Řešení úloh krajského kola 54. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie A

Autoři úloh: J. Thomas (1), J. Jírů (2), P. Šedivý (3) a M. Kapoun (4)

1. a) Zaveďme vztažnou soustavu Oxy podle obr. R1. Pohyb lodí popisují vztahy

$$x_1 = vt, \quad y_1 = 0, \quad x_2 = vt\sin\alpha, \quad y_2 = vt\cos\alpha - l_0.$$

Hledáme minimum funkce

$$\begin{aligned} l^2 &= [vt(1-\sin\alpha)]^2 + [l_0 - vt\cos\alpha]^2 = \\ &= v^2t^2(1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha) + l_0^2 - 2l_0vt\cos\alpha + v^2t^2\cos^2\alpha = \\ &= 2v^2t^2(1-\sin\alpha) + l_0^2 - 2l_0vt\cos\alpha. \end{aligned} \tag{1}$$

Položme

$$\frac{\mathrm{d}(l^2)}{\mathrm{d}t} = 4v^2(1-\sin\alpha)t - 2l_0v\cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{l_0\cos\alpha}{2v(1-\sin\alpha)}. \tag{2}$$

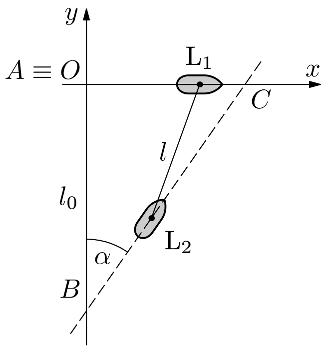
Protože $\dfrac{\mathrm{d}^2(l^2)}{\mathrm{d}t^2} = 4v^2(1-\sin\alpha) > 0$, jedná se o minimum.

Dosazením z (2) do (1) určíme minimální vzdálenost obou lodí:

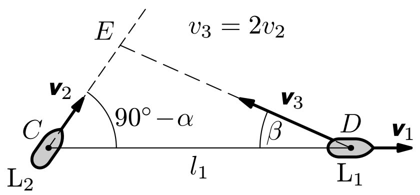
$$l_{\min}^2 = \frac{2v^2l_0^2\cos^2\alpha}{4v^2(1-\sin\alpha)} + l_0^2 - \frac{2v^2l_0^2\cos^2\alpha}{2v^2(1-\sin\alpha)} = l_0^2 - \frac{l_0^2\cos^2\alpha}{2(1-\sin\alpha)},$$

$$l_{\min} = l_0\sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{2(1-\sin\alpha)}} = l_0\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}. \tag{3}$$

Číselně vychází $t = 190$ s, $l_{\min} = 460$ m. **6 bodů**



Obr. R1



Obr. R2

b) V okamžiku vypuštění člunu se loď L_1 nachází v bodě D ve vzdálenosti $l_1 = \dfrac{l_0}{\cos\alpha} - l_0 \operatorname{tg}\alpha$ od bodu C a loď L_2 se nachází v bodě C. Člun se s lodí L_2 setká v bodě E (obr. R2). Protože se člun pohybuje rychlostí $2v$, platí podle sinové věty

$$\frac{\sin\beta}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{\cos\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta = 24^\circ.$$

Jízda člunu bude trvat $t_1 = \dfrac{|DE|}{2v} = \dfrac{|CE|}{v}$.

Vzdálenost $|DE|$ určíme pomocí sinové věty:

$$\frac{|DE|}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{|CD|}{\sin(90^\circ + \alpha - \beta)} = \frac{|CD|}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\dfrac{l_0}{\cos\alpha} - l_0 \operatorname{tg}\alpha}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

$$t_1 = \frac{|DE|}{2v} = \frac{\dfrac{l_0}{\cos\alpha} - l_0 \operatorname{tg}\alpha}{2v\cos(\alpha - \beta)} \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{l_0(1 - \sin\alpha)}{2v\cos(\alpha - \beta)} = 43 \text{ s}.$$

4 body

2. a) Na rezistoru je napětí $U - U_1$ a obvodem prochází proud $I_1 = \dfrac{P_1}{U_1}$. Odpor rezistoru je

$$R = \frac{U - U_1}{I_1} = \frac{(U - U_1)U_1}{P_1} = 65\ \Omega.$$

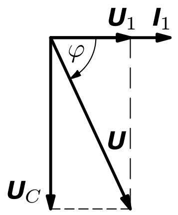
2 body

b) Obvodem opět prochází proud I_1. Z fázorového diagramu (obr. R3) určíme napětí na kondenzátoru

$$U_C = \sqrt{U^2 - U_1^2}.$$

Kondenzátor má kapacitanci $X_C = \dfrac{U_C}{I_1} = \dfrac{1}{2\pi f C}$ a kapacitu

$$C = \frac{I_1}{2\pi f U_C} = \frac{P_1}{2\pi f U_1 U_C} = \frac{P_1}{2\pi f U_1 \sqrt{U^2 - U_1^2}} = 46\ \mu\mathrm{F}.$$



Obr. R3

5 bodů

c) Připojíme-li žárovku přes rezistor, je proud v obvodu ve fázi s napětím a zdroj je zatěžován činným výkonem

$$P = UI_1 = \frac{U}{U_1} P_1 = 770\ \mathrm{W}.$$

Připojíme-li žárovku přes kondenzátor, platí pro fázové posunutí napětí zdroje oproti proudu $\cos\varphi = \dfrac{U_1}{U}$. Činný výkon zdroje

$$P' = UI_1 \cos\varphi = UI_1 \frac{U_1}{U} = U_1 I_1 = P_1 = 40\ \mathrm{W}$$

spotřebovává pouze žárovka.

3 body

3. a) Hlavní maximum prvního řádu vidíme ve směru, jehož odchylka α od optické osy splňuje podmínku $b \sin\alpha = \lambda$. Současně platí $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{d}$. V našem případě dostaneme pro zelené interferenční maximum

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{y_2}{d} = 0{,}284 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_2 = 15{,}84^\circ .$$

Pak

$$b = \frac{\lambda_2}{\sin\alpha_2} = \frac{546{,}07 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}{\sin 15{,}84^\circ} = 2{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}.$$

3 body

b) Pro odchylku α_1 směru, ve kterém vidíme modré hlavní maximum 1. řádu, platí

$$\sin\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{b} = \frac{435{,}83 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}{2{,}00 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}} = 0{,}2179 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_1 = 12{,}59^\circ .$$

Vzájemná vzdálenost obou hlavních maxim 1. řádu pro vlnovou délku λ_1 je

$$2y_1 = 2d \operatorname{tg}\alpha_1 = 223\ \mathrm{mm}.$$

3 body

c) Aby se dala rozlišit srovnatelně intenzivní hlavní maxima 1. řádu pro blízké vlnové délky λ a $\lambda + \Delta\lambda$, musí počet N štěrbin mřížky splňovat podmínku

$$N > \frac{\lambda}{\Delta\lambda}.$$

V našem případě tedy musí platit

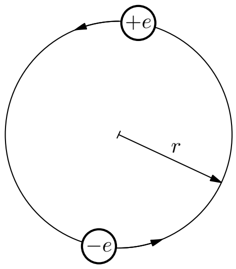
$$N > \frac{\lambda_3}{\lambda_4 - \lambda_3} = 273.$$

Vzhledem k tomu, že naše mřížka má 500 štěrbin na jednom milimetru, je počet štěrbin, které se nacházejí před zornicí oka, dostatečný k tomu, abychom žluté spektrální čáry rtuti daným spektrometrem rozlišili.

4 body

4. a) α) V dynamickém modelu pozitronia se elektron i pozitron pohybují po stejné kruhové trajektorii kolem společného těžiště (obr. R4), přičemž roli dostředivé síly sehrává elektrostatická přitažlivá síla:

$$\frac{m_\mathrm{e}v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{4r^2}. \qquad (1)$$



Obr. R4

Velikost momentu hybnosti soustavy $L = 2r \cdot m_\mathrm{e}v$ je omezena Bohrovou kvantovou podmínkou

$$L_n = n \cdot \frac{h}{2\pi}, \qquad (2)$$

odkud pro poloměr r kruhové trajektorie vychází

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_\mathrm{e} e^2} \cdot n^2,$$

takže velikost pozitronia $a_n = 2r_n$ je kvantována vztahem

$$a_n = \frac{2\varepsilon_0 h^2}{\pi m_\mathrm{e} e^2} \cdot n^2 = 2a_0 n^2 = 1{,}06 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cdot n^2,$$

kde $a_0 = 0{,}529 \cdot 10^{-10}$ m je tzv. Bohrův poloměr atomu vodíku.

3 body

β) Celková energie pozitronia je

$$E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = 2 \cdot \frac{1}{2} m_\mathrm{e} v^2 + \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{2r}\right),$$

což po dosazení z (1) dá $E = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{4r}$, takže

$$E_n = -\frac{m_\mathrm{e} e^4}{16\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} E_0 \cdot \frac{1}{n^2} = -6{,}8\ \mathrm{eV} \cdot \frac{1}{n^2},$$

kde $E_0 = -13{,}6$ eV je energie základního stavu atomu vodíku.

3 body

b) Absorpce světla je v Bohrově modelu spojena s přechodem pozitronia mezi dvěma povolenými energetickými stavy E_m, E_n dle vztahů

$$\lambda_{mn} = \frac{c}{f_{mn}}, \quad h f_{mn} = |E_m - E_n|,$$

takže

$$\lambda_{mn} = \frac{16 c \varepsilon_0^2 h^3}{m_\mathrm{e} e^4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}, \quad n > m.$$

Vyčísleme nejprve výraz s konstantami. Pak můžeme psát

$$\lambda_{mn} = 183{,}5\ \mathrm{nm} \cdot \frac{1}{\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}}.$$

Nyní vyčíslíme možné hodnoty zlomku:
1. Pro $m = 1$ (lymanovská série) leží celá série v UV oblasti, neboť $\lambda_{12} = 245$ nm.
2. Pro $m = 2$ nabízí balmerovská série čáry v IR a částečně i ve viditelné, a to dlouhovlnné oblasti optického spektra – viz tabulka:

n	3	4	5	6	7	8	$\cdots$	∞
λ(nm)	1 321	979	874	826	799	783	$\cdots$	734

Z toho můžeme soudit, že pozitronium bude pohlcovat pouze světlo červené barvy.
3. Pro $m = 3$ a více už samy hrany sérií leží v IR oblasti, tedy mimo viditelný obor.

4 body