Řešení úloh 1. kola 54. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: J. Jírů (1), M. Jarešová (2), J. Thomas (4), P. Šedivý (3, 5, 6), M. Kapoun (7)

1. a) Pravidelný šestiúhelník o straně a lze složit ze šesti shodných rovnostranných trojúhelníků s délkou strany a (obr R1). Deska o hmotnosti $m_1 = m/6$ a tvaru tohoto trojúhelníku má moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm

$$J_0 = \frac{1}{36}m_1(a^2 + a^2 + a^2) = \frac{1}{12}m_1a^2.$$

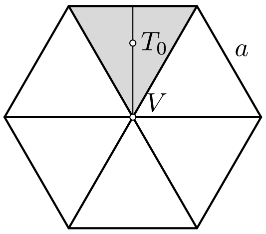
Posunutím osy otáčení z těžiště do vrcholu V dostaneme podle Steinerovy věty moment setrvačnosti

$$J_1 = \frac{1}{12}m_1a^2 + m_1\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \frac{5}{12}m_1a^2.$$

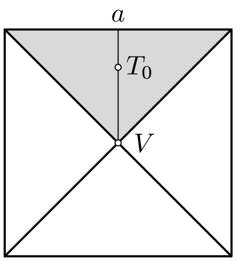
Moment setrvačnosti celého pravidelného šestiúhelníku vzhledem k ose procházející středem je

$$J_6 = 6J_1 = 6\cdot\frac{5}{12}m_1a^2 = \frac{5}{12}ma^2.$$

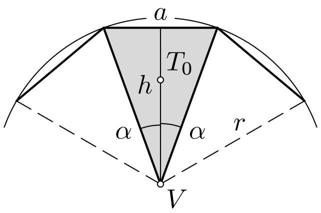
2 body



Obr. R1



Obr. R2



Obr. R3

b) Čtverec o straně délky a lze složit ze čtyř shodných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků s přeponou délky a (obr. R2). Deska o hmotnosti $m_1 = m/4$ a tvaru tohoto trojúhelníku má moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm

$$J_0 = \frac{1}{36}m_1\left(2\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + a^2\right) = \frac{1}{18}m_1a^2.$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející hlavním vrcholem je podle

Steinerovy věty

$$J_1 = \frac{1}{18} m_1 a^2 + m_1 \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \right)^2 = \frac{1}{6} m_1 a^2.$$

Moment setrvačnosti celé čtvercové desky vzhledem k ose procházející středem je

$$J_4 = 4J_1 = 4 \cdot \frac{1}{6} m_1 a^2 = \frac{1}{6} m a^2.$$

2 body

c) Pravidelný n-úhelník o poloměru r kružnice opsané lze složit z počtu n shodných rovnoramenných trojúhelníků se základnou délky a a s ramenem délky r (obr. R3). Deska o hmotnosti $m_1 = m/n$ a tvaru tohoto trojúhelníku má moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm

$$J_0 = \frac{1}{36} m_1 (2r^2 + a^2).$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející hlavním vrcholem je podle Steinerovy věty

$$J_1 = \frac{1}{36} m_1 (2r^2 + a^2) + m_1 \left(\frac{2}{3} h \right)^2,$$

kde h je výška kolmá k základně. Označme dále 2α vrcholový úhel. Pak platí $h = r \cos\alpha, \quad a = 2r \sin\alpha$. Po dosazení dostaneme

$$J_1 = \frac{1}{36} m_1 r^2 (2 + 4\sin^2\alpha + 16\cos^2\alpha)$$

a pro celý mnohoúhelník

$$J_n = nJ_1 = \frac{1}{36} m r^2 (2 + 4\sin^2\alpha + 16\cos^2\alpha).$$

Výraz lze upravit do dvou tvarů:

$$J_n = \frac{1}{6} m r^2 (1 + 2\cos^2\alpha) = \frac{1}{6} m r^2 (3 - 2\sin^2\alpha).$$

Vrcholový úhel 2α trojúhelníku splňuje podmínku $\alpha = \frac{\pi}{n}$. Moment setrvačnosti desky pravidelného n-úhelníku vzhledem k ose procházející středem je

$$J_n = \frac{1}{6} m r^2 \left(1 + 2\cos^2\frac{\pi}{n} \right) = \frac{1}{6} m r^2 \left(3 - 2\sin^2\frac{\pi}{n} \right). \tag{1}$$

4 body

d) Výsledek úlohy a) získáme ze vztahu (1) položením $n = 6$, $r = a$. Výsledek úlohy b) dostaneme ze vztahu (1) položením $n = 4$, $r = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. **1 bod**

e) Pro moment setrvačnosti kruhové desky (též válce) užitím ve vzorci (1) jedné z limit

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n} = 0$$

dostaneme

$$J_\infty = \frac{1}{2}mr^2.$$

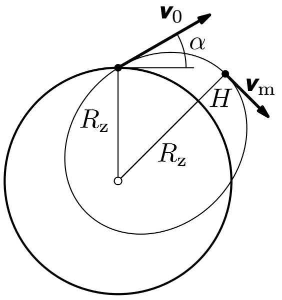
1 bod

2. a) K vyřešení této části vyjdeme z obr. R4. Užitím 2. Keplerova zákona můžeme pro plošnou rychlost psát

$$\frac{v_0 R_z \cos\alpha}{2} = \frac{v_m(R_z + H)}{2}.$$

Dále platí zákon zachování mechanické energie

$$-\varkappa\frac{mM_z}{R_z} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\varkappa\frac{mM_z}{R_z + H} + \frac{1}{2}mv_m^2.$$



Obr. R4

Označíme $r = R_z + H$. Pak dostaneme

$$\begin{aligned} v_0 R_z \cos\alpha &= v_m r, \\ -\varkappa\frac{M_z}{R_z} + \frac{1}{2}v_0^2 &= -\varkappa\frac{M_z}{r} + \frac{1}{2}v_m^2. \end{aligned}$$

Po dosazení za $v_0 = \dfrac{v_1}{2}$, kde $v_1 = \sqrt{\varkappa\dfrac{M_z}{R_z}}$, obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{2}R_z\cos\alpha &= v_m r, \\ -v_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v_1^2}{4} &= -v_1^2\frac{R_z}{r} + \frac{1}{2}v_m^2. \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $v_m = \dfrac{v_1}{2}\dfrac{R_z}{r}\cos\alpha$ a dosadíme do druhé rovnice. Po úpravě dostaneme

$$7r^2 - 8R_z r + R_z^2\cos^2\alpha = 0,$$

což je kvadratická rovnice v proměnné r. Jejím řešením dostaneme

$$r_{12} = \frac{1}{7} R_\mathrm{z} \left(4 \pm \sqrt{16 - 7\cos^2\alpha}\right).$$

Pro $\alpha = 30°$ dostaneme $r_1 = 1{,}04\, R_\mathrm{z}$, $r_2 = 0{,}10\, R_\mathrm{z}$.
Vzhledem k tomu, že $H = r - R_\mathrm{z}$, dostaneme v prvním případě $H_1 = 0{,}04\, R_\mathrm{z} = 255$ km, ve druhém případě $H_2 = -0{,}90\, R_\mathrm{z} = -5\,740$ km (což znamená, že je to pod povrchem Země - viz obr. R4).
Střela se při svém pohybu dostane do maximální výšky 255 km. **4 body**

b) Rychlost střely v okamžiku, kdy střela dosáhne maximální výšky, určíme užitím vztahu

$$v_\mathrm{m} = \frac{v_1}{2} \frac{R_\mathrm{z}}{r} \cos\alpha,$$

$$v_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \frac{R_\mathrm{z}}{1{,}04\, R_\mathrm{z}} \cdot \cos 30° v_1 = 0{,}42\, v_1 = 0{,}42 \cdot 7{,}9\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 3{,}3\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

2 body

c) Budeme postupovat obdobně jako v případě a) a b), změna bude pouze v tom, že pak dosadíme $v_0 = v_1$. Dostaneme vztahy

$$\begin{aligned} v_1 R_\mathrm{z} \cos\alpha &= v_\mathrm{m} r, \\ -v_1^2 + \frac{1}{2} v_1^2 &= -v_1^2 \frac{R_\mathrm{z}}{r} + \frac{1}{2} v_\mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

Postupnými úpravami dostaneme kvadratickou rovnici

$$r^2 - 2rR_\mathrm{z} + R_\mathrm{z}^2 \cos^2\alpha = 0,$$

z čehož $r_1 = (1 + \sin\alpha)\, R_\mathrm{z} = 1{,}5\, R_\mathrm{z}$, $r_2 = (1 - \sin\alpha)\, R_\mathrm{z} = 0{,}5\, R_\mathrm{z}$. Tomu odpovídají výšky $H_1 = 0{,}5\, R_\mathrm{z}$, $H_2 = -0{,}5\, R_\mathrm{z}$.
Rychlost střely v okamžiku, kdy střela dosáhne maximální výšky $H_1 = 0{,}5\, R_\mathrm{z}$, opět určíme užitím vztahu

$$v_\mathrm{m} = v_1 \frac{R_\mathrm{z}}{r_1} \cos\alpha = 0{,}58\, v_1 = 4{,}6\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}.$$

4 body

Poznámka:

Při řešení této úlohy je možno také použít text *Šedivý, P. – Volf, I.: Pohyb tělesa po eliptické trajektorii v radiálním gravitačním poli.* Využitím vztahů uvedených na str. 15 se řešení úlohy zjednoduší.

3. a) Těžiště kyvadla se nachází ve vzdálenosti $\frac{2}{3}b\cos\varphi$ od osy kyvadla. Podle vzorce (1) má deska vzhledem k ose procházející těžištěm rovnoběžně s osou otáčení kyvadla moment setrvačnosti

$$J_0 = \frac{1}{36}m[2b^2 + (2b\sin\varphi)^2].$$

Moment setrvačnosti desky vzhledem k ose otáčení určíme užitím Steinerovy věty:

$$J = J_0 + m\left(\frac{2}{3}b\cos\varphi\right)^2 = \frac{1}{18}mb^2(1 + 2\sin^2\varphi) + mb^2\frac{4}{9}\cos^2\varphi =$$
$$= \frac{1}{6}mb^2(1 + 2\cos^2\varphi).$$

Direkční moment kyvadla je $D = mg\frac{2}{3}b\cos\varphi$. Kyvadlo kývá s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{18}mb^2(3 + 6\cos^2\varphi)}{mg\frac{2}{3}b\cos\varphi}} = 2\pi\sqrt{\frac{b(1 + 2\cos^2\varphi)}{4g\cos\varphi}}.$$

5 bodů

b) Úpravou vztahu

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{b(1 + 2\cos^2\varphi)}{4g\cos\varphi}}$$

dostaneme kvadratickou rovnici a dosazením $b = 1{,}20$ m, $\tau = 1{,}00$ s, $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ dojdeme ke kvadratické rovnici

$$2{,}40\pi^2\cos^2\varphi - 39{,}24\cos\varphi + 1{,}20\pi^2 = 0.$$

Úloze vyhovuje kořen $\cos\varphi = 0{,}396\,93$, $\varphi = 66{,}6°$.

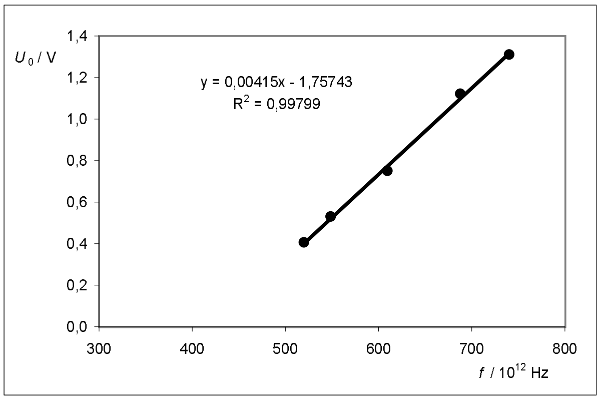
5 bodů

4. a) Tabulku naměřených hodnot vložíme do Excelu a doplníme ji o řádek s frekvencemi použitých spektrálních čar. Vytvoříme *XY bodový graf*, přidáme *spojnici trendu* a zobrazíme *rovnici regrese*, která má tvar

$$y = bx + a,$$

kde $y = U_0$, $x = \dfrac{f}{10^{12}}$. Pomocí statistické funkce LINREGRESE dopočítáme další statistické údaje, z nichž nás zajímají směrodatné odchylky koeficientů a a b.[1]

λ / nm	576,0	546,1	491,6	435,8	404,7
f / THz	520,5	549,0	609,8	687,9	740,8
U_0 / V	0,405	0,530	0,750	1,120	1,310



0,004151	-1,75743
0,000108	0,067489
0,997988	0,019915
1487,829	3
0,59009	0,00119

Docházíme k výsledkům

$$b = (0{,}004\,151 \pm 0{,}000\,108)\ \mathrm{V\cdot s}, \quad a = (-1{,}757\,43 \pm 0{,}067\,49)\ \mathrm{V}.$$

4 body

b) Úpravou Einsteinovy fotoelektrické rovnice

$$hf = W_0 + \frac{1}{2}mv^2 = W_0 + U_0 e$$

dostaneme vztah

$$U_0 = \frac{h}{e}f - \frac{W_0}{e},$$

[1] Celý postup je podrobně vysvětlen na podobné úloze ve studijním textu Teplotní závislosti fyzikálních veličin na str. 28 až 31. Text se nachází na webových stránkách FO.

který porovnáme s rovnicí regrese:[2]

$$\frac{h}{e}f = bx = b\frac{f}{10^{12}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{be}{10^{12}} = (6{,}65 \pm 0{,}17)\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s},$$

$$-\frac{W_0}{e} = a \quad \Rightarrow \quad W_0 = -ae = (1{,}76 \pm 0{,}07)\ \mathrm{eV} = (2{,}82 \pm 0{,}11)\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

Pro mezní frekvenci a mezní vlnovou délku světla platí

$$hf_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = W_0 \quad \Rightarrow \lambda_0 = \frac{hc}{W_0}.$$

Relativní chyba takto vypočítané mezní vlnové délky je

$$\delta\lambda_0 = \sqrt{(\delta h)^2 + (\delta W_0)^2} = \sqrt{(\delta b)^2 + (\delta a)^2} = 0{,}0464.$$

Pak

$$\lambda_0 = 7{,}0855\cdot 10^{-7}(1 \pm 0{,}0464)\ \mathrm{m} = (709 \pm 33)\ \mathrm{nm}.$$

5 bodů

c) Mezní vlnová délka dané fotonky leží v červené oblasti spektra. V infračerveném oboru záření tedy fotonka nefunguje.

1 bod

5. a) Označme s stranu čtverce připadajícího na jeden pixel. Pak

$$s^2 = \frac{ab}{16{,}2\cdot 10^6} = \frac{370\ \mathrm{mm}^2}{16{,}2\cdot 10^6} = 2{,}28\cdot 10^{-5}\ \mathrm{mm}^2, \qquad s = 4{,}8\ \mu\mathrm{m}.$$

Stejná je i vzdálenost středů sousedních pixelů.

3 body

b) Poloměr středního kroužku při Fraunhoferově ohybu na kruhovém otvoru je

$$r = \frac{1{,}22\lambda f}{D},$$

kde λ je vlnová délka světla.

Zvolíme-li ohniskovou vzdálenost f_1, je $\frac{f_1}{D} = 1{,}35$ a vznikne kroužek o poloměru

$$r_1 = 1{,}22\lambda\frac{f_1}{D} = 1{,}22\cdot 550\cdot 10^{-9}\cdot 1{,}35\ \mathrm{m} = 0{,}9\cdot 10^{-3}\ \mathrm{mm},$$

což je asi pětina vzdálenosti středů sousedních pixelů.

[2]Tabulkové hodnoty elementárního náboje a rychlosti světla ve vakuu bereme jako přesné.

Zvolíme-li ohniskovou vzdálenost f_2, je $\dfrac{f_2}{D} = 5{,}6$ a vznikne kroužek o poloměru

$$r_2 = 1{,}22\lambda\frac{f_2}{D} = 1{,}22 \cdot 550 \cdot 10^{-9} \cdot 5{,}6 \text{ m} = 3{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ mm}.$$

V tomto případě je obsah světlého kroužku srovnatelný s obsahem čtverce vymezeného pro jeden pixel.

5 bodů

c) Pokud objektiv přicloníme, poměr f/D se zvětší a je roven clonovému číslu. Zvětší se i poloměr kroužku vzniklého zobrazením svítícího bodu. Záleží i na vlnové délce světla. Ve světle červeném bude poloměr kroužku větší, v modrém světle menší.

2 body

6. Energie kondenzátoru po překmitnutí obvodu je téměř rovna součtu energie kondenzátoru a cívky před rozepnutím spínače:

$$\frac{1}{2}CU_2^2 \approx \frac{1}{2}CU_1^2 + \frac{1}{2}LI^2\,, \qquad L = \frac{C\left(U_2^2 - U_1^2\right)}{I^2}\,.$$

Indukčnost cívky 1200 závitů z rozkladného transformátoru s uzavřeným jádrem je přibližně 1,6 H, s rovným jádrem 0,2 H.

7. a) Každý z elektronů je přitahován jádrem a odpuzován protějším elektronem. Výsledná síla směřuje k jádru a má velikost

$$F = k\frac{2e^2}{r^2} - k\frac{e^2}{4r^2} = \frac{7ke^2}{4r^2}, \tag{1}$$

kde $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8{,}99 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$ je konstanta Coulombova zákona. Tato síla sehrává roli dostředivé síly, tedy

$$F = m\omega^2 r = \frac{7ke^2}{4r^2}. \tag{2}$$

Po vynásobení druhého a třetího členu poloměrem r poznáváme v druhém členu kinetickou energii obíhající dvojice elektronů, proto platí:

$$E_\text{k} = 2 \cdot \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = \frac{7ke^2}{4r},$$

potenciální energie elektrostatická soustavy nábojů v atomu je

$$E_\mathrm{p} = -2 \cdot k\frac{2e^2}{r} + k\frac{e^2}{2r} = -\frac{7ke^2}{2r},$$

takže celková energie atomu $E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = -\dfrac{7ke^2}{4r}$ je záporná. Při úplné ionizaci atomu platí $W_1 + W_2 = |E| = \dfrac{7ke^2}{4r}$. Z toho

$$r = \frac{7ke^2}{4(W_1 + W_2)} = 0{,}0319\ \mathrm{nm}.$$

Dosazením do (1) dostaneme $F = 3{,}97 \cdot 10^{-7}$ N.
Z (2) odvodíme

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{7ke^2}{4mr^3}}, \qquad f = \frac{e}{4\pi}\sqrt{\frac{7k}{mr^3}} = 1{,}86 \cdot 10^{16}\ \mathrm{Hz}.$$

6 bodů

b) Vlnová délka ve vakuu by měla být $\lambda = \dfrac{c}{f} = 16{,}1$ nm.

1 bod

c) Na elektron částečně ionizovaného atomu působí dostředivá síla o velikosti $F' = \dfrac{2ke^2}{r'^2} = m\omega'^2 r'$.

Má tedy kinetickou energii $E'_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2}m\omega'^2 r'^2 = \dfrac{ke^2}{r'}$.

Potenciální energie iontu je $E'_\mathrm{p} = -\dfrac{2ke^2}{r'}$ a celková energie $E' = -\dfrac{ke^2}{r'}$.
Při druhé ionizaci pak platí

$$W_2 = |E'| = \frac{ke^2}{r'} \quad \Rightarrow \quad r' = \frac{ke^2}{W_2} = 0{,}0264\ \mathrm{nm}.$$

3 body