Řešení úloh krajského kola 54. ročníku fyzikální olympiády

Kategorie B

Autoři úloh: J. Jírů (2, 3), J. Thomas (1) a P. Šedivý (4)

1. a) Vyjdeme z obr. R1. Ze zákona zachování energie plyne

$$mgl(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad a_\mathrm{d} = \frac{v^2}{l} = 2g(1-\cos\alpha),$$

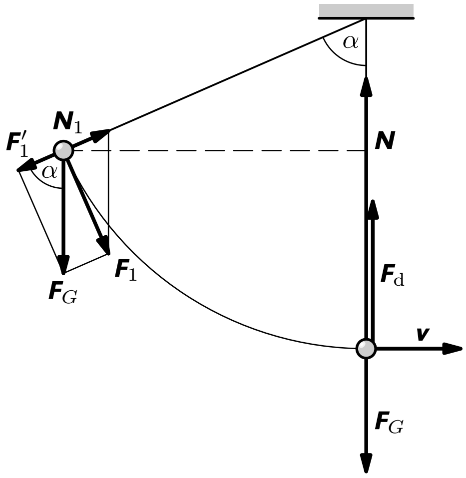
kde v je velikost rychlosti kuličky při průchodu rovnovážnou polohou a $a_\mathrm{d} = 1{,}2g$ je velikost dostředivého zrychlení tamtéž. Z toho

$$\cos\alpha = 0{,}40, \quad \alpha = 66^\circ.$$

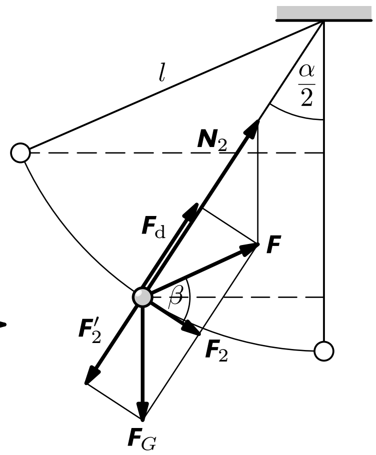
Na kuličku působí při průchodu rovnovážnou polohou tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a tahová síla niti $\boldsymbol{N}$. Jejich výslednice je dostředivá síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$. Platí

$$F_\mathrm{d} = ma_\mathrm{d} = m \cdot 1{,}2g = N - F_G \quad \Rightarrow \quad N = 2{,}2mg.$$

3 body



Obr. R1



Obr. R2

b) Bezprostředně po uvolnění kuličky jsou její rychlost a tedy i dostředivé zrychlení nulové. Složka tíhové síly ve směru niti má tedy stejnou velikost jako síla, kterou na kuličku působí nit:

$$N_1 = F_G \cos\alpha = 0{,}40mg.$$

Výslednice $\boldsymbol{F}_1$ tíhové síly a tahové síly niti má směr tečny k trajektorii a velikost $F_1 = mg\sin\alpha$. Kuličce uděluje zrychlení o velikosti

$$a_1 = g\sin\alpha = 0{,}92g.$$

2 body

c) Situaci v okamžiku, kdy kyvadlo prochází odchylkou $\alpha/2$, znázorňuje obr. R2. Složky tíhové síly mají velikosti

$$F_2 = mg\sin\frac{\alpha}{2}, \quad F_2' = mg\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Velikost dostředivé síly, která je výslednicí tahové síly niti $\boldsymbol{N}_2$ a složky $\boldsymbol{F}_2'$, určíme užitím zákona zachování energie. Platí

$$mgl(1-\cos\alpha) - mgl\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}mv_2^2,$$

$$a_\mathrm{d} = \frac{v_2^2}{l} = 2g\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\right) = 0{,}87g,$$

$$F_\mathrm{d} = N_2 - F_2' \quad \Rightarrow \quad N_2 = F_\mathrm{d} + F_2' = mg\left(3\cos\frac{\alpha}{2} - 2\cos\alpha\right) = 1{,}71mg.$$

Výslednice F sil působících na kuličku má normálovou složku $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ a tečnou složku $\boldsymbol{F}_2$, která uděluje kuličce tečné zrychlení o velikosti

$$a_\mathrm{t} = g\sin\frac{\alpha}{2} = 0{,}55g.$$

Celkové zrychlení má teď velikost

$$a_2 = \sqrt{a_\mathrm{d}^2 + a_\mathrm{t}^2} = g\sqrt{4\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\right)^2 + \sin^2\frac{\alpha}{2}} = 1{,}03g$$

a svírá stejně jako výsledná síla $\boldsymbol{F}$ se směrem okamžité rychlosti kuličky úhel β, pro který platí

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{a_\mathrm{d}}{a_\mathrm{t}} = \frac{2\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 1{,}59, \quad \beta = 58°.$$

5 bodů

Poznámka: Všechny výsledky jsou nezávislé na délce l niti.

2. a) Odpory žárovek při jmenovitém režimu jsou

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = 60\ \Omega, \quad R_2 = \frac{U_2}{I_2} = 16\ \Omega.$$

Pokud by se tyto odpory zachovaly v zapojení podle obr. 1, byl by poměr napětí na žárovkách

$$\frac{U_1'}{U_2'} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{60}{16} = 3{,}75.$$

Napětí na první žárovce by bylo

$$U_1' = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U = \frac{60}{76} U = 7{,}9\ \mathrm{V},$$

na druhé

$$U_2' = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U = \frac{16}{76} U = 2{,}1\ \mathrm{V}.$$

Ve skutečnosti bude napětí na první žárovce ještě větší, neboť přetížením (vysokou teplotou) odpor vlákna ještě vzroste, zatímco u druhé žárovky, na níž je napětí naopak menší než její jmenovité napětí, odpor chladnějšího vlákna bude menší než jmenovitý. Vlákno první žárovky se přepálí.

3 body

b) K dosažení jmenovitých napětí na žárovkách je nutné, aby poměr odporů mezi zdířkami byl $U_{AB} : U_{BC} = 3 : 2$.
To znamená, že připojením rezistoru mezi zdířky A a B musíme zmenšit odpor mezi těmito zdířkami na hodnotu $R_{AB} = \frac{3}{2} R_2 = 24\ \Omega$.
Platí tedy

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R} \quad \Rightarrow R = \frac{R_1 R_{AB}}{R_1 - R_{AB}} = 40\ \Omega.$$

3 body

c) Přidaným rezistorem prochází při napětí U_1 proud $I_2 - I_1$, jeho příkon je $P = U_1(I_2 - I_1) = 0{,}90\ \mathrm{W}$.

2 body

d) Příkon celé soustavy je $P_0 = U I_2$. Pro účinnost pak dostaneme

$$\eta = \frac{P_1 + P_2}{P_0} = \frac{U_1 I_1 + U_2 I_2}{U I_2} = 0{,}64.$$

2 body

Poznámka: Vzhledem k platnosti rovnice $U = U_1 + U_2$ je třeba v obecném řešení částí c) a d) uznat jakýkoliv správný tvar obsahující kombinaci veličin U, U_1, U_2, např. v části d) $\eta = \dfrac{U_1 I_1 + U_2 I_2}{(U_1 + U_2) I_2}$.

3. a) Z grafů určíme maximální výchylky $y_{\mathrm{m1}} = 0{,}05$ m, $y_{\mathrm{m2}} = 0{,}03$ m a periody $T_1 = 1{,}6$ s, $T_2 = 0{,}9$ s. Stačí porovnat kinetické energie těles při průchodu rovnovážnou polohou, kde je potenciální energie nulová. Poměr maximálních rychlostí kmitů je

$$\frac{v_{\mathrm{m1}}}{v_{\mathrm{m2}}} = \frac{y_{\mathrm{m1}}\omega_1}{y_{\mathrm{m2}}\omega_2} = \frac{y_{\mathrm{m1}}\dfrac{2\pi}{T_1}}{y_{\mathrm{m2}}\dfrac{2\pi}{T_2}} = \frac{y_{\mathrm{m1}}T_2}{y_{\mathrm{m2}}T_1} = \frac{0{,}05\cdot 0{,}9}{0{,}03\cdot 1{,}6} = 0{,}94 < 1.$$

Při stejné hmotnosti má druhé těleso větší maximální rychlost, tudíž má při průchodu rovnovážnou polohou větší kinetickou energii a též větší celkovou mechanickou energii kmitů.

2 body

b) Maximální zrychlení je určeno vztahem

$$a_{\mathrm{m1}} = y_{\mathrm{m1}}\omega_1^2 = y_{\mathrm{m1}}\frac{4\pi^2}{T_1^2} = 0{,}05\frac{4\pi^2}{1{,}6^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 0{,}77\ \mathrm{m\cdot s^{-2}},$$

$$a_{\mathrm{m2}} = y_{\mathrm{m2}}\omega_2^2 = y_{\mathrm{m2}}\frac{4\pi^2}{T_2^2} = 0{,}03\frac{4\pi^2}{0{,}9^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 1{,}46\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

2 body

c) Časovou závislost výchylky a rychlosti prvního oscilátoru popisují vztahy

$$y_1 = y_{\mathrm{m1}}\cos(\omega_1 t),\quad v_1 = v_{\mathrm{m1}}\cos\left(\omega_1 t + \frac{\pi}{2}\right) = y_{\mathrm{m1}}\frac{2\pi}{T_1}\cos\left(\frac{2\pi}{T_1}t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Pro druhý oscilátor platí $y_2 = y_{\mathrm{m2}}\cos\left[\omega_2(t - 0{,}4\ \mathrm{s})\right]$,

$$v_2 = v_{\mathrm{m2}}\cos\left[\omega_2(t-0{,}4\ \mathrm{s}) + \frac{\pi}{2}\right] = y_{\mathrm{m2}}\frac{2\pi}{T_2}\cos\left[\frac{2\pi}{T_2}(t-0{,}4\ \mathrm{s}) + \frac{\pi}{2}\right].$$

V čase $t = 8{,}5$ s dostaneme

$$v_1 = \frac{\pi}{16}\cdot\cos\left(\frac{89}{8}\pi\right)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = -0{,}18\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$v_2 = \frac{\pi}{15}\cdot\cos\left(\frac{37}{2}\pi\right)\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

4 body

d) Periody kmitů obou oscilátorů jsou v poměru $T_1 : T_2 = 16 : 9$. Protože se jedná o poměr nesoudělných čísel, znamená to, že se stejná fáze opakuje současně u obou oscilátorů po 9 kmitech 1. pružiny neboli po 16 kmitech 2. pružiny. Z toho plyne, že perioda složených (neharmonických) kmitů je

$$T = 9T_1 = 16T_2 = 14{,}4\ \mathrm{s}.$$

2 body

4. a) Z Hookova zákona plyne

$$\Delta L_0 = \frac{L_0F_0}{ES} = \frac{4L_0F_0}{E\pi d^2} = 9{,}2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}.$$

2 body

b) Užitím Pythagorovy věty a aproximace dostaneme

$$\Delta L = 2\left(\sqrt{\left(\frac{L_0}{2}\right)^2 + x^2} - \frac{L_0}{2}\right) = L_0\left(\sqrt{1+\left(\frac{2x}{L_0}\right)^2} - 1\right) \approx$$

$$\approx L_0\left(1 + \frac{2x^2}{L_0^2} - 1\right) = \frac{2x^2}{L_0} = 3{,}1 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}.$$

2 body

c) Z Hookova zákona plyne $\Delta L = \dfrac{L_0(F_1 - F_0)}{ES}$,

$$F_1 = F_0 + \frac{ES}{L_0}\Delta L \approx F_0 + \frac{E\pi d^2x^2}{2L_0^2} = 13{,}0\ \mathrm{N}.$$

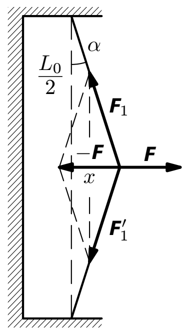
2 body

d) Z obr. R3 odvodíme

$$\frac{\frac{F}{2}}{F_1} = \sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{\frac{L_0}{2}},$$

$$F \approx F_1 \cdot \frac{4x}{L_0} = \frac{4F_0x}{L_0} + \frac{2E\pi d^2x^3}{L_0^3} = 0{,}80\ \mathrm{N}. \qquad (1)$$

2 body



Obr. R3

e) Vztah mezi prodloužením drátu a sílou, která jej napíná, je lineární. Při prodloužení struny o ΔL strunu napínala průměrná síla o velikosti $\dfrac{F_0 + F_1}{2}$ a vykonala práci

$$W = \frac{F_0 + F_1}{2}\Delta L = \left(F_0 + \frac{ES}{2L_0}\Delta L\right)\Delta L \approx F_0\frac{2x^2}{L_0} + \frac{E\pi d^2x^4}{2L_0^3} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}.$$

2 body

Poznámky:

1. Bez použití aproximací dostáváme v obecném řešení vztahy

$$\Delta L = L_0\left(\sqrt{1+\left(\frac{2x}{L_0}\right)^2}-1\right), \quad F_1 = F_0 + \frac{\left(\sqrt{1+\left(\frac{2x}{L_0}\right)^2}-1\right)E\pi d^2}{4},$$

$$F = \left(F_0 + \frac{\left(\sqrt{1+\left(\frac{2x}{L_0}\right)^2}-1\right)E\pi d^2}{4}\right)\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{L_0}{2x}\right)^2}},$$

$$W = \left(F_0 + \frac{\left(\sqrt{1+\left(\frac{2x}{L_0}\right)^2}-1\right)E\pi d^2}{8}\right)L_0\left(\sqrt{1+\left(\frac{2x}{L_0}\right)^2}-1\right).$$

Numerické výsledky jsou ovšem při dané přesnosti výpočtu stejné.

2. Práce při vychýlení středu struny se dá snadno vypočítat integrací funkce (1):

$$W = \int_0^x F\mathrm{d}x = \frac{2F_0x^2}{L_0} + \frac{E\pi d^2x^4}{2L_0^3}.$$