Řešení úloh 1. kola 53. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 3, 4, 6, 7), Ľ. Konrád SR (5)

1. a) Z rovnice $s = \frac{1}{2}at^2$ získáme velikost zrychlení na prvním úseku

$$a_1 = \frac{2s_1}{t_1^2} = 0{,}75\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Velikost zrychlení na druhém úseku je

$$a_2 = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0{,}40\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

2 body

b) K sestrojení grafu vypočteme velikost konečné rychlosti na prvním úseku

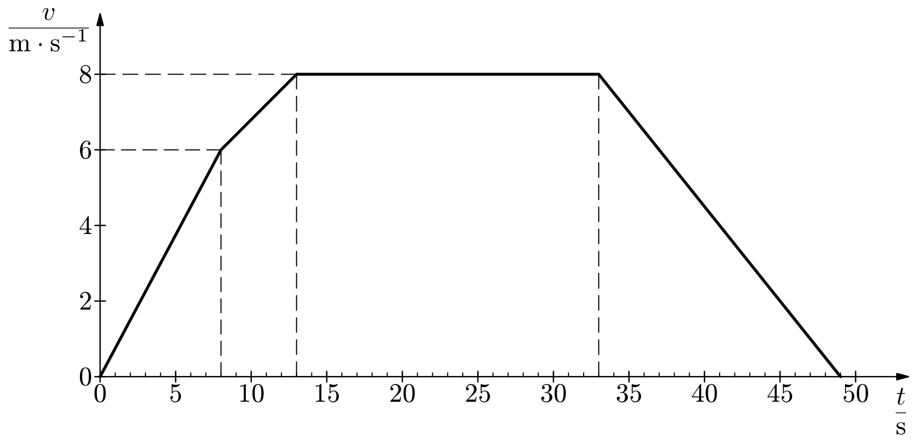
$$v_1 = a_1 t_1 = 6{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

velikost konečné rychlosti na druhém úseku

$$v_2 = v_1 + \Delta v = 8{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

a dobu brzdění

$$\Delta t = \frac{v_2}{a_3} = 16\ \mathrm{s}.$$



6 bodů

c) Celkovou dráhu určíme jako obsah plochy pod grafem (s_1 již známe):

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = (24 + 35 + 160 + 64)\ \mathrm{m} = 283\ \mathrm{m}.$$

Průměrná rychlost je podíl celkové dráhy a celkového času 49 s:

$$v_\mathrm{p} = 5{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

2 body

2. a) Setrvačná síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{s} = -m\boldsymbol{a}$ má směr opačný ke směru zrychlení vagónu, tedy působí ve směru k zadní stěně vagónu. Velikost setrvačné síly je

$$F_\mathrm{s} = ma = 48 \cdot 0{,}75\ \mathrm{N} = 36\ \mathrm{N}.$$

2 body

b) Na chlapce působí z hlediska pozorovatele ve vagónu setrvačná síla a proti pohybu síla valivého odporu. Jejich výslednice má velikost

$$F = F_\mathrm{s} - F_\mathrm{v} = ma - \frac{1}{30}mg = m\left(a - \frac{1}{30}g\right).$$

Chlapec se pohybuje vzhledem k vagónu se zrychlením o velikosti

$$a' = \frac{F}{m} = \frac{m\left(a - \frac{1}{30}g\right)}{m} = a - \frac{1}{30}g = 0{,}42\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

2 body

c) Z rovnice $d = \frac{1}{2}a't^2$ určíme dobu t jízdy chlapce vzhledem k vagónu

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a'}} = \sqrt{\frac{2\cdot 8}{0{,}42}}\ \mathrm{s} = 6{,}2\ \mathrm{s}.$$

Za tuto dobu urazí vagón dráhu

$$s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2 = \left(20\cdot 6{,}2 + \frac{1}{2}0{,}75.6{,}2^2\right)\ \mathrm{m} = 138\ \mathrm{m}.$$

3 body

d) Velikost v' vzájemné rychlosti chlapce a vagónu před nárazem chlapce na zadní stěnu je

$$v' = a't = 2{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

1 bod

e) Chlapec se nerozjede za podmínky $F_\mathrm{s} \le F_\mathrm{v}$, z níž pro maximální velikost zrychlení plyne

$$ma_\mathrm{max} = \frac{1}{30}mg.$$

Z rovnice dostaneme

$$a_{\max} = \frac{1}{30}g = 0{,}33\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

2 body

3. a) Z rovnosti $\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2$ dostaneme

$$v_2 = v_1\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}. \qquad (1)$$

2 body

b) Z porovnání velikostí hybností vagónů před srážkou

$$m_1v_1 = 36\,000\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}} < m_2v_2 = 48\,000\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$

plyne, že souprava se bude pohybovat ve směru původní rychlosti druhého vagónu. Ze zákona zachování hybnosti

$$m_2v_2 - m_1v_1 = (m_1 + m_2)v$$

dostaneme

$$v = \frac{m_2v_2 - m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Dosazením vztahu (1) dostaneme

$$v = \frac{\sqrt{m_1m_2} - m_1}{m_1 + m_2}v_1 = 0{,}24\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}. \qquad (2)$$

4 body

c) Poměr kinetických energií vagónů po srážce a před srážkou je

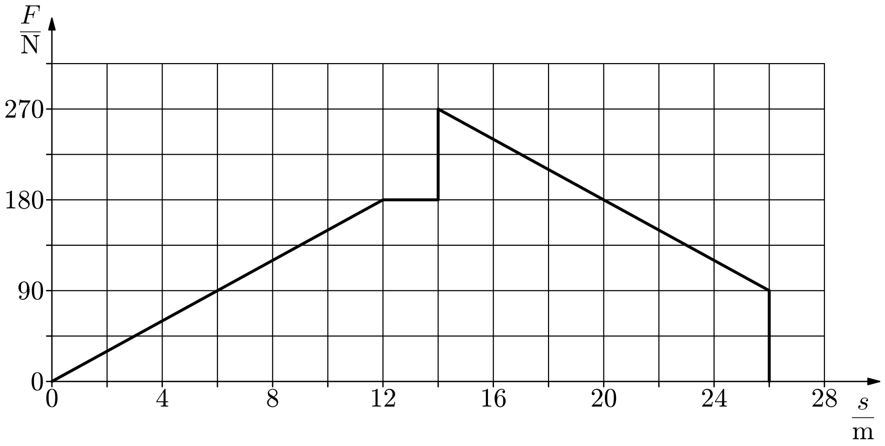
$$\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{2 \cdot \frac{1}{2}m_1v_1^2} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2m_1v_1^2}.$$

Užitím vztahu (2) dostaneme

$$\frac{E_\mathrm{k}'}{E_\mathrm{k}} = \frac{(m_1 + m_2)\frac{(\sqrt{m_1m_2} - m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2}v_1^2}{2m_1v_1^2} = \frac{(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{1}{50}.$$

4 body

4. a) Do okamžiku, kdy se konec řetězu na provázku dostal do úrovně plošiny, působil Adam silou, jejíž velikost byla přímo úměrná délce visící části řetězu. Pak až do okamžiku pohybu uzlu zůstávala konstantní. Její velikost byla $F = \frac{h}{l}mg = 180\ \mathrm{N}$. V okamžiku uvedení uzlu do pohybu vzrostla skokem na hodnotu $F = \frac{h+l_1}{l}mg = 270\ \mathrm{N}$ a do okamžiku vytažení uzlu lineárně klesla na hodnotu $F = \frac{l_1}{l}mg = 90\ \mathrm{N}$, bezprostředně poté klesla skokem na nulu.



4 body

b) Práci rozdělíme do tří fází, v první se dostane konec řetězu na úroveň plošiny, v druhé táhne Adam za řetěz a uzel je ještě v klidu, a ve třetí se vytahuje uzel. Platí:

$$W_1 = \frac{1}{2} \cdot 12\ \mathrm{m} \cdot 180\ \mathrm{N} = 1\,080\ \mathrm{J},$$

$$W_2 = 2\ \mathrm{m} \cdot 180\ \mathrm{N} = 360\ \mathrm{J},$$

$$W_3 = \frac{12\ \mathrm{m} \cdot (270 + 90\ \mathrm{N})}{2} = 2\,160\ \mathrm{J},$$

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 3\,600\ \mathrm{J}.$$

Potenciální energie řetězu je

$$E_\mathrm{p} = mgh = 3\,600\ \mathrm{J}$$

a je podle očekávání rovna vykonané práci.

4 body

c) Průměrný výkon je

$$P = \frac{mgh}{t} = 55\ \mathrm{W}.$$

Velikost rychlosti pohybu řetězu vzhůru je

$$v = \frac{h + l - l_1}{t} = 0{,}40\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

2 body

5. Velikost v_0 rychlosti první kuličky před dopadem na druhou kuličku určíme užitím zákona zachování mechanické energie:

$$m_1 g h_0 = m_1 g l (1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}.$$

Při pružné srážce se zachovává celková hybnost i celková mechanická energie:

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \qquad \frac{1}{2} m_1 v_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2,$$

kde v_1, v_2 jsou souřadnice rychlostí po srážce (kladnou orientaci jsme zvolili ve směru rychlosti $\boldsymbol{v}_0$). Řešením soustavy rovnic určíme rychlosti kuliček po srážce:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0, \qquad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0.$$

3 body

a) První kulička se při napnutém vlákně pohybuje po oblouku kružnice a maximální úhlovou výchylku β určíme užitím zákona zachování energie:

$$m_1 g l (1 - \cos\beta) = \frac{1}{2} m_1 v_1^2,$$

$$\cos\beta = 1 - \frac{v_1^2}{2gl} = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 (1 - \cos\alpha) = 1 - \left(\frac{\dfrac{m_1}{m_2} - 1}{\dfrac{m_1}{m_2} + 1}\right)^2 (1 - \cos\alpha),$$

přičemž směr vychýlení je ve směru rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ při $m_1 > m_2$ a v opačném při $m_1 < m_2$.

3 body

b) Druhá kulička se po nárazu první kuličky pohybuje vodorovným vrhem s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_2$ a počáteční výškou h. Hledaná vzdálenost je

$$x = v_2 t_\mathrm{d} = v_2 \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{4m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{hl(1-\cos\alpha)} = \frac{4\dfrac{m_1}{m_2}}{\dfrac{m_1}{m_2}+1}\sqrt{hl(1-\cos\alpha)}.$$

2 body

Pro dané hodnoty dostaneme:

pro $m_1/m_2 = 2$: $x = 1{,}6$ m, $\beta \approx 19°$ ve směru $\boldsymbol{v}_0$,
pro $m_1/m_2 = 1$: $x = 1{,}2$ m, $\beta = 0$,
pro $m_1/m_2 = 1/2$: $x = 0{,}8$ m, $\beta \approx 19°$ proti směru $\boldsymbol{v}_0$.

2 body

6. Odvození vztahů provedeme pomocí momentové věty. V rovnováze platí:

$$m_\mathrm{z} g x = m_0 g\left(\frac{d}{2} - x\right), \quad \text{resp.} \quad mgx = m_0 g\left(\frac{d}{2} - x\right).$$

Úpravou dostaneme vztahy (1) a (2).

2 body

Výsledky měření při použití dřevěné tyče délky $d = 137$ cm s obdélníkovým průřezem o rozměrech 2,4 cm a 0,8 cm:

Číslo měření	$\frac{m_\mathrm{z}}{\mathrm{g}}$	$\frac{x}{\mathrm{cm}}$	$\frac{m_0}{\mathrm{g}}$
1	500	13,5	123
2	500	13,5	123
3	200	26	122
4	200	26	122
5	100	35,5	121
6	100	38	125
7	50	48,5	121
8	50	43	126
Hmotnost tyče (aritmetický průměr)			123

Hmotnost tyče zjištěná vážením je 122,8 g a s přesností na 3 platné číslice se shoduje s hmotností v tabulce.

4 body

Číslo měření	$\dfrac{m_0}{\mathrm{g}}$	$\dfrac{x}{\mathrm{cm}}$	$\dfrac{m}{\mathrm{g}}$
1	123	20	298
2	123	20,5	288
Hmotnost 1. tělesa (aritmetický průměr)			293

Hmotnost 1. tělesa zjištěná vážením je 285,2 g, hmotnost zjištěná pomocí tyče se liší o 2,7 %.

Číslo měření	$\dfrac{m_0}{\mathrm{g}}$	$\dfrac{x}{\mathrm{cm}}$	$\dfrac{m}{\mathrm{g}}$
1	123	40	88
2	123	40,5	85
Hmotnost 2. tělesa (aritmetický průměr)			86

Hmotnost 2. tělesa zjištěná vážením je 84,8 g, hmotnost zjištěná pomocí tyče se liší o 1,4 %.

4 body

7. a) Ze vztahů $v = r\omega,\ \omega = \dfrac{2\pi}{T}$ dostaneme

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{2\pi}{T} = 0{,}90\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}},$$

$$v_1 = r_1 \frac{2\pi}{T} = 2{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, \quad v_2 = r_2 \frac{2\pi}{T} = 2{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

3 body

b) Pro rovnoměrně zpomalený pohyb, při kterém se velikost rychlosti tělesa za dobu t_0 zmenší na nulu, platí

$$v = at_0, \quad s = \frac{1}{2}at_0^2 = \frac{1}{2}vt_0.$$

Během zastavování urazil Tomáš dráhu

$$s_1 = 2{,}5 \cdot 2\pi r_1 = \frac{1}{2}v_1 t_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi r_1}{T} \cdot t_0.$$

Z rovnosti druhého a čtvrtého výrazu dostaneme

$$t_0 = 5T = 35\ \mathrm{s}.$$

3 body

c) Užitím vztahu $a_\mathrm{d} = r\omega^2 = r\dfrac{4\pi^2}{T^2}$ dostaneme

$$a_\mathrm{d1} = r_1\frac{4\pi^2}{T^2} = 2{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}, \quad a_\mathrm{d2} = r_2\frac{4\pi^2}{T^2} = 1{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Pro velikosti tečných zrychlení s využitím předchozích výsledků dostaneme

$$a_1 = \frac{v_1}{t_0} = \frac{\dfrac{2\pi r_1}{T}}{5T} = \frac{2\pi r_1}{5T^2} = 0{,}082\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$a_2 = \frac{v_2}{t_0} = \frac{2\pi r_2}{5T^2} = 0{,}062\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

4 body