Řešení úloh 1. kola 55. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2), J. Thomas (3, 5, 7), M. Jarešová (4), M. Kapoun (6)

1. a) Během celého děje tvoří vozík s kyvadlem ve vodorovném směru izolovanou soustavu, tudíž hybnost soustavy zůstává po celou dobu pohybu i po nárazu nulová stejně jako v počátečním stavu. Proto po dokonale nepružném nárazu, kdy kyvadlo zůstane vzhledem k vozíku v klidu, zůstane celá soustava též v klidu. Během pohybu kyvadla je podle zákona zachování hybnosti v každém okamžiku poměr velikostí rychlosti těles opačný k poměru jejich hmotností, proto i poměr posunutí ve vodorovném směru je opačný k poměru hmotností (vodorovná souřadnice těžiště se nemění). Pro $M = 4m$ dostaneme posunutí vozíku $\Delta x = \frac{1}{5}l = 4$ cm. **3 body**

b) Označme v maximální velikost rychlosti kuličky vzhledem k zemi. Ze zákonů zachování mechanické energie a zachování hybnosti během vzájemného pohybu kyvadla a vozíku

$$mgl = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2, \qquad mv = MV$$

dostaneme

$$V = \frac{m}{\sqrt{(M+m)M}}\sqrt{2gl}.$$

Číselně vychází

$$V = \frac{1}{\sqrt{20}}\sqrt{2gl} = \frac{\sqrt{5}}{10}\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}20}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 0{,}44\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

3 body

c) Velikost rychlosti kuličky vzhledem k zemi bezprostředně před nárazem je

$$v = \frac{M}{m}V = \frac{M}{m} \cdot \frac{m}{\sqrt{(M+m)M}}\sqrt{2gl} = \frac{M}{\sqrt{(M+m)M}}\sqrt{2gl}.$$

Kulička vzhledem k vozíku opisuje kružnici se středem v bodě závěsu, velikost její rychlosti vzhledem k vozíku bezprostředně před nárazem je

$$u = v + V = \frac{M+m}{\sqrt{(M+m)M}}\sqrt{2gl} = \sqrt{\frac{M+m}{M}}\sqrt{2gl}.$$

Tahová síla napínající vlákno pak je

$$F = mg + \frac{mu^2}{l} = mg + \frac{m\left(\sqrt{\frac{M+m}{M}}\sqrt{2gl}\right)^2}{l} = \left(3 + \frac{2m}{M}\right)mg.$$

Pro $M = 4m$ dostaneme $F = \frac{7}{2}mg$. **4 body**

2. a) Plyn nejprve při izobarickém rozpínání zvětší objem z V_0 na $2V_0$, poté se rozpíná s lineárně rostoucím tlakem v závislosti na objemu na konečný objem $3V_0$. Označme S plošný obsah pístu. Přírůstek tlaku je vyvolán deformací pružiny, konečný tlak je

$$p_1 = p_0 + \frac{kh}{S} = p_0 + \frac{kh^2}{V_0} = 129\ \mathrm{kPa}.$$

Konečnou teplotu určíme ze stavové rovnice

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{\left(p_0 + \frac{kh^2}{V_0}\right) \cdot 3V_0}{T_1},$$

z níž plyne

$$T_1 = \frac{3\left(p_0 + \frac{kh^2}{V_0}\right)}{p_0} T_0 = 3\left(1 + \frac{kh^2}{p_0 V_0}\right) T_0 = 3{,}86 T_0 = 1\,130\ \mathrm{K}.$$

4 body

b) Plyn vykonal práci

$$W' = p_0 S \cdot 2h + \frac{1}{2}kh^2 = p_0 \frac{V_0}{h} \cdot 2h + \frac{1}{2}kh^2 = 2p_0 V_0 + \frac{1}{2}kh^2 = 322\ \mathrm{J}.$$

2 body

c) Plyn zvětšil vnitřní energii o hodnotu

$$\Delta U = \frac{5}{2}p_1 \cdot 3V_0 - \frac{5}{2}p_0 V_0 = \frac{5}{2}\left(p_0 + \frac{kh^2}{V_0}\right) \cdot 3V_0 - \frac{5}{2}p_0 V_0 = 5p_0 V_0 + \frac{15}{2}kh^2.$$

Plyn přijal teplo

$$Q = \Delta U + W' = 5p_0 V_0 + \frac{15}{2}kh^2 + 2p_0 V_0 + \frac{1}{2}kh^2 = 7p_0 V_0 + 8kh^2 = 1{,}40\ \mathrm{kJ}.$$

4 body

3. a) Zvolme vztažnou soustavu podle obr. R1. Parametrické rovnice trajektorie pak jsou

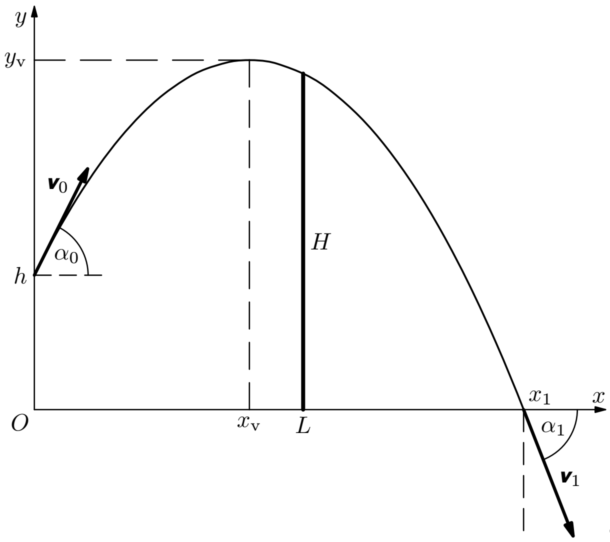
$$x = v_0 \cos\alpha_0 \cdot t, \qquad y = h + v_0 \sin\alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Vyloučením parametru t a dosazením $x = L$, $y = H$ dostaneme rovnici

$$H = h + L \operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{gL^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0}, \tag{1}$$

kterou pomocí substituce $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$ upravíme na tvar

$$\frac{gL^2}{2v_0^2}\operatorname{tg}^2\alpha_0 - L\operatorname{tg}\alpha_0 + \frac{gL^2}{2v_0^2} + H - h = 0. \tag{2}$$



Obr. R1

Na tuto rovnici se se můžeme dívat jako na kvadratickou rovnici s neznámou $\operatorname{tg}\alpha_0$. Zvolíme-li příliš malou velikost v_0 počáteční rychlosti, nedoletí míček na horní okraj zdi při žádné volbě elevačního úhlu. Bude-li naopak počáteční rychlost větší než minimální, budou vyhovovat dva elevační úhly pro různě strmé trajektorie. Pro hledanou minimální rychlost má rovnice jediné řešení a její diskriminant je roven nule:

$$D = L^2 - 4\frac{gL^2}{2v_0^2}\left(\frac{gL^2}{2v_0^2} + H - h\right) = 0.$$

Úpravou dojdeme k bikvadratické rovnici

$$v_0^4 - 2g(H-h)v_0^2 - g^2L^2 = 0.$$

Úloze vyhovuje kořen

$$v_0^2 = g\left(H - h + \sqrt{(H-h)^2 + L^2}\right). \tag{3}$$

Kvadratická rovnice (2) má pak dvojnásobný kořen

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{L+0}{\dfrac{gL^2}{v_0^2}} = \frac{H - h + \sqrt{(H-h)^2 + L^2}}{L}. \tag{4}$$

Pro dané hodnoty vychází $\mathrm{tg}\,\alpha_0 = 2$, $\alpha_0 = 63{,}4^\circ$, $v_0 = 8{,}9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

5 bodů

Poznámka: Řešení by se dalo podstatně zjednodušit užitím rovnice tzv. *ochranné paraboly* – viz studijní text *Polák, Šedivý: Vrhy, Knihovnička FO č 56.*

b) Dobu letu míčku určíme řešením kvadratické rovnice

$$h + v_0 \sin\alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = 0.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen

$$t_1 = \frac{v_0\sin\alpha_0 + \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha_0 + 2gh}}{g} = 1{,}84\ \mathrm{s}.$$

Za tuto dobu doletí míček do vzdálenosti

$$x_1 = v_0\cos\alpha_0 \cdot t_1 = 7{,}3\ \mathrm{m},$$

dopadne tedy ve vzdálenosti 3,3 m od zdi. **2 body**

c) V okamžiku dopadu má rychlost míčku souřadnice

$$v_x = v_0\cos\alpha_0 = 3{,}96\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}, \qquad v_y = v_0\sin\alpha_0 - gt_1 = -10{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Velikost rychlosti dopadu je $v_1 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ a odchylka od vodorovného směru $\alpha_1 = \mathrm{arctg}\dfrac{v_y}{v_x} = -68{,}6^\circ$. **2 body**

d) Doba výstupu míčku je $t_\mathrm{v} = \dfrac{v_0\sin\alpha_0}{g} = 0{,}81\ \mathrm{s}$. Za tuto dobu míček získá souřadnice

$$x_\mathrm{v} = v_0\cos\alpha_0 \cdot t_\mathrm{v} = 3{,}2\ \mathrm{m}, \qquad y_\mathrm{v} = h + v_0\sin\alpha_0\cdot t_\mathrm{v} - \frac{1}{2}gt_\mathrm{v}^2 = 5{,}2\ \mathrm{m}.$$

1 bod

Jiné řešení úlohy a):
Úpravou rovnice (1) dostaneme vztah, který vyjadřuje, jak závisí velikost počáteční rychlosti potřebné k zasažení horního okraje zdi na zvoleném elevačním úhlu:

$$\frac{1}{v_0^2} = [L\,\mathrm{tg}\,\alpha_0 - (H-h)]\frac{2\cos^2\alpha_0}{gL^2} = \frac{2}{gL^2}\left[L\sin\alpha_0\cos\alpha_0 - (H-h)\cos^2\alpha_0\right]. \qquad (5)$$

Má-li být velikost počáteční rychlosti v_0 minimální, musí mít výraz

$$V = L\sin\alpha_0\cos\alpha_0 - (H-h)\cos^2\alpha_0$$

maximální hodnotu, tedy

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\alpha_0} = L(\cos^2\alpha_0 - \sin^2\alpha_0) - (H-h)\cdot 2\cos\alpha_0 \cdot (-\sin\alpha_0) = 0.$$

Rovnici upravíme na tvar

$$L\,\mathrm{tg}^2\,\alpha_0 - 2(H-h)\,\mathrm{tg}\,\alpha_0 - L = 0.$$

Úloze vyhovuje kořen

$$\mathrm{tg}\,\alpha_0 = \frac{H-h+\sqrt{(H-h)^2+L^2}}{L}.$$

Pomocí druhé derivace výrazu V se můžeme přesvědčit, že se jedná o maximum. Vztah (5) upravíme na tvar

$$v_0^2 = \frac{gL^2(1+\mathrm{tg}^2\,\alpha_0)}{2[L\,\mathrm{tg}\,\alpha_0 - (H-h)]},$$

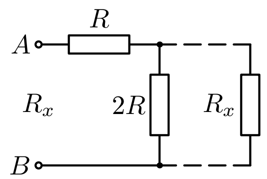
dosadíme za $\mathrm{tg}\,\alpha_0$ a dostaneme

$$v_0^2 = g\left(H-h+\sqrt{(H-h)^2+L^2}\right).$$

4. a) Obvod se skládá z nekonečně mnoha členů znázorněných na obr. 2. Označme odpor nekonečné sítě R_x. Pokud bychom na začátek sítě předřadili další člen, odpor sítě by se neměl měnit (obr. R2), protože síť je nekonečná.

Pak by mělo platit:

$$R_x = R + \frac{2RR_x}{2R+R_x}.$$



Obr. R2

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

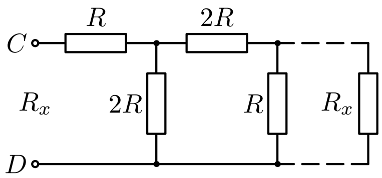
$$R_x^2 - RR_x - 2R^2 = 0.$$

Fyzikální význam má pouze kladné řešení

$$R_x = R_{AB} = \frac{R+\sqrt{R^2+8R^2}}{2} = 2R.$$

4 body

b) Budeme postupovat obdobně jako v úloze a) pouze s tím rozdílem, že člen, který se pravidelně opakuje, bude složitější (obr. R3).

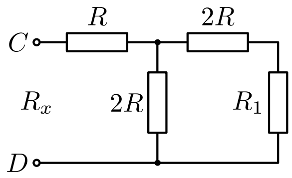


Obr. R3

Tento obvod budeme postupně v jednotlivých krocích zjednodušovat, abychom nakonec mohli vyjádřit odpor obvodu R_x.

1. Rezistory R, R_x vpravo nahradíme jediným o odporu R_1 (obr. R4). Platí:

$$R_1 = \frac{RR_x}{R + R_x}.$$



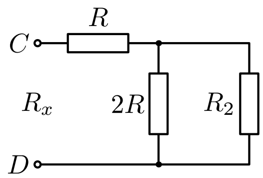
Obr. R4

2. Rezistory $2R$, R_1 vpravo nahradíme jediným o odporu R_2 (obr. R5). Platí:

$$R_2 = 2R + R_1,$$

po dosazení za R_1 dostaneme

$$R_2 = 2R + \frac{RR_x}{R + R_x} = \frac{R(2R + 3R_x)}{R + R_x}.$$



Obr. R5

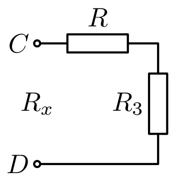
3. Rezistory $2R$, R_2 vpravo nahradíme jediným o odporu R_3 (obr. R6). Platí:

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R_2},$$

po dosazení za R_2 dostaneme

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{2R} + \frac{R + R_x}{R(2R + 3R_x)}.$$

$$R_3 = \frac{2R(2R + 3R_x)}{4R + 5R_x}.$$



Obr. R6

4. Nakonec můžeme psát $R_x = R + R_3$, kam dosadíme za R_3:

$$R_x = R + \frac{2R(2R + 3R_x)}{4R + 5R_x}.$$

Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$5R_x^2 - 7RR_x - 8R^2 = 0.$$

Fyzikální význam má pouze řešení

$$R_x = R_{\mathrm{CD}} = \frac{7R + \sqrt{49 + 160}R}{10} = 0{,}7R + \sqrt{2{,}09}R \doteq 2{,}15R.$$

6 bodů

Řešení úlohy vyšetřením posloupnosti odporů postupně prodlužované konečné sítě:

a) V síti podle obr. 1 budeme za sebe řadit členy zobrazené na obr. R7. Dostaneme posloupnost odporů, která bude mít první člen

$$R_1 = 3R \tag{6}$$

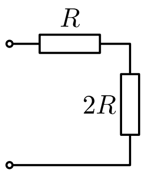
a bude u ní platit rekurentní vzorec, který odvodíme z obr. R8:

$$R_{n+1} = R + \frac{2R \cdot R_n}{R_n + 2R} = \frac{3R \cdot R_n + 2R^2}{R_n + 2R} = R\frac{3R_n + 6R - 4R}{R_n + 2R} =$$

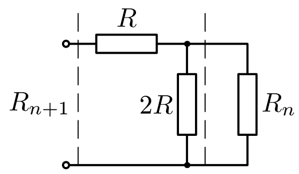
$$= 3R - \frac{4R^2}{R_n + 2R} = \left(3 - \frac{4R}{R_n + 2R}\right) R. \tag{7}$$

Vztahy (6) a (7) umožnují postupně vypočítat libovolný počet členů posloupnosti. Z tabulky pořízené v Excelu ale vidíme, že posloupnost rychle konverguje k hodnotě $2R$ a od desátého členu je prakticky konstantní.

n	R_n/R
1	3,00000
2	2,20000
3	2,04762
4	2,01176
5	2,00293
6	2,00073
7	2,00018
8	2,00005
9	2,00001
10	2,00000
11	2,00000
12	2,00000
13	2,00000
14	2,00000



Obr. R7



Obr. R8

Ještě přesvědčivěji vyřešíme úlohu použitím vzorce pro n-tý člen:
Platí

$$R_2 = R\left(2 + \frac{1}{5}\right), \quad R_3 = R\left(2 + \frac{1}{21}\right), \quad R_4 = R\left(2 + \frac{1}{85}\right), \ \ldots$$

Protože

$$5 = 1 + 4, \quad 21 = 1 + 4 + 16, \quad 85 = 1 + 4 + 16 + 64,$$

odhadneme vzorec pro n-tý člen ve tvaru

$$R_n = 2R + \frac{R}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} 4^i}. \tag{8}$$

Důkaz matematickou indukcí:
Dosazením (8) do (7) dostaneme

$$R_{n+1} = 3R - \frac{4R^2}{2R + \dfrac{R}{\sum\limits_{i=0}^{n-1} 4^i} + 2R} = R\left(3 - \frac{4\sum\limits_{i=0}^{n-1} 4^i}{4\sum\limits_{i=0}^{n-1} 4^i + 1}\right) =$$

$$= R\left(2 + 1 - \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} 4^i - 1}{\sum\limits_{i=0}^{n} 4^i}\right) = 2R + \frac{R}{\sum\limits_{i=0}^{n} 4^i},$$

což je očekávaný výsledek pro $(n+1)$-tý člen podle vzorce (8). Odpor nekonečné sítě pak určíme jako limitu

$$R_\infty = \lim_{n\to\infty} R_n = 2R.$$

b) Podobně budeme postupovat i při řešení sítě podle obr. 2. Tentokrát budeme za sebe řadit členy podle obr. R9. První člen posloupnosti bude

$$R_1 = R + \frac{2R \cdot 3R}{5R} = \frac{11}{5}R. \tag{9}$$

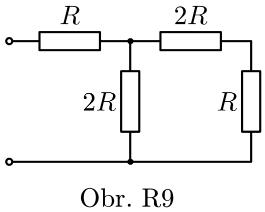
Z obr. R10 odvodíme rekurentní vztah

$$R_{n+1} = R + \frac{2R \cdot \left(2R + \dfrac{RR_n}{R+R_n}\right)}{2R + 2R + \dfrac{RR_n}{R+R_n}} = R\left(2 + \frac{R_n}{4R + 5R_n}\right). \tag{10}$$

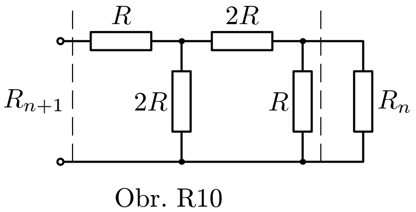
Výpočtem dostaneme $R_2 = \dfrac{161}{75}R, \quad R_3 = \dfrac{2371}{1105}R.$

Zde se nám asi nepodaří odvodit vzorec pro výpočet n-tého členu a omezíme se proto jen na výpočet dostatečného počtu členů posloupnosti pomocí rekurentního vzorce. Z tabulky pořízené v Excelu vidíme, že posloupnost konverguje ještě rychleji než v úloze a). Od třetího členu má prakticky konstantní hodnotu 2,146R.

n	R_n / R
1	2,20000
2	2,14667
3	2,14570
4	2,14568
5	2,14568
6	2,14568
7	2,14568



Obr. R9



Obr. R10

5.a) Vyjdeme z obr. R11. Nejprve užitím kosinové a sinové věty určíme délku strany BC a úhly β a γ v trojúhelníku ABC:

$$|BC| = \sqrt{2{,}25L^2 + L^2 - 3L^2 \cos 60°} = L \cdot \sqrt{1{,}75},$$

$$\frac{\sin\beta}{L} = \frac{\sin\alpha}{L\sqrt{1{,}75}} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1{,}75}} \quad \Rightarrow \quad \beta = 40{,}9°,\ \gamma = 79{,}1°.$$

Momenty tíhové síly a elektrické síly vzhledem k bodu A musí být u obou kuliček v rovnováze. Tedy

$$F_G \cdot 1{,}5L \sin\alpha_1 = F_\mathrm{e} \cdot 1{,}5L \sin\beta, \qquad F_G \cdot L \sin\alpha_2 = F_\mathrm{e} \cdot L \sin\gamma.$$

Z toho

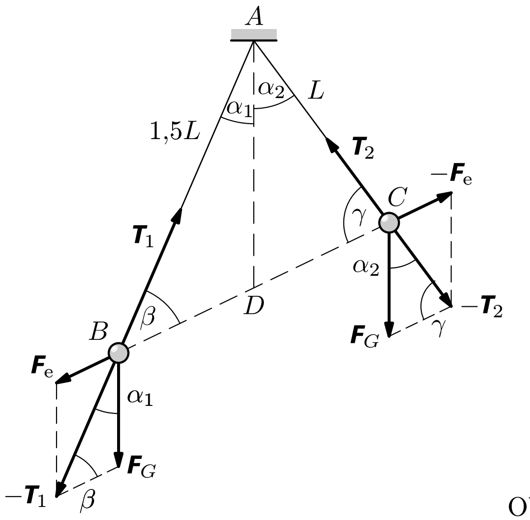
$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha - \alpha_1)} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{L}{1{,}5L} = \frac{1}{1{,}5},$$

$$1{,}5 \sin\alpha_1 = \sin(\alpha - \alpha_1) = \sin\alpha\cos\alpha_1 - \cos\alpha\sin\alpha_1.$$

Vydělením $\cos\alpha_1$ a úpravou dostaneme

$$\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{\sin\alpha}{1{,}5 + \cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = 23{,}4°,\ \alpha_2 = 36{,}6°.$$

4 body



Obr. R11

Nyní již můžeme určit velikost elektrické síly a velikost náboje. Podle sinové věty

$$\frac{F_\mathrm{e}}{F_G} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{e} = \frac{kQ^2}{1{,}75L^2} = \frac{mg\sin\alpha_1}{\sin\beta} = 5{,}95 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{N},$$

$$Q = \sqrt{\frac{F_\mathrm{e} \cdot 1{,}75 L^2}{k}} = 34\ \mathrm{nC}.$$

3 body

b) Velikosti sil, kterými jsou napnuta vlákna, můžeme určit pomocí sinové věty:

$$\frac{T_1}{F_G} = \frac{\sin(180° - \alpha_1 - \beta)}{\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha_1 + \beta)}{\sin\beta},$$

$$T_1 = \frac{mg\sin(\alpha_1 + \beta)}{\sin\beta} = 1{,}35\ \mathrm{mN},$$

Podobně určíme velikost síly T_2:

$$T_2 = \frac{mg\sin(\alpha_2 + \gamma)}{\sin\gamma} = 0{,}90\ \mathrm{mN}.$$

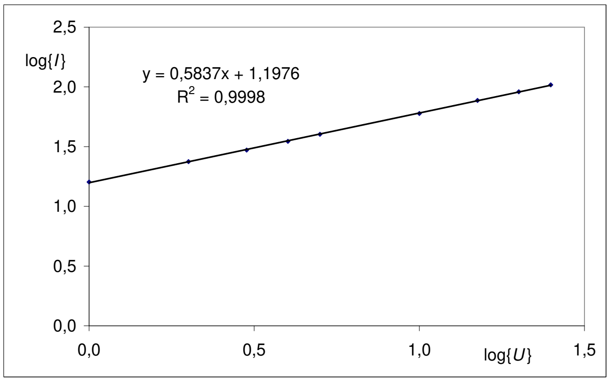
Mohli jsme také využít podobnost trojúhelníků. Z ní plyne

$$\frac{T_1}{F_G} = \frac{|AB|}{|AD|}, \quad \frac{T_2}{F_G} = \frac{|AC|}{|AD|} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \frac{|AB|}{|AC|} = 1{,}5.$$

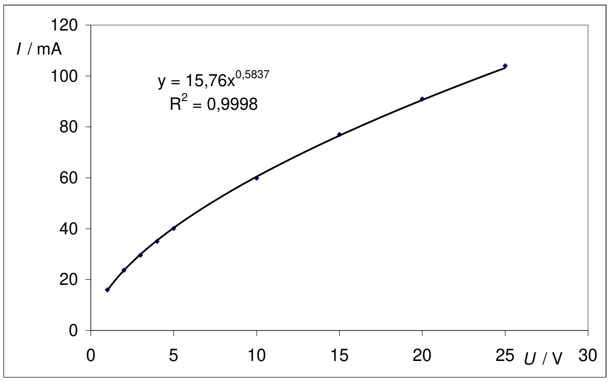
3 body

6. a) Měření bylo provedeno na žárovce se jmenovitými hodnotami 24 V/ 0,1 A. Výsledky lineární regrese (graf 1) a mocninné regrese (graf 2) se shodují. Konstanta žárovky má číselnou hodnotu $\{C\} = 10^{1{,}1676} = 15{,}8$, exponent $n = 0{,}5837$ se jen nepatrně liší od očekávané hodnoty 3/5. Vysoká hodnota koeficientu determinace $R^2 = 0{,}9998$ svědčí o dobrém souhlasu reálné funkční závislosti s ověřovaným vztahem.

U / V	*I* / mA	log{U}	log{I}
1	16,0	0,00000	1,20412
2	23,7	0,30103	1,37475
3	29,6	0,47712	1,47129
4	35,0	0,60206	1,54407
5	40,1	0,69897	1,60314
10	59,9	1,00000	1,77743
15	77,0	1,17609	1,88649
20	91,0	1,30103	1,95904
25	104,0	1,39794	2,01703



Graf 1



Graf 2

7 bodů

b) Příkon žárovky je prakticky roven jejímu zářivému toku. Platí $R \approx AT$,

$$P = UI \approx \Phi = BT^4 \approx B\frac{R^4}{A^4} = \frac{B}{A^4} \cdot \frac{U^4}{I^4}.$$

Z toho

$$I^5 \approx \frac{B}{A^4}U^3, \qquad I \approx \left(\frac{B}{A^4}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot U^{\frac{3}{5}} = CU^{\frac{3}{5}}.$$

3 body

7. a) Dobu kmitu fyzického kyvadla určíme ze vztahu $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}}$, kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení a $D = mgd$ je direkční moment. d je vzdálenost těžiště od osy otáčení a m hmotnost kmitající soustavy.

Protože má menší obruč poloviční délku, je její hmotnost $M/2$. Těžiště soustavy je na úsečce AB ve vzdálenosti

$$y = \frac{MR + \frac{M}{2} \cdot \frac{R}{2}}{M + \frac{M}{2}} = \frac{5}{6}R$$

od bodu B. Moment setrvačnosti vhledem k ose procházející bodem A

$$J = J_1 + J_2 = 2MR^2 + \frac{M}{2} \cdot \frac{5}{2}R^2 = \frac{13}{4}MR^2,$$

direkční moment $D = \frac{3}{2}M \cdot g \cdot \frac{7}{6}R = \frac{7}{4}MgR,$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{13}{4}MR^2}{\frac{21}{12}MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{13R}{7g}} = 1{,}50\ \mathrm{s}.$$

3 body

b) Moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející bodem B

$$J = J_1 + J_2 = 2MR^2 + 2\frac{M}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}MR^2,$$

direkční moment $D = \frac{3}{2}M \cdot g \cdot \frac{5}{6}R = \frac{5}{4}MgR,$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{9}{4}MR^2}{\frac{5}{4}MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{9R}{5g}} = 1{,}47\ \mathrm{s}.$$

2 body

c) K řešení využijeme zákon zachování energie. Při vychýlení obručí o úhel α_m získá soustava potenciální energii tíhovou

$$E_\mathrm{p} = \frac{M}{2}g\frac{R}{2}(1 - \cos\alpha_\mathrm{m}) \approx \frac{M}{2}g\frac{R}{2} \cdot \frac{\alpha_\mathrm{m}^2}{2} = \frac{M}{8}g\frac{x_\mathrm{m}^2}{R},$$

kde $x_\mathrm{m} = R\alpha_\mathrm{m}$ je vzdálenost, o kterou se posunul střed větší obruče při maximální výchylce proti rovnovážné poloze. Při průchodu rovnovážnou polohou se střed větší obruče pohybuje rychlostí $v_\mathrm{m} = \omega x_\mathrm{m} = \frac{2\pi}{T}x_\mathrm{m}$ a soustava získá kinetickou energii $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\Omega_\mathrm{m}^2$, kde $J = \frac{9}{4}MR^2$ je moment setrvačnosti vzhledem k okamžité ose otáčení (bod dotyku větší obruče s podložkou) a Ω_m je maximální úhlová rychlost, jakou se otáčí soustava kolem této osy.

Platí $\Omega_\mathrm{m} = \dfrac{v_\mathrm{m}}{R} = \dfrac{2\pi}{TR} x_\mathrm{m}$, kde v_m je rychlost, jakou se pohybuje střed větší obruče při jejím průchodu rovnovážnou polohou. Z rovnosti potenciální energie v krajní poloze a kinetické energie při průchodu rovnovážnou polohou dostaneme

$$\frac{1}{2} J\Omega_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} MR^2 \frac{4\pi^2}{T^2R^2} x_\mathrm{m}^2 = \frac{9}{8} M \frac{4\pi^2}{T^2} x_\mathrm{m}^2 = \frac{M}{8} g \frac{x_\mathrm{m}^2}{R},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{9R}{g}} = 3{,}3\ \mathrm{s}.$$

5 bodů