Řešení úloh 1. kola 56. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Autoři úloh: J. Thomas (1, 2), J. Jírů (3, 4, 5), P. Šedivý (6), M. Kapoun (7)

1. a) Poloměr kružnice, po níž se bude kulička po průchodu pod bodem závěsu pohybovat, bude $L - l$. Aby kulička dosáhla nejvyššího bodu kružnice, musí zde být být setrvačná odstředivá síla alespoň rovna síle tíhové:

$$\frac{mv^2}{L-l} = mg \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{g(L-l)}.$$

Podle zákona zachování energie pak:

$$mgL = mg \cdot 2(L-l) + \frac{mv^2}{2} = mg2(L-l) + \frac{mgL}{2} - \frac{mgl}{2} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{3}{5}L.$$

3 body

b) Vzdálenost hřebíku od bodu závěsu označme l_1. Kulička se bude po průchodu pod bodem závěsu pohybovat po části kružnice, dokud se setrvačná odstředivá síla nevyrovná se složkou tíhové síly (obr. R1). Při opouštění kruhové dráhy má kulička rychlost o velikosti v_0:

$$\frac{mv_0^2}{L-l_1} = mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{g(L-l_1)\sin\alpha}.$$

Pak podle zákona zachování energie:

$$mgL = mg(L-l_1)(1+\sin\alpha) + \frac{mv_0^2}{2} = mg(L-l_1)(1+\sin\alpha) + \frac{mg(L-l_1)\sin\alpha}{2}.$$

Z toho

$$\sin\alpha = \frac{2l_1}{3(L-l_1)}, \qquad v_0^2 = \frac{2gl_1}{3}.$$

3 body

Pro další popis pohybu kuličky si zvolíme vztažnou soustavu Oxy podle obrázku. V této vztažné soustavě platí:

$$x = v_0 t\sin\alpha - (L-l_1)\cos\alpha, \tag{1}$$

$$y = (L-l_1)\sin\alpha + v_0 t\cos\alpha - \frac{1}{2}gt^2. \tag{2}$$

Podmínkou pro to, aby kulička zasáhla hřebík, je $y = 0$ při $x = 0$.

Z rovnice (1) vyjádříme $t = \dfrac{(L-l_1)\cos\alpha}{v_0\sin\alpha}$.

Dosazením za t a v_0 do rovnice (2) a úpravami dojdeme postupně ke kvadratické rovnici:

$$(L-l_1)\sin\alpha + \frac{(L-l_1)\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \frac{g(L-l_1)^2\cos^2\alpha}{2v_0^2\sin^2\alpha} = 0,$$

$$(L-l_1)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = \frac{3(L-l_1)^2\cos^2\alpha}{4l_1\sin\alpha},$$

$$4l_1\sin\alpha - 3(L-l_1)(1-\sin^2\alpha) = 0,$$

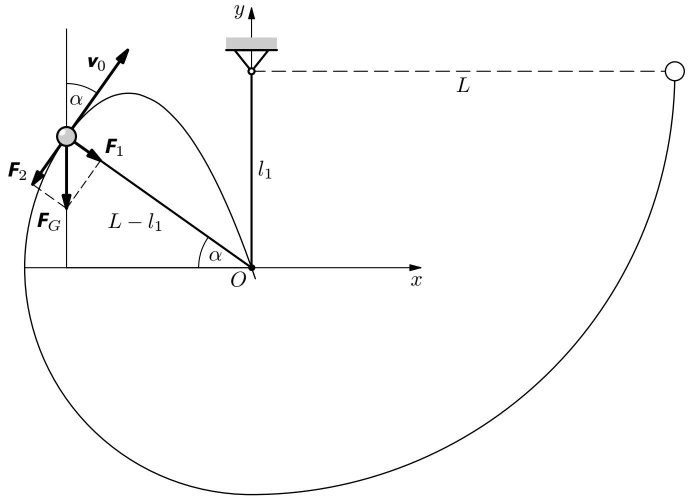
$$4l_1\frac{2l_1}{3(L-l_1)} - 3(L-l_1)\left(1-\frac{4l_1^2}{9(L-l_1)^2}\right) = 0,$$

$$l_1^2 + 6Ll_1 - 3L^2 = 0.$$

Úloze vyhovuje řešení

$$l_1 = (2\sqrt{3}-3)L \doteq 0{,}464L.$$

4 body



Obr. R1

2. a) Na válcovou trubku působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ se složkami $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ a reakce nakloněné roviny se složkami $\boldsymbol{N}$ a $\boldsymbol{T}$ (obr. R2).

Poznámka: Pro lepší přehlednost jsou síla $\boldsymbol{N}$ v obr. R2 a síly $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$ v obr. R3 zakresleny s šipkou v místě působiště.

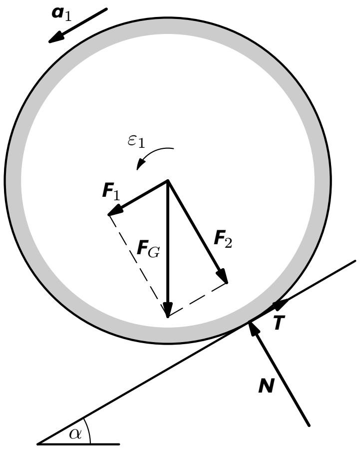
Z pohybových rovnic

$$ma_1 = mg\sin\alpha - T,$$
$$J_1\varepsilon_1 = mr^2\varepsilon_1 = ma_1 r = Tr$$

dostaneme

$$T = ma_1, \quad ma_1 = mg\sin\alpha - ma_1,$$
$$a_1 = \frac{g\sin\alpha}{2}.$$

Ke stejnému výsledku dojdeme také užitím zákona zachování energie. Potenciální energie tíhová trubky se během pohybu mění na kinetickou energii jejího posuvného pohybu a kinetickou energii jejího rotačního pohybu:



Obr. R2

$$mgl\sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_1\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mr^2\frac{v^2}{r^2} = mv^2.$$

Jde o pohyb rovnoměrně zrychlený s nulovou počáteční rychlostí, takže

$$l = \frac{1}{2}a_1 t^2 = \frac{v^2}{2a_1} \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2a_1 l.$$

Po dosazení a úpravě $a_1 = \dfrac{g\sin\alpha}{2}$. **2,5 bodu**

b) Obdobně můžeme postupovat v případě plného válce. Z pohybových rovnic

$$ma_2 = mg\sin\alpha - T, \qquad J_2\varepsilon_2 = \frac{1}{2}mr^2\varepsilon_2 = \frac{1}{2}ma_2 r = Tr$$

dostaneme $T = \dfrac{1}{2}ma_2, \quad ma_2 = mg\sin\alpha - \dfrac{1}{2}ma_2,$

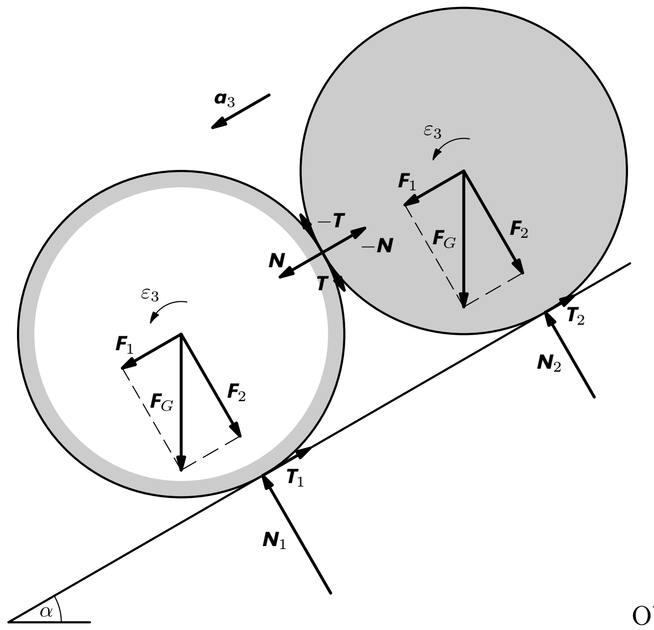
$$a_2 = \frac{2g\sin\alpha}{3}.$$

Užitím zákona zachování energie:

$$mgl\sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_2\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mr^2\frac{v^2}{r^2} = \frac{3}{4}mv^2 = \frac{3}{2}ma_2 l,$$

Po dosazení a úpravě $a_2 = \dfrac{2g\sin\alpha}{3}$. **2,5 bodu**

c) Aby tělesa byla při valení ve stálém dotyku, musí být válcová trubka, která se samostatně pohybovala s menším zrychlením, umístěna jako spodní. Obě tělesa budou mít stejné úhlové zrychlení ε_3 a stejné zrychlení $a_3 = r\varepsilon_3$. Na obr. R3 jsou vyznačeny všechny síly, které na tělesa působí: Na trubku působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ se složkami $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, tlaková síla $\boldsymbol{N}$ a třecí síla $\boldsymbol{T}$ od válce a reakce nakloněné roviny se složkami $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{T}_1$. Na válec působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ se složkami $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, tlaková síla $-\boldsymbol{N}$ a třecí síla $-\boldsymbol{T}$ od trubky a reakce nakloněné roviny se složkami $\boldsymbol{N}_2$, $\boldsymbol{T}_2$.



Obr. R3

Pro trubku platí pohybové rovnice

$$ma_3 = mg\sin\alpha + N - T_1, \tag{1}$$

$$J_1\varepsilon_3 = mr^2\varepsilon_3 = ma_3 r = (T_1 - T)r \quad\Rightarrow\quad ma_3 = T_1 - T. \tag{2}$$

Pro válec platí

$$ma_3 = mg\sin\alpha - N - T_2, \tag{3}$$

$$J_2\varepsilon_3 = \frac{1}{2}mr^2\varepsilon_3 = \frac{1}{2}ma_3 r = (T_2 - T)r \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}ma_3 = T_2 - T. \tag{4}$$

Odečtením rovnic (1) a (3) a rovnic (2) a (4) dostaneme

$$T_1 - T_2 = 2N = \frac{ma_3}{2} \qquad \Rightarrow \qquad N = \frac{ma_3}{4}. \tag{5}$$

Sečtením rovnic (1) a (3) a rovnic (2) a (4) dostaneme

$$T_1 + T_2 = 2mg\sin\alpha - 2ma_3 = \frac{3}{2}ma_3 + 2T, \tag{6}$$

přičemž

$$T = fN = \frac{fma_3}{4} \qquad \Rightarrow \qquad a_3 = \frac{4g\sin\alpha}{7+f}.$$

Ke stejnému výsledku dojdeme i z energetické bilance. Musíme počítat s tím, že pokud trubka a válec sjedou do vzdálenosti l, jejich povrchy se vzájemně smeknou o $2l$, což je dráha, po které koná práci třecí síla. Tedy

$$2mgl\sin\alpha = 2\cdot\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}(J_1+J_2)\omega^2 + T\cdot 2l = \frac{7}{4}mv^2 + f\frac{ma_3}{4}\cdot 2l =$$

$$= 2ma_3 l\left(\frac{7}{4} + \frac{f}{4}\right),$$

$$a_3 = \frac{4g\sin\alpha}{7+f}.$$

5 bodů

3. Označme r poloměr válce a $2h$ výšku válce, který je možné vysoustružit z koule o poloměru R. Pak pro jeho hmotnost a jeho moment setrvačnosti platí

$$m = \frac{\pi r^2\cdot 2h}{\frac{4}{3}\pi R^3}M = \frac{3r^2h}{2R^3}M = \frac{3r^2\sqrt{R^2-r^2}}{2R^3}M, \tag{1}$$

$$J = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3r^2\sqrt{R^2-r^2}}{2R^3}M\cdot r^2 = M\frac{3r^4\sqrt{R^2-r^2}}{4R^3}. \tag{2}$$

2 body

a) Funkci $m = m(r)$ s definičním oborem $0 < r < R$ určenou vztahem (1) derivujeme:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = \frac{3M}{2R^3}\left(2r\sqrt{R^2-r^2} + \frac{-2r^3}{2\sqrt{R^2-r^2}}\right) =$$

$$= \frac{3Mr}{2R^3}\left(2\sqrt{R^2-r^2} + \frac{-r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}\right).$$

Z podmínky nulové derivace plyne $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$. Dosazením do (1) a (2) dostaneme

$$m_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}M = 0{,}577M, \qquad J_1 = \frac{\sqrt{3}}{9}MR^2 = 0{,}192MR^2.$$

4 body

b) Nyní derivujeme funkci $J = J(r)$ s definičním oborem $0 < r < R$ určenou vztahem (2):

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}r} = \frac{3M}{4R^3}\left(4r^3\sqrt{R^2-r^2} + \frac{-r^5}{\sqrt{R^2-r^2}}\right) = \frac{3Mr^3}{4R^3}\left(4\sqrt{R^2-r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}}\right).$$

Z podmínky nulové derivace plyne $r = \frac{2\sqrt{5}}{5}R = 0{,}894R$. Dosazením do (1) a (2) dostaneme

$$m_2 = \frac{6\sqrt{5}}{25}M = 0{,}537M, \qquad J_2 = \frac{12\sqrt{5}}{125}MR^2 = 0{,}215MR^2.$$

4 body

Poznámky:

1) Hmotnost a moment setrvačnosti lze vyjádřit jako funkce výšky $2h$, resp. poloviny výšky h místo funkce poloměru r. Pak vztahy (1) a (2) budou mít pro $0 < h < R$ konečný tvar

$$m = \frac{3h(R^2-h^2)}{2R^3}M, \qquad J = M\frac{3h(R^2-h^2)^2}{4R^3}$$

a jejich derivace budou

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}h} = \frac{3M}{2R^3}(R^2-3h^2), \qquad \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}h} = \frac{3M(R^2-h^2)}{4R^3}(R^2-5h^2).$$

2) Válec má maximální hmotnost při poměru průměru a výšky válce $\frac{2r}{2h} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, maximální moment setrvačnosti při poměru $\frac{2r}{2h} = \frac{2}{1}$.

4. a) Vyjdeme z obrázku R4, na kterém jsou vodiče kolmé k nákresně a proudy z nákresny vystupují směrem k pozorovateli. (Pokud by proudy vstupovaly do nákresny směrem od pozorovatele, vektorový rovnoběžník by se v nákresně otočil o 180° a následující řešení by bylo stejné.) Z obrázku plyne

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2, \qquad B = 2B_1 \cos\alpha, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad r^2 = d^2 + x^2.$$

Dále platí $B_1 = B_2 = \dfrac{\mu}{2\pi} \cdot \dfrac{I}{r}$.

Po dosazení dostaneme funkční závislost velikosti výsledné magnetické indukce na souřadnici x:

$$B(x) = 2B_1 \cos\alpha = 2 \cdot \frac{\mu}{2\pi} \cdot \frac{I}{r} \cdot \frac{x}{r} = \frac{\mu I}{\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + d^2}. \qquad (1)$$

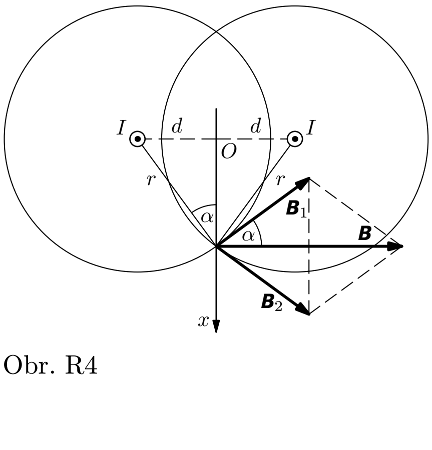
Z rovnice plyne $B(x) = 0$ pro $x = 0$, jinak v celém vyšetřovaném intervalu je $B(x) > 0$. Minimum funkce $B(x)$ je tedy v bodě o souřadnici $x = 0$ a má hodnotu $B_{\mathrm{min}} = 0$. Maximum najdeme řešením rovnice

$$\frac{\mathrm{d}B(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mu I}{\pi} \cdot \frac{d^2 + x^2 - x \cdot 2x}{(d^2 + x^2)^2} = \frac{\mu I}{\pi} \cdot \frac{d^2 - x^2}{(d^2 + x^2)^2} = 0.$$

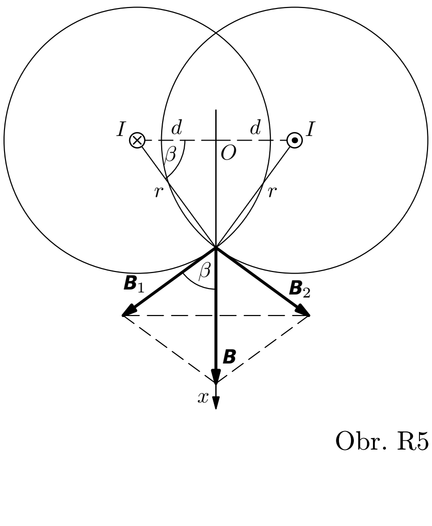
Derivace je nulová pro $x = d$. Dosazením do (1) dostaneme

$$B_{\mathrm{max}} = \frac{\mu I}{2\pi d}.$$

5 bodů



Obr. R4



Obr. R5

b) Vyjdeme z obrázku R5, na kterém proud procházející pravým vodičem z nákresny vystupuje směrem k pozorovateli a proud levým vodičem do nákresny vstupuje. (Pokud by proudy měly opačný směr, vektorový rovnoběžník by se v nákresně otočil o 180° a následující řešení by bylo stejné.) Z obrázku plyne

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2, \qquad B = 2B_1\cos\beta, \qquad \cos\beta = \frac{d}{r}, \qquad r^2 = d^2 + x^2.$$

Dále opět platí $B_1 = B_2 = \dfrac{\mu}{2\pi}\cdot\dfrac{I}{r}$.

Po dosazení dostaneme funkční závislost velikosti výsledné magnetické indukce na souřadnici x:

$$B(x) = 2B_1\cos\beta = 2\cdot\frac{\mu}{2\pi}\cdot\frac{I}{r}\cdot\frac{d}{r} = \frac{\mu I}{\pi}\cdot\frac{d}{x^2+d^2}. \tag{2}$$

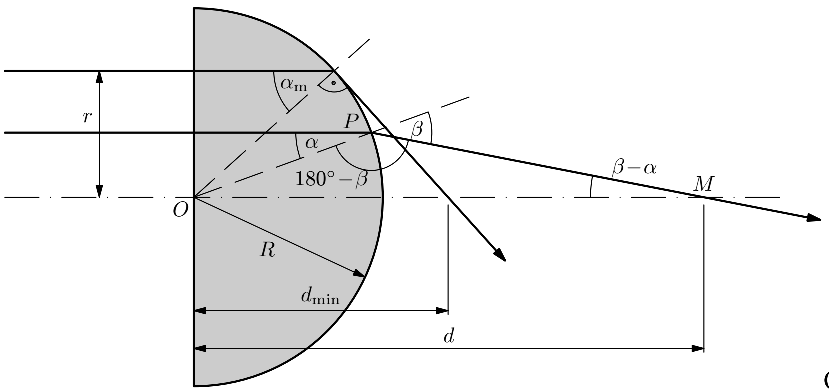
Z rovnice plyne, že velikost magnetické indukce je pro každé x nenulová. Dále s rostoucím x velikost výsledné magnetické indukce klesá, neboť vektory $\boldsymbol{B}_1$ a $\boldsymbol{B}_2$ se rozevírají a zmenšují svoji velikost. To znamená, že minimum nastane v krajním bodě uvažovaného intervalu o souřadnici $x = 4d$ a maximum v bodě o souřadnici $x = 0$, tedy v počátku. Dosazením do (2) tak dostaneme

$$B_{\min} = B(4d) = \frac{1}{17}\cdot\frac{\mu I}{\pi d}, \qquad B_{\max} = B(0) = \frac{\mu I}{\pi d}.$$

5 bodů

5. a) Podle obrázku R6 platí $2r = 2\cdot R\sin\alpha_\mathrm{m} = \dfrac{2R}{n} = \dfrac{2R}{1{,}5} = \dfrac{4}{3}R$.

1 bod



Obr. R6

b) V trojúhelníko OPM platí

$$d = \frac{\sin(180^\circ - \beta)}{\sin(\beta - \alpha)} \cdot R = \frac{\sin\beta}{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha} \cdot R.$$

Užitím zákona lomu $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{1}{n}$ a úpravou dostaneme:

$$d = \frac{R}{\cos\alpha - \dfrac{1}{n}\cos\beta} = \frac{R}{\cos\alpha - \sqrt{\dfrac{1}{n^2} - \sin^2\alpha}}. \qquad (1)$$

Nyní užitím první derivace ověříme, že výraz (1) je na otevřeném intervalu $(0, \alpha_{\mathrm{m}})$ monotónní funkcí úhlu α:

$$\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\sin\alpha - n\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1 - n^2\sin^2\alpha}}}{\left(\cos\alpha - \sqrt{\dfrac{1}{n^2} - \sin^2\alpha}\right)^2} \cdot R. \qquad (2)$$

Protože $n > 1$, platí na celém intervalu

$$\sqrt{\frac{1}{n^2} - \sin^2\alpha} < \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \text{jmenovatel je nenulový},$$

$$\frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1 - n^2\sin^2\alpha}} > \frac{n\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - n^2\sin^2\alpha}} = \sin\alpha.$$

Proto je derivace (2) na celém intervalu záporná a funkce (1) je klesající, pro $\alpha = 0$ nastává maximum a pro $\alpha = \alpha_{\mathrm{m}}$ nastává minimum.

Dosazením $\alpha = 0$ do vztahu (1) dostaneme $d_{\max} = \dfrac{n}{n-1}R = 3R$.

Dosazením $\alpha = \alpha_{\mathrm{m}}$ do vztahu (1) dostaneme

$$d_{\min} = \frac{R}{\cos\alpha_{\mathrm{m}}} = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}} = 1{,}34R.$$

6 bodů

Poznámka:
Řešení $d_{\max}$ lze též získat užitím rovnice pro ohniskovou vzdálenost tenké ploskovypuklé čočky (tenká kulová úseč, kterou získáme řezem polokoule kolmým k optické ose):

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty}\right) = \frac{n-1}{R}.$$

Pro hledanou vzdálenost pak platí:

$$d_{\max} = R + f = R + \frac{R}{n-1} = \frac{n}{n-1}R.$$

c) Krajní paprsek je odchýlen od optické osy o úhel $\gamma = 90° - \alpha_{\mathrm{m}}$ (obr. R7). Zvolme ϱ poloměr kulového vrchlíku se středem o souřadnici $d_{\min}$, který vymezuje příslušný prostorový úhel. Povrch vrchlíku je $S = 2\pi\varrho v$, kde v je jeho výška. Pak platí

$$\cos\gamma = \frac{\varrho - v}{\varrho}, \quad \text{z čehož} \quad v = \varrho(1 - \cos\gamma).$$

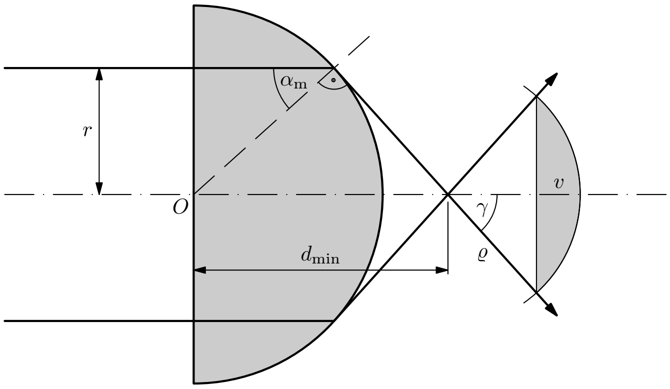
Povrch vrchlíku je tedy $S = 2\pi\varrho^2(1 - \cos\gamma)$.

Dále platí $\cos\gamma = \cos(90° - \alpha_{\mathrm{m}}) = \sin\alpha_{\mathrm{m}} = \dfrac{1}{n}$.

Pro prostorový úhel dostaneme

$$\Omega = \frac{S}{\varrho^2} = \frac{2\pi\varrho^2(1-\cos\gamma)}{\varrho^2} = 2\pi\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2\pi\frac{n-1}{n} = \frac{2}{3}\pi \text{ sr} \doteq 2{,}1 \text{ sr}.$$

3 body



Obr. R7

7.a) Podmínka pro stacionární stav elektronu v potenciálové jámě délky L je

$$L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2}.$$

Z de Broglieova vztahu $p_n = \dfrac{h}{\lambda_n}$ plyne pro energii volného elektronu

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m_{\mathrm{e}}} = \frac{h^2}{2\lambda_n^2 m_{\mathrm{e}}} = \frac{h^2}{8m_{\mathrm{e}}L^2}\cdot n^2, \quad \text{kde} \quad n = 1, 2, \ldots .$$

2 body

b) π-elektrony obsazují hladiny po dvou od první, energeticky nejchudší, výš. Pro N sudé je

$$E(\mathrm{HOMO}) = E_0 \frac{\left(\frac{N}{2}\right)^2}{N^2}, \qquad E(\mathrm{LUMO}) = E_0 \frac{\left(\frac{N}{2}+1\right)^2}{N^2},$$

pro N liché je

$$E(\mathrm{HOMO}) = E_0 \frac{\left(\frac{N-1}{2}\right)^2}{\left(N-\frac{1}{2}\right)^2}, \qquad E(\mathrm{LUMO}) = E_0 \frac{\left(\frac{N+1}{2}\right)^2}{\left(N-\frac{1}{2}\right)^2},$$

kde jsme položili $E_0 = \dfrac{h^2}{8m_\mathrm{e}a^2} = 18{,}9\ \mathrm{eV}$.

4 body

c) Energie ΔE potřebná k přechodu elektronu na energeticky nejbližší hladinu, tj. z HOMO na LUMO, činí

$$\Delta E = E_0 \frac{N+1}{N^2} \quad \text{pro } N \text{ sudá}, \qquad \Delta E = E_0 \frac{N}{\left(N-\frac{1}{2}\right)^2} \quad \text{pro } N \text{ lichá}.$$

Tuto energii získá molekula pohlcením fotonu záření vlnové délky $\dfrac{hc}{\Delta E}$. Dosazením vychází

$$\lambda = \lambda_0 \frac{N^2}{N+1} \quad \text{pro } N \text{ sudá}, \qquad \lambda = \lambda_0 \frac{\left(N-\frac{1}{2}\right)^2}{N} \quad \text{pro } N \text{ lichá},$$

kde jsme opět zavedli $\lambda_0 = \dfrac{8m_\mathrm{e}ca^2}{h} = 65{,}6\ \mathrm{nm}$.

Oba zlomky s rostoucím N rostou — zvětšení délky jámy převáží nad přírůstkem počtu elektronů. Vlnová délka přechodu roste. Vyčíslení a srovnání s experimentálními daty jsou v tabulce:

N	2	3	4	5	6	7	8
λ/nm	87	137	210	266	337	396	466
λ_exp/nm	165	172	217	223	258	266	302

Ve viditelném oboru od 360 nm do 780 nm nacházíme první přechod pro $N = 7$, s absorpcí ve fialové oblasti, u molekuly heptatrienu bychom tedy očekávali doplňkovou žlutou barvu. Jak ukazuje tabulka, výsledky odpovídají jen kvalitativně, model je příliš hrubý. **4 body**