Řešení úloh 1. kola 54. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: J. Jírů (1), J. Thomas (2, 3, 5), M. Jarešová (4, 7), P. Šedivý (6).

1. a) Během brzdění roste dráha s časem podle vzorce

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2. \tag{1}$$

Ze vzorce plyne $a = \dfrac{2(v_0 t - s)}{t^2}$.

Dosazením číselných hodnot $s = 340\ \mathrm{m} - 192\ \mathrm{m} = 148\ \mathrm{m}$, $v_0 = 33{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $t = 5{,}0\ \mathrm{s}$ dostaneme

$$a = \frac{2(33,6 \cdot 5 - 148)}{5^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

3 body

b) Rovnici (1) upravíme na tvar kvadratické rovnice

$$\frac{1}{2}at^2 - v_0 t + s = 0. \tag{2}$$

jejímž řešením jsou kořeny $t_{1,2} = \dfrac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2as}}{a}$.

Dosazením číselných hodnot $v_0 = 33{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $a = 1{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a $s = 340\ \mathrm{m}$ dostaneme

$$t_{1,2} = \frac{33{,}6 \pm \sqrt{33{,}6^2 - 2 \cdot 1{,}6 \cdot 340}}{1{,}6}\ \mathrm{s}.$$

Kvadratická rovnice (2) má dva kořeny $t_1 = 17\ \mathrm{s}$ a $t_2 = 25\ \mathrm{s}$. Rovnice (2) však popisuje pohyb vlaku jen po dobu brzdění, tj. pouze do času $v_0/a = 21\ \mathrm{s}$, tedy na časovém intervalu $\langle 0\ \mathrm{s}, 21\ \mathrm{s}\rangle$. Proto je řešením pouze kořen $t_1 = 17\ \mathrm{s}$.

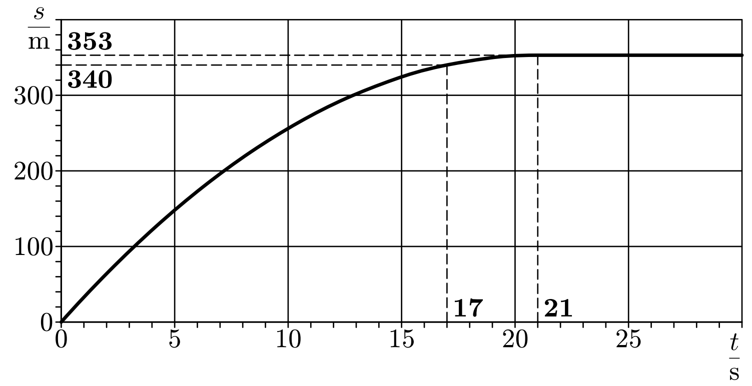
3 body

c) Dosazením číselných hodnot konstant do rovnice (1) dostaneme funkční závislost

$$\{s\} = 33{,}6\{t\} - 0{,}8\{t\}^2,$$

která popisuje pohyb vlaku do okamžiku zastavení, tj. do času $t = 21\ \mathrm{s}$. Po zbývající dobu zůstává dráha konstantní.

4 body



2. a) Z rovnosti tíhové a vztlakové síly plyne

$$V\varrho g = V_1 \varrho_1 g \qquad \Rightarrow \qquad S\varrho = S_1 \varrho_1,$$

kde S_1 je obsah části průřezu pod hladinou vody (obr. R1). Odtud

$$\varrho = \frac{S_1 \varrho_1}{S}. \tag{1}$$

Pro úhel α platí

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 53{,}13°, \quad 2\alpha = 106{,}3°, \quad 360° - 2\alpha = 253{,}7°.$$

$$a = r\sin\alpha = r\sqrt{1-\cos^2\alpha} = r\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}r,$$

$$S_1 = \frac{360° - 2\alpha}{360°}\pi r^2 + a \cdot r\cos\alpha = \left(\frac{253{,}7}{360} + \frac{12}{25\pi}\right)\pi r^2 = 0{,}858\pi r^2.$$

Dosazením do (1) dostaneme $\varrho = 858\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. **5 bodů**

b) Nyní platí (obr. R2):

$$V\varrho g = V_1\varrho_1 g + V_2\varrho_2 g \qquad \Rightarrow \qquad S\varrho = S_1\varrho_1 + S_2\varrho_2,$$

$$\varrho_2 = \frac{S\varrho - S_1\varrho_1}{S_2}. \tag{2}$$

Vypočítáme obsah S_1 plochy pod vodou a obsah S_2 plochy ve druhé kapalině: Pro úhel β platí

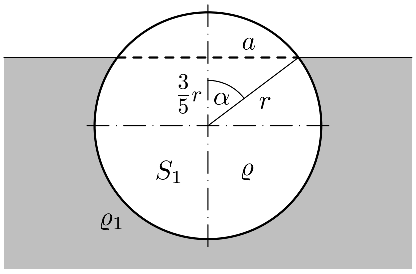
$$\cos\beta = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \beta = 75{,}5°, \quad 2\beta = 151°, \quad 360° - 2\beta = 209°.$$

$$b = r\sqrt{1-\cos^2\beta} = r\sqrt{1-\frac{1}{16}} = r\sqrt{\frac{15}{16}},$$

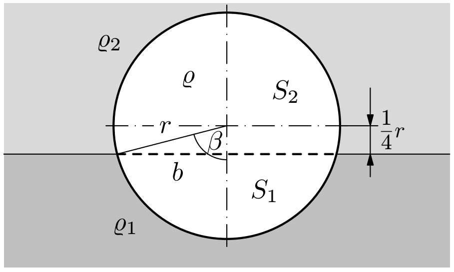
$$S_2 = \frac{360° - 2\beta}{360°}\pi r^2 + b\cdot r\cos\beta = \left(\frac{209}{360} + \frac{\sqrt{15}}{16\pi}\right)\pi r^2 = 0{,}6576\pi r^2,$$

$$S_1 = 0{,}3424\pi r^2.$$

Dosazením do (2) dostaneme $\varrho_2 = 784\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. **5 bodů**



Obr. R1



Obr. R2

3. a) Kladka se zastaví v rovnovážné poloze, kde síly, kterými působí lanko, jsou z obou stran stejně velké a mají stejnou odchylku α od svislého směru (obr. R3). Platí

$$\sin\alpha = \frac{l}{L}, \qquad \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{l^2}{L^2}} = \frac{\sqrt{L^2-l^2}}{L}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{l}{\sqrt{L^2-l^2}}.$$

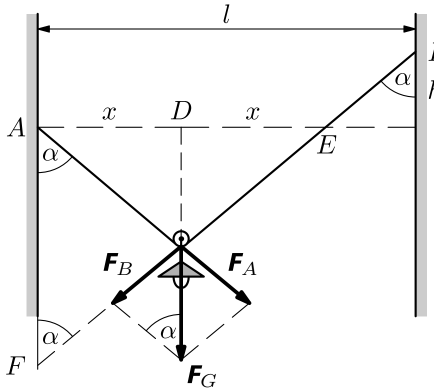
Z trojúhelníku AFE odvodíme

$$2x = l - h\operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l - \dfrac{hl}{\sqrt{L^2-l^2}}}{2} = 3{,}8\ \mathrm{m}.$$

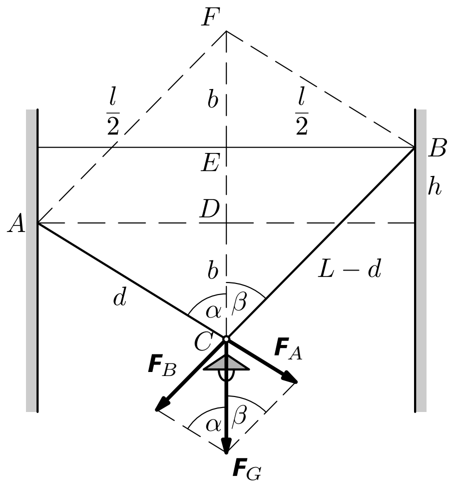
Síly, kterými působí lanko v bodech A a B, mají velikost

$$F_A = F_B = \frac{F_G}{2\cos\alpha} = \frac{mgL}{2\sqrt{L^2-l^2}} = 115\ \mathrm{N}.$$

4 body



Obr. R3



Obr. R4

b) V druhém případě vyjdeme z obr. R4. Užitím Pythagorovy věty dostaneme soustavu rovnic

$$b^2 = d^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2, \qquad (h+b)^2 = (L-d)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Odečtením rovnic a úpravou vyjádříme b:

$$2bh + h^2 = L^2 - 2Ld, \qquad b = \frac{L^2 - 2Ld - h^2}{2h}.$$

Dosadíme do první rovnice, upravíme a dojdeme ke kvadratické rovnici

$$(4L^2 - 4h^2)d^2 - (4L^3 - 4Lh^2)d + L^4 + h^4 - 2L^2h^2 + l^2h^2 = 0,$$

po dosazení

$$660\{d\}^2 - 8\,580\{d\} + 27\,625 = 0.$$

Z kořenů $d_1 = 7{,}1276$ m, $d_2 = 5{,}8724$ m vyhovuje úloze pouze druhý kořen $d \doteq 5{,}87$ m. **3 body**

Z podobnosti trojúhelníku BCF s trojúhelníkem, jehož strany tvoří síly $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$ a $\boldsymbol{F}_G$, plyne

$$\frac{F_A}{F_G} = \frac{d}{2b+h} = \frac{dh}{L^2 - 2Ld}, \qquad \frac{F_B}{F_A} = \frac{L-d}{d}.$$

Z toho

$$F_A = \frac{mgdh}{L^2 - 2Ld} = 106 \text{ N}, \qquad F_B = \frac{mg(L-d)h}{L^2 - 2Ld} = 129 \text{ N}.$$

Alternativní řešení:
Určíme úhly v rovnoběžníku sil. Z obr. R4 odvodíme

$$\alpha = \arcsin\frac{l}{2d} = 58{,}37°, \qquad \beta = \arcsin\frac{l}{2(L-d)} = 44{,}55°.$$

Použitím sinové věty pak

$$F_A = \frac{mg\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = 106 \text{ N}, \qquad F_B = \frac{mg\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = 129 \text{ N}.$$

3 body

4. a) Obecně platí, že celková odporová síla je dána vztahem

$$F = \frac{1}{2}C\varrho Sv^2 + mg\frac{\xi}{r}$$

a výkon je dán vztahem $P = Fv$. Po dosazení v zimě

$$F_1 = \left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}35 \cdot 1{,}22 \cdot 2{,}4 \cdot 25^2 + 1\,600 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{0{,}003}{0{,}325}\right) \text{ N} = 465 \text{ N}.$$

$$P_1 = 465 \cdot 25 \text{ W} = 11{,}6 \text{ kW}$$

a v létě

$$F_2 = \left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}35 \cdot 1{,}02 \cdot 2{,}4 \cdot 25^2 + 1\,600 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{0{,}001\,6}{0{,}325}\right) \text{ N} = 345 \text{ N}.$$

$$P_1 = 345 \cdot 25 \text{ W} = 8{,}6 \text{ kW}.$$

3 body

b) $150 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} = \frac{150}{3{,}6} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Určíme výkon motoru při této rychlosti jízdy a porovnáme s údajem udávaným výrobcem. Pro výkon obecně platí:

$$P = \left(\frac{1}{2}C\varrho Sv^2 + mg\frac{\xi}{r}\right)v.$$

Po dosazení dostaneme v zimě: $P_1 = 43{,}1 \text{ kW} > 40 \text{ kW}$. Osobní automobil v zimě touto rychlostí jet nemůže, motor nedosáhne potřebného výkonu. V létě pak dostaneme $P_2 = 34{,}2 \text{ kW} < 40 \text{ kW}$. V létě automobil touto rychlostí jet může.

2 body

c) Při jízdě automobilu do kopce rovnoměrným pohybem platí pro velikost tahové síly motoru vztah

$$F = \frac{1}{2}C\varrho S v^2 + mg\sin\alpha + mg\cos\alpha\frac{\xi}{r}.$$

Vzhledem k tomu, že platí $\sin\alpha = p$ a $\cos\alpha = \sqrt{1-p^2}$, můžeme výše uvedený vztah ještě přepsat na tvar

$$F = \frac{1}{2}C\varrho S v^2 + mgp + mg\sqrt{1-p^2}\cdot\frac{\xi}{r}.$$

Výkon $P = Fv$. Po dosazení zadaných hodnot ($p = 0{,}04$) dostaneme v zimě $F_1 = 1\,093$ N, $P_1 = 27{,}3$ kW a v létě $F_2 = 973$ N, $P_2 = 24{,}3$ kW.

2 body

d) Porovnáním vztahů $F_0 = mg\cdot\frac{\xi}{r}$, $F_0' = mg\cdot\frac{\xi'}{r}$ dostaneme

$$\xi' = \frac{F_0'}{F_0}\xi = 0{,}9\cdot 0{,}001\,6\ \mathrm{m} = 0{,}001\,4\ \mathrm{m}.$$

Celková odporová síla je

$$F_2' = \frac{1}{2}CS\varrho v^2 + 0{,}9mg\frac{\xi}{r} = 337\ \mathrm{N}.$$

Spotřeba benzinu je přímo úměrná celkové odporové síle. Vzhledem k tomu, že $\frac{F_2'}{F_2} = \frac{337}{345} = 0{,}98$, můžeme říci, že spotřeba benzinu poklesne o 2 %.

3 body

5. a) Vzduch uzavřený nad rtutí v pravém rameni můžeme považovat za ideální plyn. Protože se teplota nemění, jde o děj izotermický, pro který platí Boylův-Mariottův zákon:

$$p_\mathrm{a}\frac{L}{2}S = (p_\mathrm{a} + x\varrho_1 g)xS.$$

Úpravou dostaneme kvadratickou rovnici $\varrho_1 g x^2 + p_\mathrm{a}x - \frac{p_\mathrm{a}L}{2} = 0$.

Úloze vyhovuje kladný kořen $x = \frac{-p_\mathrm{a} + \sqrt{p_\mathrm{a}^2 + 2L\varrho_1 g p_\mathrm{a}}}{2\varrho_1 g} = 8{,}9$ cm.

3 body

b) Při zahřátí se hustota rtuti změní na $\varrho_2 = \frac{\varrho_1}{1+\beta\Delta t} = 13\,385\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

Množství vzduchu nad rtutí v pravém rameni se nezměnilo, proto platí stavová rovnice ve tvaru

$$\frac{p_\mathrm{a}\frac{L}{2}S}{T_1} = \frac{(p_\mathrm{a} + y\varrho_2 g)yS}{T_2}.$$

Dostáváme opět kvadratickou rovnici

$$\varrho_2 g y^2 + p_\mathrm{a} y - \frac{p_\mathrm{a} L T_2}{2T_1} = 0.$$

Smysl má opět jen kladný kořen

$$y = \frac{-\,p_\mathrm{a} + \sqrt{p_\mathrm{a}^2 + \frac{2L\varrho_2 g T_2 p_\mathrm{a}}{T_1}}}{2\varrho_2 g} = 10{,}6\ \mathrm{cm}.$$

3 body

c) Při teplotě t_1 měla rtuť v trubici objem $V_1 = S(3L - x)$. Ten se při zahřátí na teplotu t_2 zvětší o $\Delta V_1 = V_1 \beta \Delta t = S(3L - x)\beta\Delta t$.
Objem vzduchu se při zahřátí trubice zvětší o $\Delta V_2 = (y - x)S$.
Z trubice tedy vyteče rtuť, která bude mít při teplotě t_2 objem $\Delta V_1 + \Delta V_2$ a hmotnost

$$m = \varrho_2(\Delta V_1 + \Delta V_2) = \varrho_2 S((3L - x)\beta\Delta t + y - x) = 15{,}1\ \mathrm{g}.$$

4 body

7. a) Děj [0] → [1] je izobarický a tudíž můžeme psát: $p_0 = konst.$, tj. $p_1 = p_0$. Na základě zadání je $V_1 = 4V_0$, tedy platí $\dfrac{V_0}{T_0} = \dfrac{4V_0}{T_1}$, z čehož $T_1 = 4T_0$.

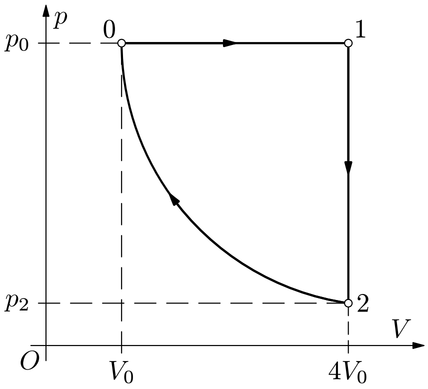
Děj [1] → [2] je izochorický a tedy platí: $V_2 = V_1 = 4V_0$, $\dfrac{p_1}{T_1} = \dfrac{p_0}{4T_0} = \dfrac{p_2}{T_2}$, z čehož $T_2 = \dfrac{p_2}{p_0} 4T_0$.

Děj [2] → [0] je adiabatický, což můžeme vyjádřit pomocí rovnice: $p_2 V_2^{\varkappa} = p_0 V_0^{\varkappa}$. Po dosazení $p_2 (4V_0)^{\varkappa} = p_0 V_0^{\varkappa}$ můžeme vyjádřit tlak p_2. Dostaneme $p_2 = \dfrac{1}{4^{\varkappa}} p_0$.

Po dosazení do vztahu pro T_2 dostaneme $T_2 = \dfrac{p_2}{p_0} 4T_0 = \dfrac{1}{4^{\varkappa}} 4T_0 = 4^{1-\varkappa} T_0$.
Stav 0 charakterizují veličiny p_0, V_0, T_0; stav 1 je dán veličinami $p_1 = p_0$, $V_1 = 4V_0$, $T_1 = 4T_0$; stav 2 veličinami $p_2 = \dfrac{1}{4^{\varkappa}} p_0$, $V_2 = 4V_0$, $T_2 = 4^{1-\varkappa} T_0$.

4 body

b) p-V diagram je znázorněn na obr. R5



Obr. R5

3 body

c) Plyn přijímá teplo pouze při izobarickém rozpínání, tj. platí

$$Q = W' + \Delta U = p_0(4V_0 - V_0) + \frac{3}{2}nR(4T_0 - T_0) = 3p_0V_0 + \frac{3}{2}\cdot 3p_0V_0 = 7{,}5p_0V_0.$$

Práce vykonaná plynem v průběhu cyklu je rovna součtu prací při izobarickém rozpínání a adiabatickém stlačování, tedy

$$W' = 3p_0V_0 - \frac{3}{2}nR\left(T_0 - 4^{1-\varkappa}T_0\right) = 1{,}5p_0V_0\left(1 + 4^{1-\varkappa}\right).$$

Účinnost je dána vztahem

$$\eta = \frac{W'}{Q} = \frac{1{,}5p_0V_0\left(1 + 4^{1-\varkappa}\right)}{7{,}5p_0V_0} = \frac{1 + 4^{1-1{,}67}}{5} = 0{,}28 = 28\ \%.$$

3 body