Řešení úloh krajského kola 54. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie D

Autor úloh J. Jírů

1. a) Označme s délku okruhu, $v_1 = 31{,}50\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = 8{,}75\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ průměrnou rychlost v prvním kole, $v_{23} = 30{,}24\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = 8{,}40\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ průměrnou rychlost a $t_{23} = 38$ min 45 s dobu jízdy ve druhém a třetím kole. Platí rovnice:

$$2s = v_{23}t_{23}.$$

Z rovnice plyne

$$s = \frac{v_{23}t_{23}}{2} = \frac{8{,}4\cdot 2\,325}{2}\ \mathrm{m} = 9\,765\ \mathrm{m}.$$

Doba jízdy je

$$t = t_1 + t_{23} = \frac{s}{v_1} + t_{23} = \left(\frac{9\,765}{8{,}75} + 2\,325\right)\ \mathrm{s} = 3\,441\ \mathrm{s} = 57\ \mathrm{min}\ 21\ \mathrm{s}.$$

Průměrná rychlost je

$$v_\mathrm{p} = \frac{3s}{t} = \frac{3\cdot 9\,765}{3\,441}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 30{,}65\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

6 bodů

b) Při zavedeném označení z úlohy a) platí:

$$v_\mathrm{p} = \frac{3s}{t},$$

kde

$$t = t_1 + t_{23} = \frac{s}{v_1} + \frac{2s}{v_{23}}.$$

Po dosazení za t do výše uvedeného vztahu pro v_p a úpravě dostaneme

$$v_\mathrm{p} = \frac{3s}{\dfrac{s}{v_1} + \dfrac{2s}{v_{23}}} = \frac{3v_1v_{23}}{2v_1 + v_{23}}.$$

Číselně vychází

$$v_\mathrm{p} = \frac{3\cdot 32{,}08\cdot 30{,}37}{2\cdot 32{,}08 + 30{,}37}\ \mathrm{km\cdot h^{-1}} = 30{,}92\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

4 body

2. a) Velikosti a_1, a_2 zrychlení na prvním a na druhém úseku jsou

$$a_1 = \frac{v_1}{t_1} = 1{,}33\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}, \qquad a_2 = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = 0{,}53\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

S větším zrychlením se pohyboval na prvním úseku. Místo výpočtů je možné uvážit, že na prvním úseku dosáhl větší změny rychlosti za kratší čas než na úseku druhém.

2 body

b) Práce W_1 na prvním úseku je rovna získané kinetické energii v čase t_1:

$$W_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = 48\ \mathrm{kJ}.$$

Práce W_2 na druhém úseku je rovna přírůstku kinetické energie mezi časy t_1 a t_2:

$$W_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = 60\ \mathrm{kJ}.$$

Větší práci vykonal na druhém úseku.

2 body

c) Průměrný výkon na prvním úseku je $P_1 = \dfrac{W_1}{t_1} = 8\ \mathrm{kW}$.

Průměrný výkon na druhém úseku je $P_2 = \dfrac{W_2}{t_2 - t_1} = 8\ \mathrm{kW}$. Na obou úsecích se pohyboval se stejným průměrným výkonem.

2 body

d) K výpočtu použijeme součin velikosti okamžité pohybové síly $F = ma$ a velikosti okamžité rychlosti v:

$$P = Fv = mav.$$

Na každém z úseků je síla konstantní, velikost rychlosti se zvětšuje. Stačí proto porovnat okamžité výkony na koncích úseků. Na konci prvního úseku je okamžitý výkon $P_1 = ma_1v_1 = 16\ \mathrm{kW}$, na konci druhého úseku $P_2 = ma_2v_2 = 9{,}6\ \mathrm{kW}$. Maximální okamžitý výkon během celého rozjíždění je tedy $P_{\max} = 16\ \mathrm{kW}$.

2 body

e) Dráha na prvním úseku je $s_1 = \dfrac{1}{2}a_1t_1^2 = 24\ \mathrm{m}$.

Dráha na druhém úseku je $s_2 = v_1(t_2 - t_1) + \dfrac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 = 75\ \mathrm{m}$.

Automobil se rozjížděl na celkové dráze $s = s_1 + s_2 = 99\ \mathrm{m}$.

2 body

3. a) Oba chlapci mají stejnou hmotnost a úhlovou rychlost, ale různou velikost obvodové rychlosti. Ve vzorci $F = \frac{mv^2}{r}$ je kromě různého poloměru ještě různá velikost obvodové rychlosti, která je přímo úměrná poloměru (ve výrazu jsou konstanta m a dvě proměnné v, r), proto nejde o nepřímou úměrnost. Ve vzorci $F = m\omega^2 r$ je úhlová rychlost pro oba chlapce stejná (ve výrazu je konstanta $m\omega^2$ a jediná proměnná r), proto vzorec vyjadřuje závislost velikosti síly na poloměru jako přímou úměrnost. Pravdu má pouze Ota.

2 body

b) Zvolme bod kolotoče ve vzdálenosti r od osy otáčení, který obíhá při rovnoměrném pohybu obvodovou rychlostí o velikosti v. Pro jeho dráhu při rovnoměrně zrychleném pohybu platí

$$3 \cdot 2\pi r = \frac{1}{2}at_3^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{t_3} \cdot t_3^2 = \frac{1}{2}vt_3.$$

Při rovnoměrném pohybu platí

$$2\pi r = vT.$$

Porovnáním dostaneme

$$T = \frac{t_3}{6} = 4{,}5 \text{ s.}$$

3 body

c) Pro zvolený bod z úlohy b) platí:

$$2\pi r = \frac{1}{2}a(\Delta t_1)^2, \qquad 6\pi r = \frac{1}{2}at_3^2.$$

Z podílu rovnic plyne $\Delta t_1 = \frac{t_3}{\sqrt{3}} = 15{,}6$ s.

Označme $t_2 = \Delta t_1 + \Delta t_2$ čas dokončení druhé otočky. Pak obdobně platí

$$4\pi r = \frac{1}{2}at_2^2, \qquad 6\pi r = \frac{1}{2}at_3^2.$$

Z podílu rovnic plyne $t_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot t_3 = 22{,}0$ s

a dále $\Delta t_2 = t_2 - \Delta t_1 = 6{,}5$ s.

Dobu třetí otočky spočteme již snadno $\Delta t_3 = t_3 - t_2 = 5{,}0$ s.

5 bodů

4. a) Označme v velikost rychlosti chlapce, kterou získal odrazem od první loďky. V první části děje se uplatňuje ZZH v soustavě první loďka a chlapec, v druhé části děje ZZH v soustavě chlapec a druhá loďka. Platí:

$$m_0 v_1 = mv, \tag{1}$$

$$mv = (m + m_0)v_2.$$

Z rovnic plyne

$$v_2 = \frac{m_0}{m + m_0} v_1 = \frac{90}{60 + 90} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 0{,}30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}. \tag{2}$$

Velikost vzájemné rychlosti loděk je $w = v_1 + v_2$, dosazením vztahu (2) dostaneme

$$w = v_1 + \frac{m_0}{m + m_0} v_1 = \frac{m + 2m_0}{m + m_0} v_1 = \frac{60 + 2 \cdot 90}{60 + 90} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 0{,}80\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

4 body

b) Chlapec vykonal práci působením síly na první loďku, čímž uvedl tuto loďku a sebe do pohybu. Vykonaná práce je rovna součtu kinetických energií první loďky a chlapce:

$$W = \frac{1}{2} m_0 v_1^2 + \frac{1}{2} m v^2,$$

kde velikost v rychlosti chlapce získáme ze vztahu (1)

$$v = \frac{m_0}{m} v_1.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$W = \frac{(m + m_0)m_0}{2m} v_1^2 = \frac{(60 + 90) \cdot 90}{2 \cdot 60} \cdot 0{,}5^2\ \mathrm{J} = 28\ \mathrm{J}.$$

3 body

c) Hledaná kinetická energie je součtem kinetických energií první loďky a druhé loďky s chlapcem:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m_0 v_1^2 + \frac{1}{2}(m + m_0) v_2^2,$$

kde velikost v_2 rychlosti druhé loďky s chlapcem je dána vztahem (2). Po dosazení a úpravě dostaneme:

$$E_\mathrm{k} = \frac{m_0(m + 2m_0)}{2(m + m_0)} v_1^2 = \frac{90 \cdot (60 + 2 \cdot 90)}{2 \cdot (60 + 90)} \cdot 0{,}5^2 = 18\ \mathrm{J}.$$

3 body