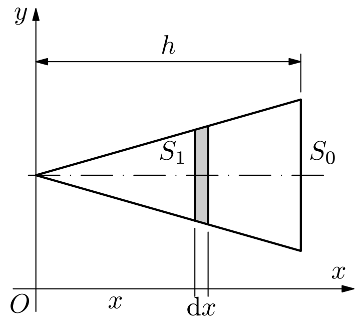
**Řešení úloh celostátního kola 55. ročníku fyzikální olympiády.**

Autoři J. Thomas (1, 3, 4) a M. Jarešová (2)

**1.** a) Pro určení polohy těžiště umístíme jehlan do polohy podle obr. R1. Obsah příčného řezu jehlanem ve vzdálenosti $x$ od vrcholu je

$$S_1 = S_0 \left(\frac{x}{h}\right)^2,$$

kde $S_0$ je obsah podstavy. Souřadnici $x_T$ těžiště určíme integrací:



Obr. R1

$$x_T = \frac{\int_m x\,\mathrm{d}m}{m} = \frac{\int_0^h x\varrho S_1\,\mathrm{d}x}{\int_0^h \varrho S_1\,\mathrm{d}x} = \frac{\frac{S_0\varrho}{h^2}\int_0^h x^3\,\mathrm{d}x}{\frac{S_0\varrho}{h^2}\int_0^h x^2\,\mathrm{d}x} = \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3}{4}h.$$

Vzdálenost těžiště jehlanu od podstavy je $h - 0{,}75h = 0{,}25h$.

**3 body**

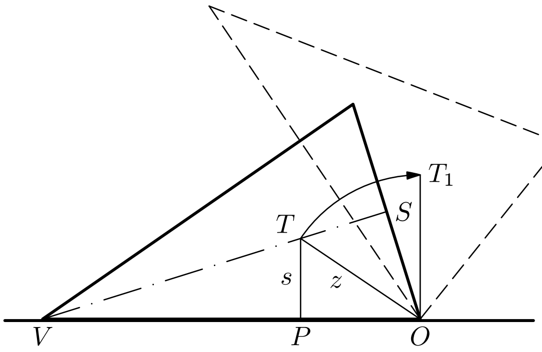
b) Abychom převrátili jehlan do svislé polohy, musíme jeho těžiště zvednout nad hranu podstavy (obr. R2). Přitom budeme udržovat svislý směr vlákna, aby nedošlo ke sklouznutí podstavné hrany po dně. Po překročení této vratké polohy už nemusíme konat práci, jehlan se postaví působením tíhové síly. Těžiště jehlanu se nachází v jedné čtvrtině jeho výšky. Výšku $s$ těžiště ležícího jehlanu nade dnem nádrže stanovíme z podobnosti trojúhelníků $VSO$ a $VPT$:

$$\frac{s}{0{,}75h} = \frac{0{,}5a}{\sqrt{0{,}25a^2 + h^2}} \quad \Rightarrow \quad s = \frac{0{,}375ah}{\sqrt{0{,}25a^2 + h^2}},$$

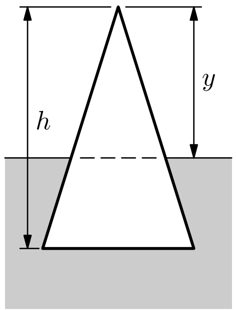
jeho vzdálenost od podstavné hrany je $z = \sqrt{(0{,}25h)^2 + 0{,}25a^2}$. Práce, kterou musíme vykonat při zvednutí jehlanu do vratké polohy, je rovna změně celkové potenciální energie soustavy nádrž–jehlan. Potenciální energie jehlanu se zvětší o $V\varrho g(z - s)$. Současně se ale zmenší potenciální energie vody v nádrži o $V\varrho_\mathrm{v} g(z - s)$, neboť voda z prostoru, který zabírá stojící jehlan, zaplní prostor, který jehlan zabíral původně. Celkově tedy

$$W_1 = V(\varrho - \varrho_\mathrm{v})g(z - s) =$$
$$= \frac{1}{3}a^2h(\varrho - \varrho_\mathrm{v})g\left(\sqrt{(0{,}25h)^2 + 0{,}25a^2} - \frac{0{,}375ah}{\sqrt{0{,}25a^2 + h^2}}\right).$$

Číselně vychází $W_1 = 0{,}251$ J. **4 body**




Obr. R2




Obr. R3

c) Stejnou úvahu můžeme provést i v případě zvedání stojícího jehlanu nad hladinu. Potenciální energie jehlanu se zvětší o $V\varrho g H$ a potenciální energie vody v nádrži se zmenší o $V\varrho_{\mathrm{v}} g(H-0{,}25h)$, neboť voda, která zaplní prostor u dna, kde stál jehlan, bude chybět u hladiny, která nepatrně poklesne. Celkově tedy

$$W_2 = V\varrho g H - V\varrho_{\mathrm{v}} g(H-0{,}25h) = V(\varrho-\varrho_{\mathrm{v}})gH + 0{,}25V\varrho_{\mathrm{v}} gh =$$
$$= \frac{1}{3}a^2 hg[(\varrho-\varrho_{\mathrm{v}})H + 0{,}25\varrho_{\mathrm{v}} h].$$

Číselně vychází $W_2 = 10{,}9$ J. **3 body**

*Poznámka:*

Výsledek úlohy c) můžeme zkontrolovat výpočtem práce jako dráhového integrálu síly: Do okamžiku, kdy se vrchol jehlanu dotkne hladiny, tedy na dráze $H-h$, musíme táhnout konstantní silou o velikosti $V(\varrho-\varrho_{\mathrm{v}})g$ a vykonáme práci

$$W_{21} = V(\varrho-\varrho_{\mathrm{v}})g(H-h).$$

Jakmile se vrchol jehlanu dostane nad hladinu (obr. R3), zmenší se vztlaková síla. V okamžiku, kdy vystoupí do výšky $y$, plyne z prostorové podobnosti pro objem $V_1$ vynořené části

$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{y}{h}\right)^3$$

a musíme působit silou o velikosti

$$V\varrho g - (V-V_1)\varrho_{\mathrm{v}} g = V(\varrho-\varrho_{\mathrm{v}})g + V\varrho_{\mathrm{v}}\left(\frac{y}{h}\right)^3 g.$$

Nad hladinou tedy vykonáme práci

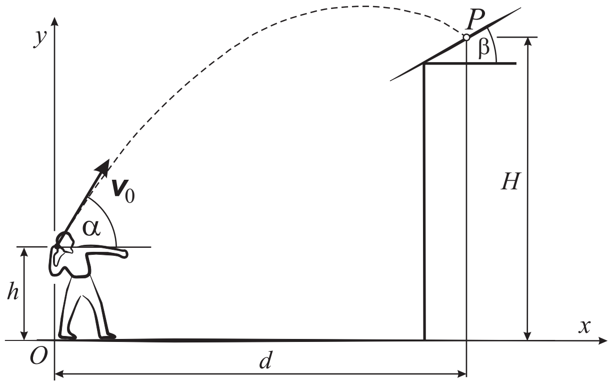
$$W_{22} = \int\limits_0^h \left\{ V(\varrho - \varrho_\mathrm{v})g + V\varrho_\mathrm{v} \left(\frac{y}{h}\right)^3 g \right\} \mathrm{d}y = Vg \left[ (\varrho - \varrho_\mathrm{v})y + \frac{\varrho_\mathrm{v}}{4h^3} y^4 \right]_0^h =$$

$$= Vg \left\{ (\varrho - \varrho_\mathrm{v})h + \frac{\varrho_\mathrm{v} h}{4} \right\}.$$

Celková práce při zvednutí jehlanu ze dna nad hladinu je

$$W_2 = W_{21} + W_{22} = V(\varrho - \varrho_\mathrm{v})gH + 0{,}25V\varrho_\mathrm{v}gh.$$

**2.** a) Zvolíme soustavu souřadnic $Oxy$ dle obr. R4.




Obr. R4

Potom pro souřadnice místa dopadu platí:

$$x = d, \qquad y = H.$$

Dále víme, že pro vrh šikmo vzhůru platí vztahy

$$x = v_0 t \cos\alpha, \qquad y = h + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Ze vztahu pro $x$ vyjádříme $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha}$ a dosadíme do vztahu pro $y$. Po úpravě dostaneme

$$y = h + x \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}. \tag{1}$$

Do vztahu (1) dále dosadíme za $x$ a $y$, tj.

$$H = h + d \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} d^2.$$

Postupnými úpravami vyjádříme z této rovnice hledanou rychlost $v_0$:

$$v_0 = \frac{d}{\cos\alpha} \sqrt{\frac{g}{2(d \operatorname{tg}\alpha - H + h)}}. \tag{2}$$

Po dosazení zadaných hodnot dostaneme $v_0 = 8{,}582\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 8{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

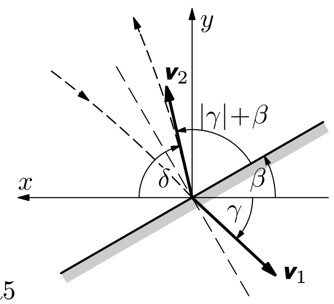
**4 body**

b) Míček dopadne na střechu v čase $t_1 = \dfrac{d}{v_0 \cos\alpha} = 1{,}165\ \mathrm{s}$. V tomto okamžiku má rychlost míčku souřadnice

$$v_{1x} = v_0 \cos\alpha = 4{,}29\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, \qquad v_{1y} = v_0 \sin\alpha - g t_1 = -4{,}00\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Velikost rychlosti dopadu je $v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = 5{,}87\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, úhel dopadu vzhledem k vodorovné rovině je $\gamma = \mathrm{arctg}\dfrac{v_{1y}}{v_{1x}} = -43°$.

Z obr. R5 je zřejmé, že míček se odrazí se pod úhlem $\delta = 180° - 2\beta - |\gamma| = 77°$ rovněž vzhledem k vodorovné rovině.




Obr. R5

**3 body**

c) Zvolíme nový počátek soustavy souřadnic v místě dopadu míčku na střechu, a to tak, že kladný směr osy $x$ bude směřovat na levou stranu, kladný směr osy $y$ bude směřovat nahoru (obr. R5). Pak můžeme pro souřadnice míčku po odrazu od střechy psát:

$$x = v_1 t \cos\delta, \qquad y = v_1 t \sin\delta - \frac{1}{2} g t^2.$$

Pro souřadnici $y$ v okamžiku dopadu platí $y = -H$. Po dosazení dostaneme kvadratickou rovnici

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_1 t \sin\delta - H = 0,$$

z níž vypočteme dobu dopadu míčku na zem od okamžiku odrazu míčku od střechy. Úloze vyhovuje kořen

$$t = \frac{v_1 \sin\delta + \sqrt{v_1^2 \sin^2\delta + 2gH}}{g} = 1{,}61\ \mathrm{s}.$$

Míček dopadne před chlapcem ve vzdálenosti $d' = d - v_1 t \cos\delta = 2{,}9\ \mathrm{m}$.

**3 body**

*Alternativní řešení úlohy b):*

Úhel dopadu míčku na střechu $\gamma$ (viz obr. R5) můžeme určit derivací vztahu (1) podle $x$:

$$y' = \mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha} x.$$

Po dosazení $x = d$ a za $v_0$ z (2) dostaneme v bodě dopadu

$$y' = \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha + \frac{2(H-h)}{d} = -\operatorname{tg}\alpha + \frac{2(H-h)}{d} = -0{,}932,$$

z čehož $\gamma = -43°$.

Velikost rychlosti dopadu míčku na střechu můžeme určit užitím zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgH \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2g(h-H)} = 5{,}87\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

**3.** a) Střední příčka $EG$ je rovněž izobara a střední příčka $FH$ je izochora. Protože při ději izobarickém je objem přímo úměrný termodynamické teplotě a při ději izochorickém je tlak přímo úměrný termodynamické teplotě, platí

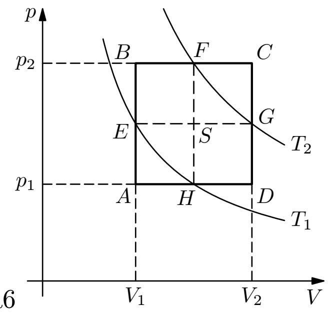
$$T_S = \frac{T_1 + T_2}{2}, \quad \frac{T_B}{T_1} = \frac{T_C}{T_2} = \frac{T_2}{\frac{T_1 + T_2}{2}}, \quad \frac{T_A}{T_1} = \frac{T_D}{T_2} = \frac{T_1}{\frac{T_1 + T_2}{2}}.$$

Pak

$$T_B = T_D = \frac{2T_1T_2}{T_1 + T_2} = 420 \text{ K}, \quad T_A = \frac{2T_1^2}{T_1 + T_2} = 180 \text{ K},$$

$$T_C = \frac{2T_2^2}{T_1 + T_2} = 980 \text{ K}.$$

**3 body**




Obr. R6

b) Práce vykonaná plynem při jednom cyklu je číselně rovna obsahu obdélníka $ABCD$. Ze stavové rovnice ideálního plynu odvodíme

$$W' = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = p_2V_2 - p_2V_1 - p_1V_2 + p_1V_1 =$$

$$= nR(T_C - T_B - T_D + T_A) = 2nR\frac{T_2^2 - 2T_1T_2 + T_1^2}{T_1 + T_2} = 2nR\frac{(T_2 - T_1)^2}{T_1 + T_2} = 2\,660 \text{ J}.$$

**3 body**

c) Plyn přijímá teplo při dějích $AB$ a $BC$:

$$Q_{AB} = \frac{5}{2}nR(T_B - T_A) = 5nR\frac{T_1T_2 - T_1^2}{T_1 + T_2},$$

$$Q_{BC} = \frac{7}{2}nR(T_C - T_B) = 7nR\frac{T_2^2 - T_1T_2}{T_1 + T_2},$$

$$Q_{AB} + Q_{BC} = nR\frac{7T_2^2 - 2T_1T_2 - 5T_1^2}{T_1 + T_2} = 21\,300 \text{ J}.$$

Teoretická účinnost kruhového děje

$$\eta = \frac{W'}{Q_{AB} + Q_{BC}} = \frac{2T_2^2 - 4T_1T_2 + 2T_1^2}{7T_2^2 - 2T_1T_2 - 5T_1^2} = \frac{2(T_2 - T_1)}{7T_2 + 5T_1} = 0{,}125.$$

**4 body**

**4.** a) Celková energie elektronu a jeho energie klidová jsou v poměru

$$\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{E}{m_0c^2} = \frac{14\ \mathrm{GeV}}{0{,}511\ \mathrm{MeV}} \doteq 27\,000.$$

Z toho

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2} \approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{E_0}{E}\right)^2 \doteq 1-6{,}7\cdot10^{-10}.$$

Rychlost elektronu je jen o $6{,}7\cdot10^{-8}$ % menší než rychlost světla ve vakuu.

**3 body**

b) Dostředivou silou je síla magnetická:

$$\frac{m_\mathrm{e}v^2}{R\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\gamma m_\mathrm{e}v^2}{R} = B_0ev \quad\Rightarrow\quad R = \frac{\gamma m_\mathrm{e}v^2}{B_0ev} \approx \frac{\gamma m_\mathrm{e}c^2}{B_0ec} = \frac{E}{B_0ec} \doteq 37\ \mathrm{m}.$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} \doteq 0{,}000\,201, \qquad \alpha \doteq 0{,}0115^\circ = 41''.$$

Maximální vzdálenost elektronů od osy undulátoru je

$$d = R-\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}} = R\left(1-\sqrt{1-\frac{a^2}{4R^2}}\right) \approx$$

$$\approx R\left(1-1+\frac{a^2}{8R^2}\right) = \frac{a^2}{8R} \doteq 7{,}5\cdot10^{-4}\ \mathrm{mm} = 0{,}75\ \mu\mathrm{m}.$$

**3 body**

c) Undulátorový parametr má hodnotu $K = \frac{eB_0a}{\pi m_\mathrm{e}c} \doteq 3{,}5$. Po dosazení do vztahu pro vlnovou délku dostaneme

$$\lambda = \frac{a}{\gamma^2}\left(1+\frac{K^2}{2}\right) = \frac{1{,}5\cdot10^{-2}}{27\,000^2}\cdot7{,}125 \doteq 1{,}4\cdot10^{-10}\ \mathrm{m} = 0{,}14\ \mathrm{nm}.$$

Fotony rentgenového záření mají v porovnání s celkovou energií elektronu vstupujícího do undulátoru nepatrnou energii

$$E_f = \frac{hc}{\lambda} \doteq 1{,}4\cdot10^{-15}\ \mathrm{J} \doteq 8{,}7\ \mathrm{keV} \doteq 6{,}2\cdot10^{-7}E.$$

**4 body**

Článek o undulátoru, ze kterého jsme čerpali, je dosažitelný na adrese

`http://www.cscasfyz.fzu.cz/Burian_Chalupsky_Hajkova_Bohacek_Juha_LCLS.pdf`