**Řešení úloh 1. kola 56. ročníku fyzikální olympiády.** *Kategorie B*

Autoři úloh: J. Jírů (1, 3, 5, 7), J. Thomas (2, 4), P. Šedivý (6)

**1.** Kulička o hmotnosti $m$ valící se bez prokluzování rychlostí o velikosti $v$ má kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\frac{v^2}{r^2} = \frac{7}{10}mv^2.$$

Na kuličku během pohybu působí tíhová síla a reakce žlábku. Dostředivá síla, která působí na kuličku při pohybu po kruhové části žlábku, je výslednicí reakce žlábku a normálové složky tíhové síly. Dostane-li se kulička až do bodu $A[0;2R]$, splňuje dostředivá síla působící na kuličku v bodě $A$ podmínku

$$\frac{mv^2}{R} \geq mg \quad \Rightarrow \quad v \geq \sqrt{Rg}.$$

Rovnost nastane pro rychlost o velikosti $v_1$, které odpovídá minimální výška $h_\mathrm{min}$, z níž kuličku uvolníme. Ze zákona zachování mechanické energie plyne

$$mgh_\mathrm{min} = mg\cdot 2R + \frac{7}{10}mv_1^2 = 2mgR + \frac{7}{10}mgR.$$

Z toho

$$h_\mathrm{min} = 2{,}7R. \tag{1}$$

**3 body**

a) V případě $h_1 = 3R$ se kulička do bodu $A$ dostane a následuje vodorovný vrh s počáteční rychlostí $v_{01}$. Ze zákona zachování mechanické energie

$$mg\cdot 3R = mg\cdot 2R + \frac{7}{10}mv_{01}^2$$

pak dostaneme $v_{01} = \sqrt{\frac{10}{7}gR}$. Trajektorie vodorovného vrhu splňuje rovnice

$$x = v_{01}t = \sqrt{\frac{10}{7}Rg}\cdot t, \qquad y = 2R - \frac{1}{2}gt^2.$$

Položením $y = 0$ a vyloučením času ze soustavy dostaneme

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{10}{7}}R = 2{,}39R.$$

**3 body**

b) Ze vztahu (1) plyne, že při počáteční výšce $h = 2{,}36R$ kulička do bodu $A$ nedospěje a odpoutá se od konstrukce dříve. Označme $B$ bod posledního kontaktu kuličky s konstrukcí, $v_{02}$ velikost okamžité rychlosti kuličky

v tomto bodě (obr. R1). V bodě $B$ je reakce žlábku nulová, proto nastává rovnost mezi velikostmi dostředivé síly a normálové složky tíhové síly:

$$\frac{mv_{02}^2}{R} = mg\sin\beta,$$

z čehož

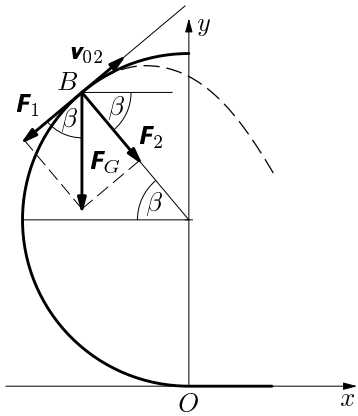
$$\sin\beta = \frac{v_{02}^2}{gR}. \tag{2}$$

Rychlost $v_{02}$ kuličky v bodě $B$ určíme ze ZZME. Platí

$$mg \cdot 2{,}36R = mg \cdot R(1+\sin\beta) + \frac{7}{10}mv_{02}^2.$$

Po dosazení vztahu (2) dostaneme

$$v_{02} = \sqrt{0{,}8gR}. \tag{3}$$



Obr. R1

Po dosažení bodu $B$ kulička koná šikmý vrh s elevačním úhlem $90° - \beta$. Souřadnice bodu $B$ jsou

$$x_B = -R\cos\beta, \quad y_B = R(1+\sin\beta).$$

Trajektorie šikmého vrhu splňuje rovnice

$$x = -R\cos\beta + v_{02}t\sin\beta,$$

$$y = R(1+\sin\beta) + v_{02}t\cos\beta - \frac{1}{2}gt^2.$$

Z rovnic (2) a (3) pro hodnoty goniometrických funkcí úhlu $\beta$ plyne

$$\sin\beta = \frac{v_{02}^2}{gR} = 0{,}8,$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = 0{,}6.$$

Po jejich dosazení rovnice šikmého vrhu mají tvar

$$x = -0{,}6R + 0{,}8\sqrt{0{,}8gR}\cdot t, \tag{4}$$

$$y = 1{,}8R + 0{,}6\sqrt{0{,}8gR}\cdot t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{5}$$

Položením $y = 0$ v rovnici (5) dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou t:

$$\frac{1}{2}gt^2 - 0{,}6\sqrt{0{,}8gR}\cdot t - 1{,}8R = 0.$$

Fyzikální význam kladný kořen

$$t_1 = \frac{0{,}6\sqrt{0{,}8gR} + \sqrt{0{,}36 \cdot 0{,}8gR + 3{,}6gR}}{g} = 2{,}508\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Jeho dosazením do rovnice (4) dostaneme souřadnici místa dopadu $x_2 = 1{,}19R$.

**4 body**

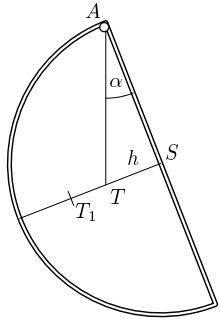
**2.** a) Z rovnice

$$(2R + \pi R)h = \pi R|T_1S|,$$

kde dle zadání $|T_1S| = \dfrac{2R}{\pi}$, plyne

$$h = \frac{2}{\pi + 2}R.$$

**2 body**



Obr.R2

b) Těžiště smyčky zavěšené pouze na hřebíku $A$ se bude nacházet pod tímto hřebíkem (obr. R2). Z toho

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{R} = \frac{2}{\pi + 2} = 0{,}389 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 21{,}3^\circ.$$

**2 body**

c) Na smyčku působí tři síly; v bodě $A$ reakce hřebíku $\boldsymbol{N}$, jejíž složky do vodorovného a svislého směru označíme $\boldsymbol{N}_x$ a $\boldsymbol{N}_y$, v bodě $B$ reakce hřebíku $\boldsymbol{F}$, která má směr do středu oblouku a tíhová síla, která působí v těžišti $T$ ležícím na ose smyčky ve vzdálenosti $h$ od středu oblouku (obr. R3). Z rovnováhy momentů vzhledem k bodu $A$ plyne

$$FR\sin\beta = mg\left(R - \frac{h}{\operatorname{tg}\beta}\right)\sin\beta = mg\left(R - \frac{\dfrac{2R}{\pi+2}}{\operatorname{tg}\beta}\right)\sin\beta.$$

Protože $\beta = 60^\circ$, $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{3}$, $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{2}$, dostáváme

$$F = mg\left(1 - \frac{2}{(\pi+2)\sqrt{3}}\right) = 3{,}80\ \text{N}.$$

Z rovnováhy sil plyne pro souřadnice síly $\boldsymbol{N}$

$$N_x = -F\sin\beta = -3{,}29\ \text{N}, \qquad N_y = mg - F\cos\beta = 3{,}00\ \text{N}.$$

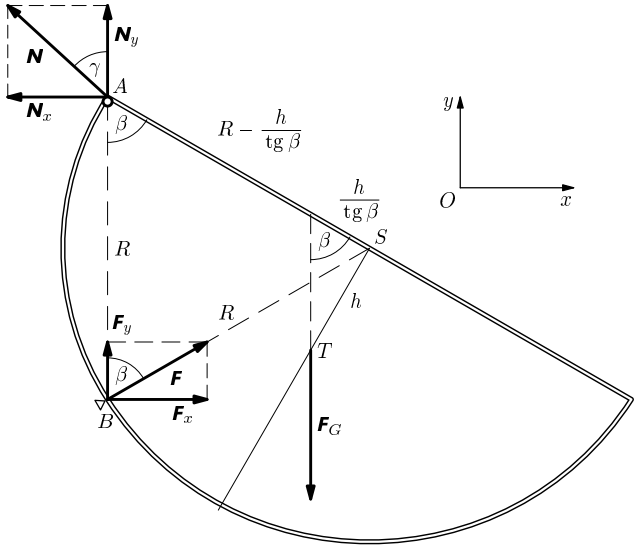
Reakce v bodě $A$ má velikost

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = 4{,}46 \text{ N}$$

a se svislým směrem svírá úhel $\gamma$, pro který platí

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{|N_x|}{N_y} = 1{,}097, \quad \gamma = 47{,}6°.$$

**6 bodů**




Obr. R3

**3.** a) Během pádu články řetězu na sebe vzájemně nepůsobí, každý je urychlován tíhovým polem Země a pohybuje se volným pádem. Označíme-li $t_1$ čas dopadu dolního konce a $t_2$ čas dopadu horního konce řetězu, platí

$$h - l = \frac{1}{2} g t_1^2, \qquad h = \frac{1}{2} g t_2^2.$$

Z rovnic pro hledanou dobu plyne

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{2(h-l)}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}} \left( \sqrt{h} - \sqrt{h-l} \right).$$

Číselně vychází 0,65 s pro $h_1 = 10{,}0$ m a 0,39 s pro $h_2 = 20{,}0$ m.

**2 body**

b) Označme $y$ souřadnici horního konce řetězu během pádu. Podle ZZME pro

$y \geq l$ je kinetická energie padajícího řetězu

$$E_{\mathrm{k}1} = mg(h - y).$$

V další fázi pro $y \leq l$ má řetěz kinetickou energii

$$E_{\mathrm{k}2} = \frac{1}{2}\,\frac{y}{l}mv^2.$$

kde $v = \sqrt{2g(h-y)}$ je rychlost každého dosud se pohybujícího článku. Po dosazení dostaneme

$$E_{\mathrm{k}2} = \frac{mg}{l}(h - y)y.$$

Je to kvadratická funkce bez absolutního členu s nulovými body pro $y = 0$ a $y = h$, tedy pro vrchol jejího grafu platí $y = h/2$. Pro $h \leq 2l$ (což číselně splňuje $h_1$) nabývá kinetická energie maxima ve výšce $y = h/2$, a to

$$E_{\mathrm{kmax}} = \frac{mgh^2}{4l} = 140 \text{ J}.$$

Pro $h \geq 2l$ (což číselně splňuje $h_2$) nabývá kinetická energie maxima ve výšce $y = l$, a to

$$E_{\mathrm{kmax}} = mg(h - l) = 510 \text{ J}.$$

**4 body**

c) Označme $s = h - y$ dráhu uraženou horním koncovým bodem řetězu. Pak podle b) je závislost kinetické energie na dráze dána rovnicemi

$$E_{\mathrm{k}1} = mgs \quad \text{pro} \quad s \leq h - l,$$

$$E_{\mathrm{k}2} = \frac{mg}{l}(h - s)s = -\frac{mg}{l}s^2 + \frac{mgh}{l}s \quad \text{pro} \quad s \geq h - l.$$

Závislost potenciální energie na dráze je dána rovnicemi

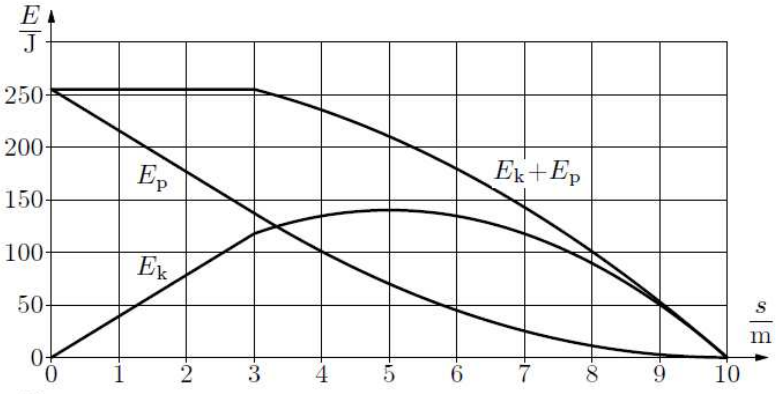
$$E_{\mathrm{p}1} = mg\left(h - \frac{l}{2} - s\right) \quad \text{pro} \quad s \leq h - l,$$

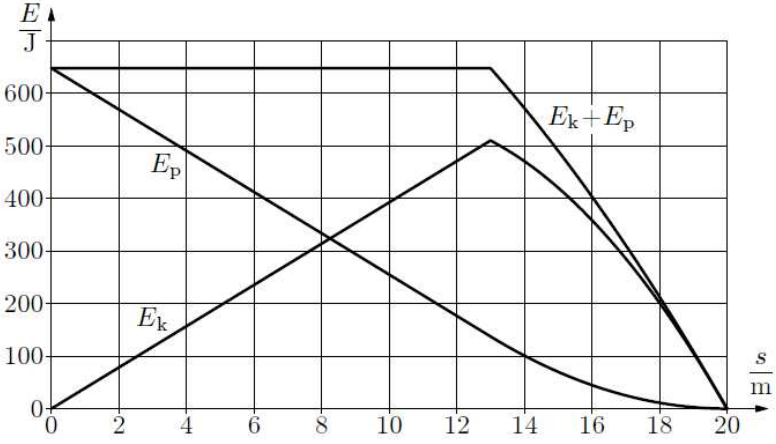
$$E_{\mathrm{p}2} = \frac{y}{l}mg\frac{y}{2} = \frac{mg}{2l}y^2 = \frac{mg}{2l}(h - s)^2 \quad \text{pro} \quad s \geq h - l.$$

Celková mechanická energie je

$$E_1 = E_{\mathrm{k}1} + E_{\mathrm{p}1} = mg\left(h - \frac{l}{2}\right) \quad \text{pro} \quad s \leq h - l,$$

$$E_2 = E_{\mathrm{k}2} + E_{\mathrm{p}2} = \frac{mg}{2l}\left(h^2 - s^2\right) \quad \text{pro} \quad s \geq h - l.$$




**4 body**

**4.**a) Jde o fyzické kyvadlo, jehož těžiště je ve vzdálenosti $L/3$ od osy otáčení. Při malé amplitudě pro jeho dobu kmitu pak platí

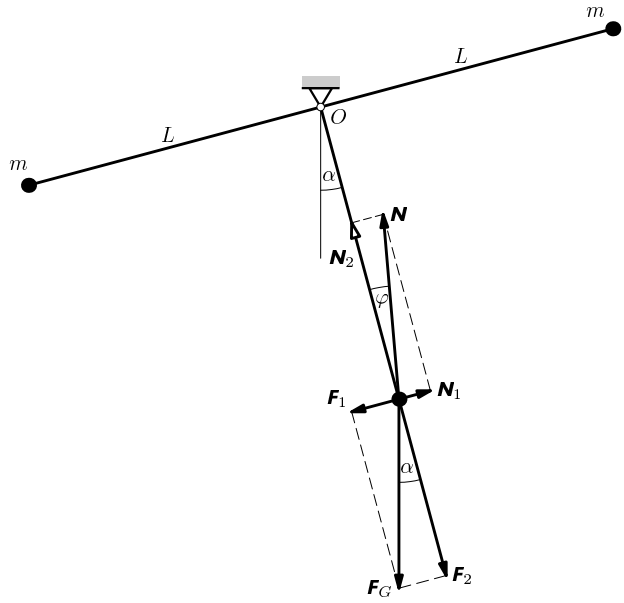
$$T \approx 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} = 2\pi\sqrt{\frac{3mL^2}{mgL}} = 1{,}6 \text{ s}.$$

**3 body**

b) V krajní poloze je okamžitá úhlová rychlost kyvadla nulová. Výsledný moment sil působících na kyvadlo má velikost $M = F_G L \sin\alpha$ a kyvadlu uděluje úhlové zrychlení o velikosti

$$\varepsilon = \frac{M}{J} = \frac{mgL\sin\alpha}{3mL^2} = \frac{g\sin\alpha}{3L}.$$

Síly působící v krajní poloze na spodní kuličku jsou vyznačeny na obr. R4.




Obr. R4

Je to tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ s tečnou složkou $\boldsymbol{F}_1$ a normálovou složkou $\boldsymbol{F}_2$ a síla $\boldsymbol{N}$ od tyčky s tečnou složkou $\boldsymbol{N}_1$ a normálovou složkou $\boldsymbol{N}_2$. Kuličky mají v krajní poloze nulovou rychlost, tedy i nulové normálové zrychlení. Proto

$$N_2 = F_2 = mg\cos\alpha.$$

Tečné zrychlení zde má velikost $a_\mathrm{t} = \varepsilon L = \dfrac{g\sin\alpha}{3}$. Proto

$$F_1 - N_1 = ma_\mathrm{t} \quad \Rightarrow \quad N_1 = F_1 - ma_\mathrm{t} = mg\sin\alpha - \frac{mg\sin\alpha}{3} = \frac{2mg\sin\alpha}{3}.$$

Síla, kterou na dolní kuličku působí tyčka, má velikost

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = mg\sqrt{\cos^2\alpha + \frac{4}{9}\sin^2\alpha} = 0{,}99mg = 0{,}97\ \mathrm{N}$$

a je odchýlena od tyčky o úhel $\varphi$, pro který platí

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{N_1}{N_2} = \frac{2}{3}\operatorname{tg}\alpha, \qquad \varphi = 6{,}7^\circ.$$

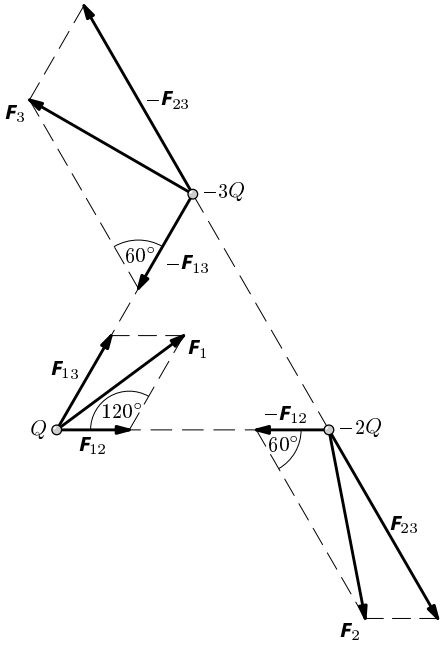
**7 bodů**

**5.**a) Pro velikosti výsledných elektrických sil působících na jednotlivé částice plyne z obr. R5 podle kosinové věty:

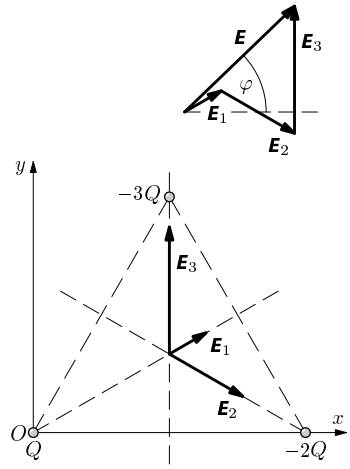
$$F_1^2 = F_{12}^2 + F_{13}^2 - 2F_{12}F_{13}\cos 120^\circ = F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{12}F_{13} =$$
$$= \left(k\frac{2Q^2}{a^2}\right)^2 + \left(k\frac{3Q^2}{a^2}\right)^2 + k\frac{2Q^2}{a^2}\cdot k\frac{3Q^2}{a^2} = (4+9+6)\left(k\frac{Q^2}{a^2}\right)^2,$$
$$F_2^2 = F_{12}^2 + F_{23}^2 - 2F_{12}F_{23}\cos 60^\circ = F_{12}^2 + F_{23}^2 - F_{12}F_{23} =$$
$$= \left(k\frac{2Q^2}{a^2}\right)^2 + \left(k\frac{6Q^2}{a^2}\right)^2 - k\frac{2Q^2}{a^2}\cdot k\frac{6Q^2}{a^2} = (4+36-12)\left(k\frac{Q^2}{a^2}\right)^2,$$
$$F_3^2 = F_{13}^2 + F_{23}^2 - 2F_{13}F_{23}\cos 60^\circ = F_{13}^2 + F_{23}^2 - F_{13}F_{23} =$$
$$= \left(k\frac{3Q^2}{a^2}\right)^2 + \left(k\frac{6Q^2}{a^2}\right)^2 - k\frac{3Q^2}{a^2}\cdot k\frac{6Q^2}{a^2} = (9+36-18)\left(k\frac{Q^2}{a^2}\right)^2,$$
$$F_1 = \sqrt{19}\cdot k\frac{Q^2}{a^2}, \qquad F_2 = \sqrt{28}\cdot k\frac{Q^2}{a^2}, \qquad F_3 = \sqrt{27}\cdot k\frac{Q^2}{a^2},$$

kde $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Největší síla působí na částici s nábojem $-2Q$, její velikost je $2\sqrt{7}\cdot k\dfrac{Q^2}{a^2}$.

**5 bodů**




Obr.R5




Obr. R6

b) Zvolme soustavu souřadnic podle obrázku R6. Intenzity způsobené jednotlivými nabitými částicemi v těžišti trojúhelníku složíme. Pak platí:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{E}_3, \qquad E_2 = 2E_1, \qquad E_3 = 3E_1,$$

$$E_x = E_{x1} + E_{x2} + E_{x3} = E_1 \cos 30^\circ + 2E_1 \cos(-30^\circ) + 0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} E_1,$$

$$E_y = E_{y1} + E_{y2} + E_{y3} = E_1 \sin 30^\circ + 2E_1 \sin(-30^\circ) + 3E_1 = \frac{5}{2} E_1,$$

$$E_1 = k \frac{Q}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} a\right)^2} = 3k \frac{Q}{a^2}.$$

Výsledná intenzita elektrického pole má velikost

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} E_1\right)^2 + \left(\frac{5}{2} E_1\right)^2} = \sqrt{13} \cdot E_1 = 3\sqrt{13} \cdot k \frac{Q}{a^2}$$

a směrový úhel

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{E_y}{E_x} = \operatorname{arctg} \frac{5}{3\sqrt{3}} = 43{,}9^\circ.$$

**5 bodů**

**7.** a) Označme $R_\mathrm{v}$ odpor prodlužovacího kabelu, $R_1$ odpor varné konvice a $U$ napětí v síťové zásuvce. Pak napětí na jedné zapnuté konvici na konci prodlužovacího kabelu je

$$U_1' = \frac{R_1}{R_1 + R_\mathrm{v}} U. \tag{1}$$

Z rovnosti elektrických energií dodaných varné konvici připojené bez kabelu přímo do síťové zásuvky a konvici připojené s kabelem plyne

$$\frac{U^2}{R_1} t_0 = \frac{U_1'^2}{R_1} t_1.$$

Po dosazení z (1) a po úpravě dostaneme

$$t_0 = \frac{R_1^2}{(R_1 + R_\mathrm{v})^2} t_1. \tag{2}$$

Odmocněním vztahu (2) a úpravou nalezneme vztah mezi odpory $R_1$ a $R_\mathrm{v}$:

$$\sqrt{t_0} = \frac{R_1}{R_1 + R_\mathrm{v}} \sqrt{t_1},$$

$$R_\mathrm{v} = \frac{\sqrt{t_1} - \sqrt{t_0}}{\sqrt{t_0}} R_1. \tag{3}$$

**4 body**

Připojíme-li na konec kabelu paralelně dvě konvice, bude na nich napětí

$$U_2' = \frac{\frac{R_1}{2}}{\frac{R_1}{2} + R_\mathrm{v}} U = \frac{R_1}{R_1 + 2R_\mathrm{v}} U. \tag{4}$$

Z rovnosti elektrických energií dodaných konvici připojené bez kabelu a jedné konvici připojené ve dvojici na konci kabelu

$$\frac{U^2}{R_1} t_0 = \frac{U^2 \left( \frac{R_1}{R_1 + 2R_\mathrm{v}} \right)^2}{R_1} t_2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \left( \frac{R_1 + 2R_\mathrm{v}}{R_1} \right)^2 t_0. \tag{5}$$

Po dosazení vztahu (3) a po úpravě dostaneme

$$t_2 = \left( \frac{R_1 + 2R_1 \frac{\sqrt{t_1} - \sqrt{t_0}}{\sqrt{t_0}}}{R_1} \right)^2 t_0 = \left( \frac{2\sqrt{t_1} - \sqrt{t_0}}{\sqrt{t_0}} \right)^2 t_0 = \left( 2\sqrt{t_1} - \sqrt{t_0} \right)^2 = 265\,\mathrm{s}.$$

**4 body**

b) Připojíme-li ke konci kabelu 2 konvice, zvětší se proud procházející kabelem přibližně na dvojnásobek, kabel se více zahřeje a odpor $R_\mathrm{v}$ ve vztahu (5) bude větší, než by vycházelo ze vztahu (3). Proud procházející jednou konvicí se sice nepatrně zmenší, ale odpor $R_1$ topné spirály se prakticky nezmění — odporové vodiče mají malý teplotní součinitel odporu. Protože ohřívání bude trvat o něco déle, budou i větší tepelné ztráty z konvice do okolí a energie dodaná konvici bude v případě dvou konvic o něco větší než při zapojení jedné konvice. Doba $t_2$ bude tedy ve skutečnosti o něco větší než vypočítaná za zjednodušujících předpokladů.

**2 body**