Řešení úloh 1. kola 54. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2, 4), M. Jarešová (5), J. Jírů (3), V. Vícha (6), P. Šedivý (7)

1. a) Pro souřadnice míče při letu platí: $x = v_0 t\cos\alpha, \quad y = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$.

Když z rovnic vyloučíme čas, dostáváme:

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}(\mathrm{tg}^2\,\alpha + 1). \tag{1}$$

Dosazením souřadnic cíle $x = d$, $y = h$ dojdeme k rovnici

$$gd^2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 2dv_0^2\,\mathrm{tg}\,\alpha + 2v_0^2 h + gd^2 = 0$$

s kořeny

$$\mathrm{tg}\,\alpha_{1,2} = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2d^2}}{gd}. \tag{2}$$

Při malé počáteční rychlosti nemůže míč zasáhnout cíl při žádném elevačním úhlu. Musí být splněna podmínka $v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2d^2 \geq 0$.

Řešením bikvadratické rovnice $v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2d^2 = 0$ dostáváme kořeny

$$v_0^2 = g(h \pm \sqrt{h^2 + d^2}).$$

Smysl má jen kladný kořen, který je druhou mocninou hledané minimální rychlosti, takže

$$v_{0\min} = \sqrt{g(h + \sqrt{h^2 + d^2})} = 16{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Dosazením $v_{0\min}$ do vztahu (2) dostaneme

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_{0\min}^2}{gd} = \frac{h + \sqrt{h^2 + d^2}}{d} = 1{,}10, \quad \alpha = 47{,}7^\circ.$$

Doba letu míče $t = \dfrac{d}{v_{0\min}\cos\alpha} = 2{,}3\ \mathrm{s}$.

6 bodů

b) Dosazením za v_0 do vztahu (2) dostáváme dva kořeny:

$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = 2{,}02$, $\alpha_1 = 63{,}7^\circ$, kterému odpovídá doba letu $t_1 = 3{,}1$ s,

$\mathrm{tg}\,\alpha_2 = 0{,}62$, $\alpha_2 = 31{,}8^\circ$, kterému odpovídá doba letu $t_2 = 1{,}6$ s.

Zadání úlohy vyhovuje α_2 a t_2.

4 body

Jiný způsob řešení úlohy a)

Z rovnice $h = d\,\mathrm{tg}\,\alpha - \dfrac{gd^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$ vyjádříme podíl $\dfrac{1}{v_0^2} = \dfrac{(d\,\mathrm{tg}\,\alpha - h)2\cos^2\alpha}{gd^2}$, který musí být maximální, tedy musí být maximální hodnota výrazu

$$V = (d\,\mathrm{tg}\,\alpha - h)\cos^2\alpha = d\sin\alpha\cos\alpha - h\cos^2\alpha.$$

Musí tedy platit

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\alpha} = d(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2h\cos\alpha\sin\alpha = 0.$$

Po úpravě

$$d\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 2h\,\mathrm{tg}\,\alpha - d = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{h \pm \sqrt{h^2 + d^2}}{d}.$$

Zadání vyhovuje jen kladný kořen, který vede ke stejným výsledkům:
$\mathrm{tg}\,\alpha = 1{,}10$, $\alpha = 47{,}7^\circ$ a $v_{0\mathrm{min}} = 16{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

(Pomocí druhé derivace se můžeme přesvědčit, že výraz V dosahuje maxima.)

Řešení části a) užitím rovnice ochranné paraboly:

Ochranná parabola o rovnici $x^2 = -4H(y - H)$, kde $H = \frac{v_0^2}{2g}$, vymezuje množinu bodů, které lze při vrhu zasáhnout při dané velikosti v_0 počáteční rychlosti. Bod o souřadnicích $x = d$ a $y = h$, který leží na ochranné parabole, odpovídá jednomu reálnému řešení rovnice (1). Po dosazení a úpravě dostáváme již známou bikvadratickou rovnici $v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2d^2 = 0$ s kořeny $v_0^2 = g(h \pm \sqrt{h^2 + d^2})$. Ze vztahu (1) pak dostaneme $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_{0\mathrm{min}}^2}{gd}$.

2. a) Vyjdeme z obrázku R1. Pokud kapalina dokonale smáčí stěny nádoby, vystoupí voda v kapiláře do výšky h, ve které bude kapilární tlak

$$p_\mathrm{k} = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma\cos\alpha}{r}, \quad \text{kde} \quad r = r_0 + h\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

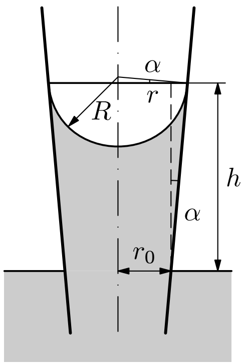
roven hydrostatickému tlaku sloupce kapaliny o výšce h: $p_\mathrm{h} = h\varrho g$. Tedy

$$h\varrho g = \frac{2\sigma\cos\alpha}{r_0 + h\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

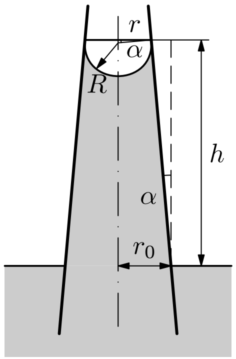
Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici $h^2\varrho g\,\mathrm{tg}\,\alpha + h\varrho g r_0 - 2\sigma\cos\alpha = 0$.
Řešení úlohy vyhovuje kladný kořen

$$h = \frac{-\varrho g r_0 + \sqrt{(\varrho g r_0)^2 + 8\sigma\varrho g\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}}{2\varrho g\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{-r_0 + \sqrt{r_0^2 + \dfrac{8\sigma\sin\alpha}{\varrho g}}}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Číselně pro vodu $h = 35$ mm, pro líh $h = 16$ mm. **5 bodů**



Obr. R1



Obr. R2

b) Vyjdeme z obrázku R2. V tomto případě $r = r_0 - h\,\mathrm{tg}\,\alpha$ a kvadratická rovnice má tvar $h^2 \varrho g\,\mathrm{tg}\,\alpha - h\varrho g r_0 + 2\sigma\cos\alpha = 0$. Řešením dostaneme

$$h = \frac{\varrho g r_0 \pm \sqrt{(\varrho g r_0)^2 - 8\sigma\varrho g\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}}{2\varrho g\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{r_0 \pm \sqrt{r_0^2 - \dfrac{8\sigma\sin\alpha}{\varrho g}}}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Pro vodu je $r_0^2 < \dfrac{8\sigma\sin\alpha}{\varrho g}$, rovnice tedy nemá reálné řešení. Během stoupání hladiny v kapiláře je kapilární tlak trvale větší než hydrostatický a voda vystoupí až k hornímu konci kapiláry. Pro líh má rovnice dva kořeny $h_1 = 28$ mm a $h_2 = 58$ mm. Stabilní je ale jen první poloha hladiny. Druhá poloha je nestabilní. Stačí malé vychýlení hladiny směrem nahoru a kapilární tlak bude větší než tlak hydrostatický. Hladina kapaliny se posune až k hornímu okraji kapiláry. Naopak při malém vychýlení hladiny směrem dolů bude kapilární tlak menší než tlak hydrostatický. Hladina kapaliny se posune do dolní rovnovážné polohy.

5 bodů

Poznámka: Protože úhel α je velmi malý, platí $\cos\alpha \approx 1 \;\Rightarrow\; r \approx R$. Při použití této aproximace, *což by mělo být v komentáři k řešení uvedeno*, dostaneme v části a) výsledek

$$h = \frac{-\,r_0 + \sqrt{r_0^2 + \dfrac{8\sigma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\varrho g}}}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

a v části b) výsledek

$$h = \frac{r_0 \pm \sqrt{r_0^2 - \dfrac{8\sigma\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\varrho g}}}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

Jelikož $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$, numerické výsledky získané při použití uvedené aproximace jsou stejné jako výše uvedené.

3. a) Při přibližování zdroje vysílajícího zvukové vlnění s frekvencí f_{z} k pozorovateli, který je v klidu vzhledem k okolnímu prostředí (k atmosféře), přijímá pozorovatel zvukové vlnění s frekvencí

$$f_{\mathrm{p}} = \frac{c}{c-v} f_{\mathrm{z}},$$

při vzdalování s frekvencí

$$f_{\mathrm{p}}{}' = \frac{c}{c+v} f_{\mathrm{z}},$$

kde c je rychlost šíření vlnění v okolním prostředí a v velikost rychlosti zdroje vzhledem k okolnímu prostředí. Z rovnic pro poměr frekvencí k plyne

$$k = \frac{f_{\mathrm{p}}}{f_{\mathrm{p}}{}'} = \frac{c+v}{c-v}. \tag{1}$$

Z rovnice vyjádříme hledanou velikost rychlosti zdroje

$$v = \frac{k-1}{k+1} c = \frac{\dfrac{6}{5} - 1}{\dfrac{6}{5} + 1} c = \frac{1}{11} c = \frac{1}{11} \cdot 346\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 113\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

5 bodů

b) Pro kvocient q geometrické posloupnosti platí $f_{12} = f_0 \cdot q^{12}$, kde podle zadání je $f_{12} = 2f_0$.
Z toho $q = \sqrt[12]{2}$.
Z rovnice (1) plyne

$$\frac{f_{\mathrm{p}}}{f_{\mathrm{p}}{}'} = \frac{c+v}{c-v} = \frac{346+85}{346-85} = \frac{431}{261} = 1{,}651.$$

Řešením rovnice $1{,}651 = \left(\sqrt[12]{2}\right)^x = 2^{\frac{x}{12}}$ dostaneme

$$x = 12 \cdot \frac{\log 1{,}651\,34}{\log 2} = 8{,}7.$$

Hledaný interval je 8 až 9 půltónů, což je v hudební akustice nehudební interval ležící mezi malou sextou (8 půltónů) a velkou sextou (9 půltónů).

5 bodů

4. a) Perioda kmitů fyzického kyvadla s vodorovnou osou je $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{J}{D}}$, kde J je moment setrvačnosti kyvadla, $D = Mgd$ je direkční moment výslednice tíhových sil působících na kyvadlo, $M = 3m$ je celková hmotnost kyvadla, d je vzdálenost těžiště kyvadla od osy otáčení. U našeho kyvadla je

$$d = \frac{2 \cdot m \cdot \dfrac{l}{2}\cos\alpha + ml\cos\alpha}{3m} = \frac{2}{3}l\cos\alpha, \qquad D = 2mgl\cos\alpha.$$

2 body

Moment setrvačnosti obou tyčí je stejný jako u jediné tyče hmotnosti $2m$ a délky $l\cos\alpha$ kolmé k ose otáčení procházející jejím koncem. Celkový moment setrvačnosti kyvadla je

$$J = \frac{1}{3}\cdot 2m \cdot (l\cos\alpha)^2 + m(l\cos\alpha)^2 = \frac{5}{3}ml^2\cos^2\alpha.$$

3 body

Doba kmitu je tedy

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\dfrac{5}{3}ml^2\cos^2\alpha}{2mgl\cos\alpha}} = 2\pi\sqrt{\frac{5l\cos\alpha}{6g}} = 0{,}79\ \text{s}.$$

2 body

b) Sklopením osy se moment setrvačnosti nezmění, ale z tíhové síly se uplatní jen složka kolmá k ose otáčení, která má velikost $3mg\cos\beta$. Direkční moment kyvadla se tedy zmenší na

$$D_1 = 2mgl\cos\alpha\cos\beta$$

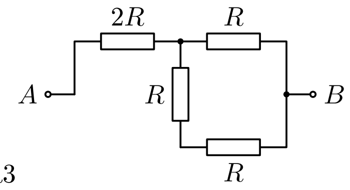
a perioda kyvadla se zvětší na

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{5l\cos\alpha}{6g\cos\beta}} = 1{,}12\ \text{s}.$$

3 body

5.a) Existuje celkem 5 různých možností poškození rezistorů:

1. Přepálí se levý dolní rezistor. Náhradní schéma je na obr. R3.



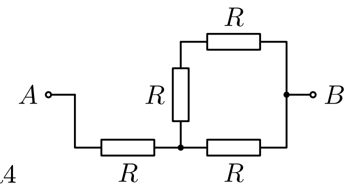
Obr. R3

Výsledný odpor mezi body A a B je pak dán vztahem

$$R_1 = 2R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}} = \frac{8}{3}R.$$

1 bod

2. Přepálí se levý horní rezistor. Náhradní schéma je na obr. R4.



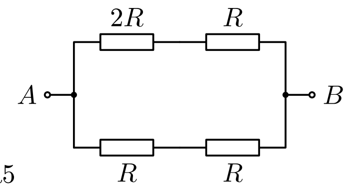
Obr. R4

Výsledný odpor mezi body A a B je pak dán vztahem

$$R_2 = R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R}} = \frac{5}{3}R.$$

1 bod

3. Přepálí se prostřední rezistor. Náhradní schéma je na obr. R5.



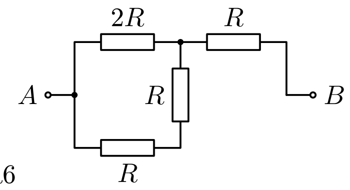
Obr. R5

Výsledný odpor mezi body A a B je pak dán vztahem

$$R_3 = \frac{1}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{2R}} = \frac{6}{5}R.$$

1 bod

4. Přepálí se pravý dolní rezistor. Náhradní schéma je na obr. R6.



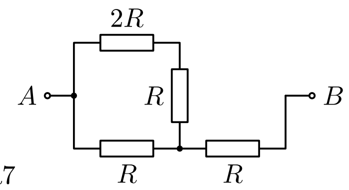
Obr. R6

Výsledný odpor mezi body A a B je pak dán vztahem

$$R_4 = \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} + R = 2R.$$

1 bod

5. Přepálí se pravý horní rezistor. Náhradní schéma je na obr. R7.



Obr. R7

Výsledný odpor mezi body A a B je pak dán vztahem

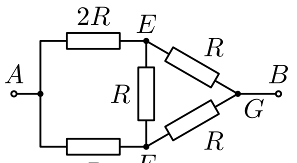
$$R_5 = \frac{1}{\frac{1}{3R} + \frac{1}{R}} + R = \frac{7}{4}R.$$

1 bod

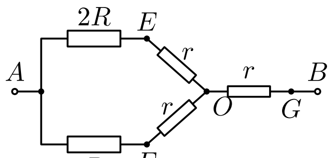
b) Výpočtem jsme zjistili, že $R_1 = \frac{8}{3}R = \frac{160}{60}R$, $R_2 = \frac{5}{3}R = \frac{100}{60}R$, $R_3 = \frac{6}{5}R = \frac{72}{60}R$, $R_4 = 2R = \frac{120}{60}R$, $R_5 = \frac{7}{4}R = \frac{105}{60}R$.
Je-li odpor obvodu co nejmenší, je poškozen prostřední rezistor. Je-li odpor obvodu co největší, je poškozen levý dolní rezistor.

1 bod

c) Úlohu můžeme v tomto případě řešit např. užitím transfigurace, kdy si původní obvod obr. R8 překreslíme na obvod uvedený na obr. R9.



Obr. R8



Obr. R9

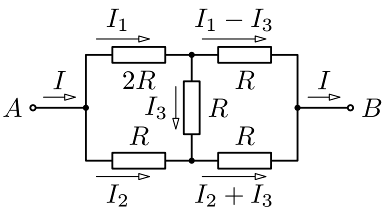
Užitím tranfigurace trojúhelník – hvězda dostaneme

$$R_{EG} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{2}{3}R = 2r,$$

z čehož $r = \frac{R}{3}$. Zbývající hodnoty odporů dostaneme z úvahy o symetrii. Potom

$$R_{AB} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{4}{3}R} + \frac{1}{\frac{7}{3}R}} + \frac{R}{3} = \frac{13}{11}R.$$

Poznámka:
Tuto část je možno také řešit užitím Kirchhoffových zákonů (viz obr. R10).



Obr. R10

Podle Kirchhoffových zákonů pro uzel a pro smyčky platí

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2, \\ 2RI_1 + RI_3 - RI_2 &= 0, \end{aligned}$$

$$R(I_1 - I_3) - R(I_2 + I_3) - RI_3 = 0.$$

Z druhé rovnice vyjádříme neznámou $I_2 = 2I_1 + I_3$ a dosadíme do třetí rovnice. Dostaneme $I_1 - 2I_1 - I_3 - 3I_3 = 0$, z čehož $I_1 = -4I_3$. Potom $I_2 = 2 \cdot (-4I_3) + I_3 = -7I_3$. Po dosazení za I_1 a I_2 do první rovnice dostaneme $I = -4I_3 - 7I_3 = -11I_3$, z čehož $I_3 = -\frac{1}{11}I$ (proud prochází opačným směrem, než bylo vyznačeno). Potom $I_1 = \frac{4}{11}I$, $I_2 = \frac{7}{11}I$. Nyní už můžeme psát

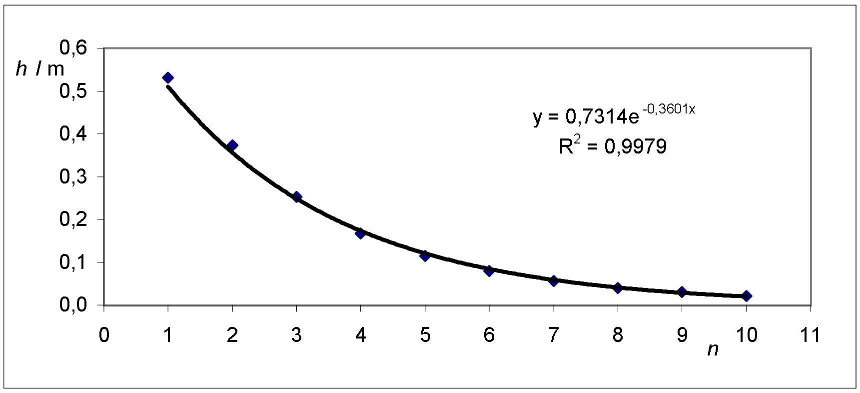
$$R_{AB}I = 2RI_1 + R(I_1 - I_3) = 2R \cdot \frac{4}{11}I + R\left[\frac{4}{11} - \left(-\frac{1}{11}\right)\right] I = \frac{13}{11}RI,$$

z čehož $R_{AB} = \frac{13}{11}R$. **3 body**

d) Nejméně se odpor obvodu změní ve 3. případě, a to tak, že vzroste o hodnotu $\Delta R_3 = \left(\frac{6}{5} - \frac{13}{11}\right) R = \frac{1}{55}R$, a tedy $\delta R_3 = \frac{\Delta R_3}{R_{AB}} = \frac{1}{65} \doteq 1{,}5\ \%$, což je téměř zanedbatelné. Nejvíce se odpor obvodu zvětší v 1. případě, a to o hodnotu $\Delta R_1 = \left(\frac{8}{3} - \frac{13}{11}\right) R = \frac{49}{33}R$, a tedy $\delta R_1 = \frac{\Delta R_1}{R_{AB}} = \frac{49}{39} \doteq 126\ \%$.
1 bod

6. a-e) Hodnotám naměřeným v ukázce uvedené v zadání přísluší následující tabulka a graf:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t / s	0,553	1,211	1,763	2,217	2,586	2,891	3,146	3,359	3,54	3,698	3,829
τ / s	0,658	0,552	0,454	0,369	0,305	0,255	0,213	0,181	0,158	0,131	/ / /
h / m	0,531	0,374	0,253	0,167	0,114	0,080	0,056	0,040	0,031	0,021	/ / /
τ_{i+1}/τ_i	0,839	0,822	0,813	0,827	0,836	0,835	0,850	0,873	0,829	průměr	0,836
								směrodatná odchylka			0,017



Z tabulky je zřejmé. že doby poskoků tvoří geometrickou posloupnost, neboť poměr sousedních dob poskoku je prakticky konstantní. Kvocient posloupnosti je $q = 0{,}836 \pm 0{,}017$. Celkovou dobu poskoků určíme pomocí vzorce pro součet nekonečné geometrické řady:

$$t_{\text{celk}} = \frac{\tau_1}{1-q} \doteq 4{,}0 \text{ s}.$$

Tato hodnota souhlasí s hodnotou, kterou odečteme ze záznamu.

f) Poskok míčku je svislý vrh vzhůru se zanedbatelným odporem vzduchu. Pro doby letu platí

$$\tau_i = \frac{2v_i}{g}, \quad \tau_{i+1} = \frac{2v_{i+1}}{g}, \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{i+1}}{v_i} = \frac{\tau_{i+1}}{\tau_i} = q.$$

g) Pro výšku poskoku platí $h_i = \dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{\tau_i}{2}\right)^2 = \dfrac{g\tau_i^2}{8}$.

Poměr výšek dvou po sobě následujících poskoků je rovněž konstantní:

$$\frac{h_{i+1}}{h_i} = \frac{\tau_{i+1}^2}{\tau_i^2} = q^2.$$

To potvrzuje výsledek exponenciální regrese uvedený v grafu.

7. a) Označme α polovinu středového úhlu té části obvodu disku, které se nedotýká drát (obr. R11). Tíha disku se v bodě závěsu rozkládá na dvě tahové síly drátu $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}'$ (obr. R12), které mají velikost

$$F = F' = \frac{mg}{2\sin\alpha}.$$

Prodloužení drátu Δl splňuje Hookův zákon. Platí

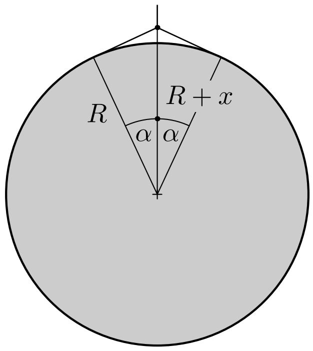
$$\Delta l = 2(R\,\mathrm{tg}\,\alpha - R\alpha) = \frac{Fl_0}{ES},$$

kde $l_0 = 2\pi R$ je délka nezatíženého drátu a $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$ plošný obsah jeho průřezu. Spojením uvedených vztahů dostaneme

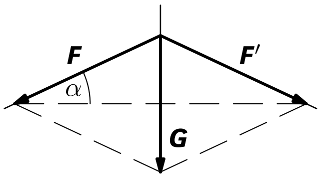
$$F = \frac{mg}{2\sin\alpha} = \frac{\Delta l ES}{l_0} = \frac{2R(\mathrm{tg}\,\alpha - \alpha)E\frac{\pi d^2}{4}}{2\pi R},$$

po úpravě

$$2mg - (\mathrm{tg}\,\alpha - \alpha)\sin\alpha \cdot Ed^2 = 0. \qquad (1)$$



Obr. R11



Obr. R12

Rovnici (1) můžeme podstatně zjednodušit použitím aproximací

$$\sin\alpha \approx \alpha, \qquad \mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}.$$

Pak

$$2mg \approx \frac{\alpha^4}{3}Ed^2, \qquad \alpha \approx \sqrt[4]{\frac{6mg}{Ed^2}} = 0{,}196 \text{ rad} = 11{,}3^\circ.$$

6 bodů

Nyní už můžeme vypočítat vzdálenost x bodu závěsu od obvodu disku:

$$x = \frac{R}{\cos\alpha} - R = 3{,}9 \text{ mm}.$$

1 bod

b) Normálové napětí drátu je $\sigma = \dfrac{F}{S} = \dfrac{2mg}{\pi d^2 \sin\alpha} = 180$ MPa, což je podstatně méně než mez úměrnosti. Použití Hookova zákona v části a) bylo tedy oprávněné.

2 body

c) Část drátu, která se nedotýká disku, má délku $2R \operatorname{tg} \alpha = 80$ mm. **1 bod**

Poznámka: Chceme-li ověřit oprávněnost použití aproximace při zjednodušení rovnice (1), musíme tuto transcendentní rovnici s neznámou α vyřešit nějakou numerickou metodou. Dosadíme číselné hodnoty a rovnici upravíme na tvar

$$f(\alpha) = 39{,}24 - (\operatorname{tg} \alpha - \alpha) \sin \alpha \cdot 79200 = 0.$$

V tabulce Excelu se funkce $f(\alpha)$ přiblížila k nulové hodnotě při

$$\alpha \doteq 0{,}196 \text{ rad} = 11{,}2°,$$

což při dané přesnosti souhlasí s předchozím výsledkem.

α	f(α)
0,1	36,5938
0,15	25,8041
0,19	4,5407
0,192	3,0499
0,193	2,2866
0,194	1,5113
0,195	0,7237
0,196	-0,0761
0,197	-0,8884
0,198	-1,7133
0,2	-3,4014