Řešení praktické úlohy
celostátního kola 55. ročníku FO

a) Připojíme-li k můstku vrcholy C, D bude vzhledem k souměrnosti obvodu na vrcholech A, B stejný potenciál a rezistor mezi nimi můžeme vypustit. Dostáváme náhradní síť podle obr. 3 a vzorec

$$R_{CD} = \frac{R}{2} \qquad (= R_2 \quad \text{nebo} \quad R_3). \tag{1}$$

Podobně tomu bude, připojíme-li k můstku vrcholy A, B. Tentokrát bude stejný potenciál na vrcholech C, D, příslušný rezistor můžeme vypustit a dostáváme náhradní síť podle obr. 4 a vzorec

$$R_{AB} = \frac{rR}{r+R} \qquad (= R_3 \quad \text{nebo} \quad R_2). \tag{2}$$

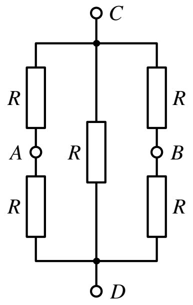
Úpravou vzorců (1) a (2) dostaneme

$$R = 2R_{CD}, \qquad r = \frac{2R_{CD}R_{AB}}{2R_{CD} - R_{AB}}. \tag{3,4}$$

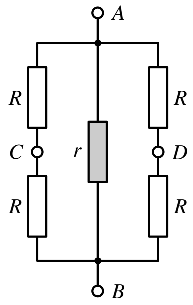
Zbývající čtyři odpory jsou stejné:

$$R_1 = R_{AC} = R_{AD} = R_{BC} = R_{BD}. \tag{5}$$

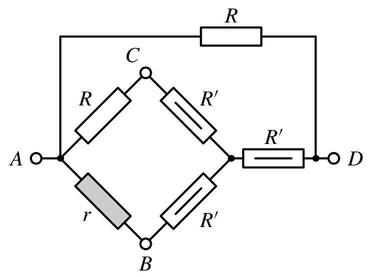
1. část diskuze
Situace je jednoznačná, jen když $2R_2 - R_3 > 0$ a současně $2R_3 - R_2 < 0$. Pak zřejmě $R_2 = R_{CD}$, $R_3 = R_{AB}$, neboť jmenovatel ve zlomku (4) musí být kladný. Jestliže však také $2R_3 - R_2 > 0$, musíme přihlédnout i k hodnotě odporu R_1. Vzorec, který vyjadřuje odpor R_1 pomocí odporů r a R odvodíme takto: Trojúhelník BCD nahradíme hvězdou ze tří stejných rezistorů o odporu R' a dostaneme náhradní síť podle obr. 5.



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Ze vzorců pro transfiguraci odvodíme

$$R' = \frac{R \cdot R}{R + R + R} = \frac{R}{3}.$$

Platí

$$R_1 = R_{AD} = \frac{R\left[\dfrac{(R'+R)(R'+r)}{2R'+R+r} + R'\right]}{R + \dfrac{(R'+R)(R'+r)}{2R'+R+r} + R'} = \frac{R\left[\dfrac{\frac{4}{3}R\left(\frac{R}{3}+r\right)}{\frac{5}{3}R+r} + \dfrac{R}{3}\right]}{\dfrac{4}{3}R + \dfrac{\frac{4}{3}R\left(\frac{R}{3}+r\right)}{\frac{5}{3}R+r}} =$$

$$= \frac{\frac{4}{9}R^2 + \frac{4}{3}Rr + \frac{5}{9}R^2 + \frac{1}{3}Rr}{\frac{20}{9}R + \frac{4}{3}r + \frac{4}{9}R + \frac{4}{3}r} = \frac{3R^2 + 5Rr}{8(R+r)}.$$

Dosazením z (3) a (4) dostaneme

$$R_1 = \frac{3 \cdot 4R_{CD}^2 + \dfrac{5 \cdot 4R_{CD}^2 R_{AB}}{2R_{CD} - R_{AB}}}{8\left(2R_{CD} + \dfrac{2R_{CD}R_{AB}}{2R_{CD} - R_{AB}}\right)} = \frac{3R_{CD} + \dfrac{5R_{CD}R_{AB}}{2R_{CD} - R_{AB}}}{4\left(1 + \dfrac{R_{AB}}{2R_{CD} - R_{AB}}\right)},$$

$$R_1 = \frac{3R_{CD} + R_{AB}}{4}. \tag{6}$$

2. část diskuze

V mezích přesnosti měření může nastat pouze jedna ze dvou možností:

a) Platí $R_1 = \dfrac{3R_2 + R_3}{4}$. Pak $R_{CD} = R_2$, $R_{AB} = R_3$, hledaný rezistor je mezi vrcholy, kde jsme naměřili odpor R_3 a má odpor $r = \dfrac{2R_3R_2}{2R_3 - R_2}$.

b) Platí $R_1 = \dfrac{3R_3 + R_2}{4}$. Pak $R_{CD} = R_3$, $R_{AB} = R_2$, hledaný rezistor je mezi vrcholy, kde jsme naměřili odpor R_2 a má odpor $r = \dfrac{2R_3R_2}{2R_2 - R_3}$.

Naše kritérium můžeme ještě vylepšit:

Vztah (6) upravíme na tvar

$$R_1 = \frac{R_{CD} + R_{AB}}{2} + \frac{R_{CD} - R_{AB}}{4}. \tag{7}$$

Dále platí

$$\frac{R_{CD}+R_{AB}}{2}=\frac{R_2+R_3}{2}, \tag{8}$$

$$R_{CD}-R_{AB}=\frac{R}{2}-\frac{Rr}{R+r}=\frac{R^2+Rr-2Rr}{2(R+r)}=\frac{R(R-r)}{2(R+r)}. \tag{9}$$

Protože $r\neq R$, jsou dvě možnosti:

α) $R>r$. V tomto případě z (9) plyne $R_{CD}>R_{AB}$, tedy

$$R_{CD}=R_2, \quad R_{AB}=R_3.$$

Vzhledem k (7) a (8)

$$R_1>\frac{R_{CD}+R_{AB}}{2}=\frac{R_2+R_3}{2}. \tag{10}$$

β) $R<r$. V tomto případě z (9) plyne $R_{CD}<R_{AB}$, tedy

$$R_{CD}=R_3, \quad R_{AB}=R_2.$$

Vzhledem k (7) a (8)

$$R_1<\frac{R_{CD}+R_{AB}}{2}=\frac{R_2+R_3}{2}. \tag{11}$$

Je-li splněna podmínka (10), nachází se hledaný rezistor mezi vrcholy, kde naměříme odpor R_3 a odpor hledaného rezistoru je menší než odpor ostatních. Je-li splněna podmínka (11), nachází se hledaný rezistor mezi vrcholy, kde naměříme odpor R_2 a odpor hledaného rezistoru je větší než odpory ostatních.

b) Nastavíme-li pohyblivý kontakt můstku tak, aby galvanometrem neprocházel proud je v bodech, mezi které je galvanometr připojen, stejný potenciál a napětí ve větvi tvořené rezistory R_x a R_n se rozdělí ve stejném poměru jako ve větvi tvořené odporovou páskou. Při sériovém spojení je poměr napětí roven poměru odporů:

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{R_x}{R_\mathrm{n}}=\frac{\frac{\varrho a}{S}}{\frac{\varrho b}{S}}=\frac{a}{b},$$

kde S je obsah příčného průřezu odporové pásky, ϱ měrný elektrický odpor materiálu, ze kterého je vyrobena, a, b délky úseků, na které je páska rozdělena pohyblivým kontaktem. Z toho

$$R_x=R_\mathrm{n}\frac{a}{b}.$$

Výledky měření na zkušebním vzorku: $\boxed{R_\mathrm{n} = 555\,\Omega}$

Tabulka 1

Barevná kombinace	a/mm	b/mm	R_x/Ω
modrá – červená	140	116	669,8
modrá – zelená	140	116	669,8
modrá – žlutá	78	178	243,2
žlutá – zelená	140	116	669,8
žlutá – červená	140	116	669,8
zelená – červená	152	104	811,2

Tabulka 2

	a/mm	b/mm	R_i/Ω
R_1	140	116	669,8
R_2	152	104	811,2
R_3	78	178	243,2

c) Poloha hledaného rezistoru a nejpravděpodobnější hodnoty odporů r a R:

U zkušebního vzorku platí $2R_3 - R_2 < 0$. Proto $R_2 = R_{CD}$, $R_3 = R_{AB}$. Odpor R_3 jsme naměřili mezi vrcholy s barevnou kombinací *modrá – žlutá.* Hodnoty odporů r a R vypočítáme dosazením do vzorců (3,4):

Tabulka 3

Rezistor o odporu r je mezi vrcholy s barvami	modrá – žlutá
Nejpravděpodobnější hodnota odporu r je	$286,1\,\Omega$
Nejpravděpodobnější hodnota odporu R je	$1\,622,4\,\Omega$

d) Určení absolutních a relativních chyb vypočtených hodnot odporů r a R:

Tabulka 4

	a/mm		b/mm		R_i/Ω	
	horní mez	dolní mez	horní mez	dolní mez	horní mez	dolní mez
R_1	142	138	118	114	691,3	649,1
R_3	154	150	106	102	837,9	785,4
R_2	80	76	180	176	252,3	234,3

Horní a dolní mez odporu R určíme podle vzorce (3) jako dvojnásobky horní a dolní meze odporu $R_{CD} = R_2$. Pro stanovení horní a dolní meze odporu r je vhodné vzorec (4) upravit na tvar

$$r = \frac{1}{\dfrac{1}{R_{AB}} - \dfrac{1}{2R_{CD}}}.$$

Horní mez odporu r dostaneme dosazením horní meze odporu R_{AB} a dolní meze odporu R_{CD}. U dolní meze odporu r je to naopak.

Tabulka 5

R/Ω		r/Ω	
horní mez	dolní mez	horní mez	dolní mez
1 675,6	1 570,8	300,5	272,4

Konečný výsledek:

$$R = (1\,620 \pm 50)\ \Omega, \quad \delta R = 3{,}1\ \%, \quad r = (286 \pm 14)\ \Omega \quad \delta r = 4{,}9\ \%.$$