqrt{\frac{2[H+l(1-\cos\varphi_1)]}{g}} = \sin\varphi_1\sqrt{\frac{2l[H+l(1-\cos\varphi_1)]}{\cos\varphi_1}} = 1{,}17 \text{ m}.$$

Vzdálenost $d$ místa dopadu od osy otáčení vypočítáme užitím Pythagorovy věty:

$$d = \sqrt{L^2 + (l\sin\varphi_1)^2} = l\sin\varphi_1\sqrt{\frac{2(H+l)}{l\cos\varphi_1} - 1} = 1{,}20 \text{ m}.$$

**4 body**

**2.** a)




Obr. R2

Předpokládejme pro jednoduchost $Q > 0$. Intenzita elektrického pole každého ze čtyř nábojů má v bodě o souřadnici $x$ velikost

$$E_1 = \frac{kQ}{x^2 + b^2},$$

kde $b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ je polovina délky úhlopříčky čtverce (obr. R2). Průmět intenzity $\boldsymbol{E}_1$ do osy $x$ má velikost

$$E_{1x} = E_1 \cos\alpha = E_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}}.$$

Celková velikost intenzity je

$$E = 4E_{1x} = \frac{4kQ}{x^2 + b^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \\ = \frac{4kQx}{(x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (1)$$

Derivace velikosti intenzity podle souřadnice $x$ je

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 4kQ \frac{(x^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} - x\frac{3}{2}(x^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2 + b^2)^{\frac{6}{2}}} = 4kQ \frac{b^2 - 2x^2}{(x^2 + b^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Z podmínky nulové derivace plyne

$$x_\mathrm{m} = \frac{\sqrt{2}}{2}b = \frac{a}{2}. \qquad (2)$$

Pro $x < x_\mathrm{m}$ je derivace kladná a funkce je tedy rostoucí, pro $x > x_\mathrm{m}$ je derivace záporná a funkce je klesající, proto je nalezený extrém maximem. (Tuto skutečnost lze též dokázat pomocí druhé derivace

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}x^2} = 4kQ \frac{3x(2x^2 - 3b^2)}{(x^2 + b^2)^{\frac{7}{2}}},$$

která pro $x_\mathrm{m} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$ vychází záporná.)

Dosazením hodnoty (2) do vztahu (1) dostaneme

$$E_\mathrm{max} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{kQ}{a^2} = 3{,}11 \cdot 10^6 \ \mathrm{V \cdot m^{-1}}. \qquad \textbf{4 body}$$

b) Elektrický potenciál ve středu čtverce je

$$\varphi = \frac{4kQ}{b} = \frac{4\sqrt{2}kQ}{a}.$$

Ze zákona zachování energie plyne pro limitní kinetickou energii urychlené částice

$$E_\mathrm{k} = q \cdot \varphi = \frac{4\sqrt{2}kqQ}{a}. \tag{3}$$

Podle klasické fyziky je kinetická energie

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_0 v^2. \tag{4}$$

Ze vztahů (3) a (4) plyne

$$v = \sqrt{\frac{8\sqrt{2}kqQ}{m_0 a}}.$$

**2 body**

Podle teorie relativity je kinetická energie

$$E_\mathrm{k} = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \tag{5}$$

Ze vztahů (3) a (5) plyne

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{4\sqrt{2}kqQ}{am_0c^2} + 1\right)^2}} = c\sqrt{1 - \frac{a^2 m_0^2 c^4}{(am_0c^2 + 4\sqrt{2}kqQ)^2}}.$$

**2 body**

c) Podle klasické fyziky vychází pro částici alfa $v_\alpha = 4{,}70 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, pro elektron $v_e = 2{,}84 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jelikož $v_\alpha \ll c$, lze výsledek podle klasické fyziky pro částici alfa považovat za dostatečně přesný. Velikost rychlosti elektronu je však blízká rychlosti světla, proto je nutné počítat podle relativistického vzorce, kde vychází $v_e = 2{,}17 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

**2 body**

**3.** a) Obecný případ zobrazení předmětu centrovanou soustavou dvou tenkých spojek znázorňuje obr. R3. Nechť je dána vzdálenost $a_1$ předmětu od první spojky. Ze zobrazovací rovnice tenké čočky a z obrázku plyne

$$a_1' = \frac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}, \qquad a_2' = \frac{a_2 f_2}{a_2 - f_2}, \tag{1}$$

$$a_2 = d - a_1' = \frac{da_1 - df_1 - a_1 f_1}{a_1 - f_1}. \tag{2}$$

Příčné zvětšení výsledného obrazu je

$$Z = Z_1 \cdot Z_2 = \left(-\frac{f_1}{a_1 - f_1}\right) \cdot \left(-\frac{f_2}{a_2 - f_2}\right) =$$
$$= \frac{f_1}{a_1 - f_1} \cdot \frac{f_2}{\underline{da_1 - df_1 - a_1 f_1 - f_2 a_1 + f_1 f_2}} = \frac{f_1 f_2}{a_1(d - f_1 - f_2) - df_1 + f_1 f_2}.$$
$$a_1 - f_1$$

Nemá-li příčné zvětšení výsledného obrazu záviset na vzdálenosti $a_1$ předmětu od první čočky, nesmí výraz proměnnou $a_1$ obsahovat, musí platit

$$d = f_1 + f_2,$$

to znamená, že obrazové ohnisko první spojky musí splývat s předmětovým ohniskem druhé spojky. Tuto situaci znázorňuje obr. R4. Příčné zvětšení výsledného obrazu pak je

$$Z = -\frac{f_2}{f_1}.$$

Ke stejnému výsledku můžeme dojít jednoduchou úvahou: Paprsek, který přichází z vrcholu předmětu na první spojku rovnoběžně s optickou osou je společný pro všechny polohy předmětu (body $A$, $B$, $C$). Po lomu na první a druhé spojce musí jít opět rovnoběžně s optickou osou, neboť prochází ve všech případech vrcholem obrazu, jehož velikost se podle předpokladu úlohy nemění (body $A''$, $B''$, $C''$). Toho lze dosáhnout jedině tak, že ohniska $F_1'$ a $F_2$ splynou.

**5 bodů**

b) Jestliže $d = f_1 + f_2$, pak ze vztahů (1) a (2) pro polohu výsledného obrazu plyne

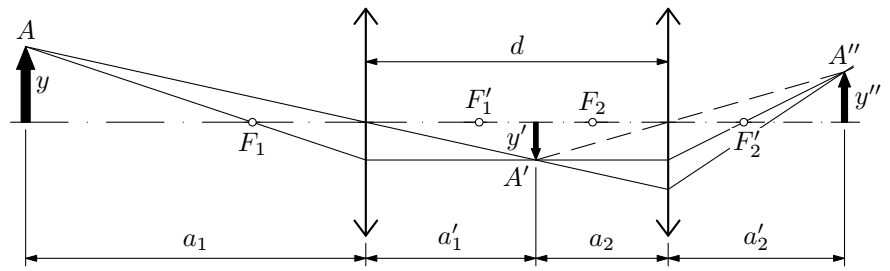
$$a_2' = \frac{(d - a_1')f_2}{d - a_1' - f_2} = \frac{\left(f_1 + f_2 - \dfrac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}\right) f_2}{f_1 - \dfrac{a_1 f_1}{a_1 - f_1}} =$$
$$= \frac{a_1 f_1 f_2 + a_1 f_2^2 - f_1^2 f_2 - f_1 f_2^2 - a_1 f_1 f_2}{-f_1^2} = \frac{(f_1 + f_2)f_2}{f_1} - a_1 \frac{f_2^2}{f_1^2}.$$

Dostali jsme klesající lineární funkci, jejíž graf je na obr. R5. Výsledný obraz se pohybuje rovnoměrně stejným směrem jako předmět. Z počáteční polohy ve vzdálenosti $\frac{(f_1 + f_2)f_2}{f_1}$ od druhé spojky se přibližuje k čočce rychlostí o velikosti

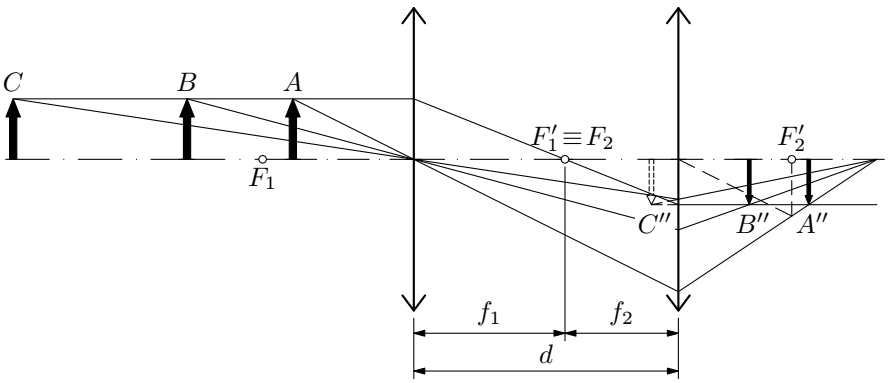
$$v' = \left|\frac{\mathrm{d}a_2'}{\mathrm{d}t}\right| = \left|-\frac{\mathrm{d}a_1}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{f_2^2}{f_1^2}\right| = v\frac{f_2^2}{f_1^2}.$$

V okamžiku, kdy předmět dosáhne vzdálenosti $\frac{(f_1+f_2)f_1}{f_2}$ od první spojky, se reálný obraz změní na zdánlivý.

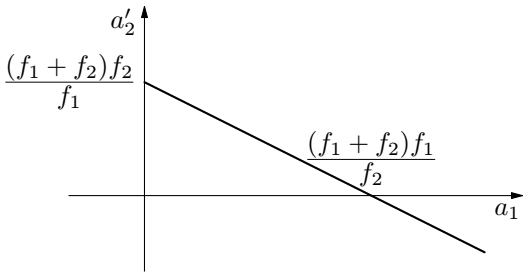
**5 bodů**




Obr. R3




Obr. R4




Obr. R5

**4.** a) Po dosažení mezní rychlosti je tíhová síla působící na kouli v rovnováze se vztlakovou silou

$$F_{\mathrm{vz}} = V\varrho g = \frac{m\varrho g}{\varrho_{\mathrm{k}}}$$

a odporovou silou

$$F_{\mathrm{o}} = \frac{1}{2}C \cdot \pi r^2 \varrho v_{\mathrm{m}}^2 = K v_{\mathrm{m}}^2.$$

Poloměr koule určíme z její hmotnosti a hustoty:

$$m = \frac{4}{3}\pi\varrho_{\mathrm{k}} r^3 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\varrho_{\mathrm{k}}}}.$$

Pak

$$K = \frac{1}{2}C\pi\varrho\left(\frac{3m}{4\pi\varrho_{\mathrm{k}}}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Platí

$$mg = \frac{m\varrho g}{\varrho_{\mathrm{k}}} + K v_{\mathrm{m}}^2 \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{mg(\varrho_{\mathrm{k}} - \varrho)}{K\varrho_{\mathrm{k}}}}.$$

Číselně vychází $r = 0{,}060\,57$ m, $K = 2{,}766$ N $\cdot$ s$^2$ $\cdot$ m$^{-2}$, $v_{\mathrm{m}} = 4{,}74$ m $\cdot$ s$^{-1}$.

**3 body**

b) Koule se pohybuje se zrychlením

$$a = \frac{F_G - F_{\mathrm{vz}} - F_{\mathrm{o}}}{m} = \frac{g(\varrho_{\mathrm{k}} - \varrho)}{\varrho_{\mathrm{k}}} - \frac{K}{m}v^2.$$

Počáteční podmínky děje jsou

$$a_0 = \frac{g(\varrho_{\mathrm{k}} - \varrho)}{\varrho_{\mathrm{k}}}, \quad v_0 = 0, \quad s_0 = 0.$$

Při použití Eulerovy metody modelování s časovým krokem $h$ použijeme buď rekurentní vztahy metody AVR

$$a_i = \frac{g(\varrho_{\mathrm{k}} - \varrho)}{\varrho_{\mathrm{k}}} - \frac{K}{m}v_i^2, \quad v_{i+1} = v_i + a_i * h, \quad s_{i+1} = s_i + v_{i+1} * h,$$

nebo rekurentní vztahy metody ARV

$$a_i = \frac{g(\varrho_{\mathrm{k}} - \varrho)}{\varrho_{\mathrm{k}}} - \frac{K}{m}v_i^2, \quad s_{i+1} = s_i + v_i * h, \quad v_{i+1} = v_i + a_i * h.$$

**3 body**

Výsledky výpočtů jsou v prvním případě zapsány v tab. 1, v druhém případě v tab. 2. Oběma způsoby dojdeme k závěru, že koule během první sekundy klesání dosáhne rychlosti přibližně 4,6 m $\cdot$ s$^{-1}$, která se blíží k mezní rychlosti, a urazí dráhu přibližně 3 metry. Pokud bychom chtěli získat přesnější hodnoty, museli bychom zmenšit časový krok.

*Poznámka*
Při tvorbě modelu jsme v autorském řešení pracovali s *velikostmi* zrychlení, rychlosti a dráhy. Mohli jste také pracovat se *souřadnicemi* zrychlení, rychlosti a polohy. Pokud jste zvolili směr vzhůru jako kladnou orientaci, vycházely ovšem všechny souřadnice záporné, což není na závadu.

| *t* / s | *a* / m.s$^{-2}$ | *v* / m.s$^{-1}$ | s / m |
|---|---|---|---|
| 0,0 | 8,552 | 0,000 | 0,000 |
| 0,1 | 8,552 | 0,855 | 0,086 |
| 0,2 | 8,274 | 1,683 | 0,254 |
| 0,3 | 7,474 | 2,430 | 0,497 |
| 0,4 | 6,303 | 3,060 | 0,803 |
| 0,5 | 4,984 | 3,559 | 1,159 |
| 0,6 | 3,727 | 3,931 | 1,552 |
| 0,7 | 2,664 | 4,198 | 1,972 |
| 0,8 | 1,839 | 4,382 | 2,410 |
| 0,9 | 1,238 | 4,505 | 2,860 |
| 1,0 | 0,819 | 4,587 | 3,319 |

tab. 1

| *t* / s | *a* / m.s$^{-2}$ | *v* / m.s$^{-1}$ | s / m |
|---|---|---|---|
| 0,0 | 8,552 | 0,000 | 0,000 |
| 0,1 | 8,552 | 0,855 | 0,000 |
| 0,2 | 8,274 | 1,683 | 0,086 |
| 0,3 | 7,474 | 2,430 | 0,254 |
| 0,4 | 6,303 | 3,060 | 0,497 |
| 0,5 | 4,984 | 3,559 | 0,803 |
| 0,6 | 3,727 | 3,931 | 1,159 |
| 0,7 | 2,664 | 4,198 | 1,552 |
| 0,8 | 1,839 | 4,382 | 1,972 |
| 0,9 | 1,238 | 4,505 | 2,410 |
| 1,0 | 0,819 | 4,587 | 2,860 |

tab.2

**4 body**

---

*Analytické řešení úlohy*
Pohybovou rovnici klesající koule

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{g(\varrho_\mathrm{k} - \varrho)}{\varrho_\mathrm{k}} - \frac{K}{m}v^2$$

můžeme upravit na tvar

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}v}{P - Qv^2} = \frac{\mathrm{d}v}{2\sqrt{P}}\left(\frac{1}{\sqrt{P}+\sqrt{Q}v} + \frac{1}{\sqrt{P}-\sqrt{Q}v}\right),$$

kde $P = \dfrac{g(\varrho_\mathrm{k} - \varrho)}{\varrho_\mathrm{k}}$, $Q = \dfrac{K}{m}$. Integrací dostaneme

$$\int_0^t \mathrm{d}t = t = \frac{1}{2\sqrt{P}}\left(\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{P}+\sqrt{Q}v} + \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{P}-\sqrt{Q}v}\right) = \frac{1}{2\sqrt{PQ}}\ln\frac{\sqrt{P}+\sqrt{Q}v}{\sqrt{P}-\sqrt{Q}v}.$$

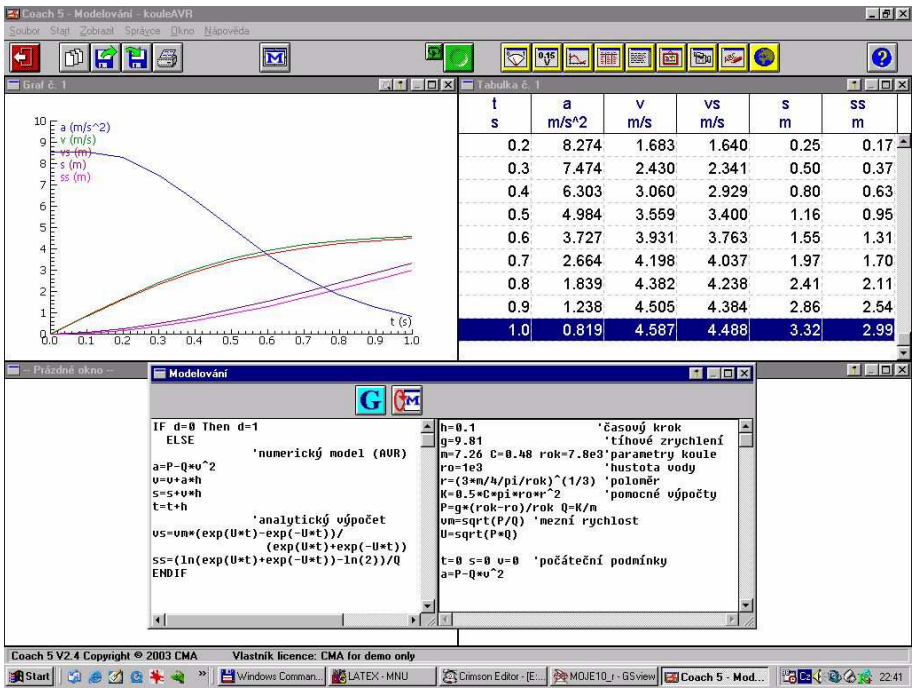
Z toho

$$\sqrt{P}+\sqrt{Q}v = \left(\sqrt{P}-\sqrt{Q}v\right)\mathrm{e}^{2t\sqrt{PQ}},$$

$$v = \frac{\sqrt{P}\left(\mathrm{e}^{2t\sqrt{PQ}}-1\right)}{\sqrt{Q}\left(\mathrm{e}^{2t\sqrt{PQ}}+1\right)} = v_\mathrm{m}\frac{\mathrm{e}^{t\sqrt{PQ}} - \mathrm{e}^{-t\sqrt{PQ}}}{\mathrm{e}^{t\sqrt{PQ}} + \mathrm{e}^{-t\sqrt{PQ}}} = v_\mathrm{m}\mathrm{tgh}(t\sqrt{PQ}).$$

Druhou integrací dostaneme

$$s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \frac{v_\mathrm{m}}{\sqrt{PQ}}\left[\ln\left(\mathrm{e}^{t\sqrt{PQ}} + \mathrm{e}^{-t\sqrt{PQ}}\right) - \ln 2\right] =$$

$$= \frac{1}{Q}\ln\frac{\mathrm{e}^{t\sqrt{PQ}} + \mathrm{e}^{-t\sqrt{PQ}}}{2} = \frac{1}{Q}\ln\left[\cosh\left(t\sqrt{PQ}\right)\right].$$

Po dosazení číselných hodnot zjistíme, že koule za 1 sekundu od uvolnění získala rychlost 4,49 $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ a urazila dráhu 2,99 m. Na následujícím obrázku pořízeném programem Coach 5 můžeme porovnat, jak se po jednotlivých krocích liší výsledky $(v, s)$ nášeho numerického modelu získaného metodou AVR od přesných hodnot $(vs, ss)$ analytického výpočtu.