Řešení úloh 1. kola 56. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: J. Thomas (3, 4, 5, 7), J. Jírů (1, 2) a M. Jarešová (6)

1. a) První pilíř je nejvíce zatížen, vjedou-li na něj zadní kola více zatížené nápravy:

$$F_{1\max} = \frac{2}{5}mg\frac{d-l}{d} + \frac{3}{5}mg = \left(12\,000 \cdot \frac{1{,}5}{5} + 18\,000\right)\ \mathrm{N} = 21\,600\ \mathrm{N}.$$

Maximální zatížení druhého pilíře může nastat ve dvou případech – při vjezdu předních kol na druhý pilíř působí na druhý pilíř síla o velikosti

$$F_{2\max} = \frac{2}{5}mg + \frac{3}{5}mg\frac{d-l}{d} = \left(12\,000 + 18\,000 \cdot \frac{1{,}5}{5}\right)\ \mathrm{N} = 17\,400\ \mathrm{N},$$

při vjezdu zadních kol působí síla o velikosti $F'_{2\max} = \frac{3}{5}mg = 18\,000\ \mathrm{N}$.

Porovnáním zjišťujeme, že druhý pilíř je nejvíce zatížen, vjedou-li na něj zadní kola. **3 body**

b) Pro $x \in \langle 0, d\rangle$ působí přední kola na první pilíř silou o velikosti

$$F_{\mathrm{p1}}(x) = \frac{2}{5}mg\frac{d-x}{d} = 12\,000 \cdot \frac{5-\{x\}}{5}\ \mathrm{N},$$

na druhý pilíř silou o velikosti

$$F_{\mathrm{p2}}(x) = \frac{2}{5}mg\frac{x}{d} = 12\,000 \cdot \frac{\{x\}}{5}\ \mathrm{N}.$$

Pro $x \in \langle l, d+l\rangle$ působí zadní kola na první pilíř silou o velikosti

$$F_{\mathrm{z1}}(x) = \frac{3}{5}mg\frac{d+l-x}{d} = 18\,000 \cdot \frac{8{,}5-\{x\}}{5}\ \mathrm{N},$$

na druhý pilíř silou o velikosti

$$F_{\mathrm{z2}}(x) = \frac{3}{5}mg\frac{x-l}{d} = 18\,000 \cdot \frac{\{x\}-3{,}5}{5}\ \mathrm{N}.$$

Hledaná funkce má na jednotlivých intervalech tvar podle toho, zda na můstek působí:

Pouze přední kola $x \in \langle 0, l\rangle$: $F_1(x) = F_{\mathrm{p1}}(x)$, $F_2(x) = F_{\mathrm{p2}}(x)$.

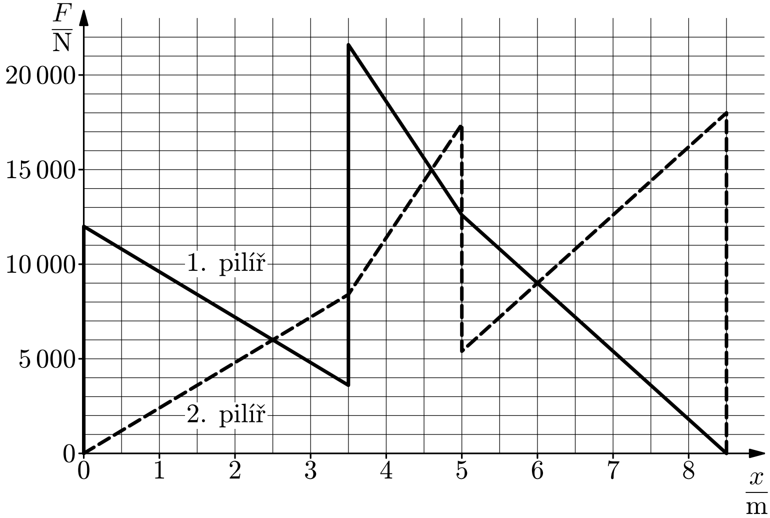
Přední i zadní kola $x \in \langle l, d\rangle$:

$$F_1(x) = F_{\mathrm{p1}}(x) + F_{\mathrm{z1}}(x), \quad F_2(x) = F_{\mathrm{p2}} + F_{\mathrm{z2}}(x).$$

Pouze zadní kola $x \in \langle d, d+l\rangle$: $F_1(x) = F_{\mathrm{z1}}(x)$, $F_2(x) = F_{\mathrm{z2}}(x)$.

Funkční hodnoty ve významných bodech (při nájezdu zadních kol na první pilíř $F_1(3{,}5\ \mathrm{m})$ a při sjezdu předních kol z druhého pilíře $F_2(5\ \mathrm{m})$ se velikost síly působící na pilíř mění skokem):

$\frac{x}{\mathrm{m}}$	0	3,5	3,5	5	5	8,5
	pouze přední kola		přední i zadní kola		pouze zadní kola	
$\frac{F_1(x)}{\mathrm{N}}$	12 000	3 600	21 600	12 600	12 600	0
$\frac{F_2(x)}{\mathrm{N}}$	0	8 400	8 400	17 400	5 400	18 000



6 bodů

c) Z rovnice

$$\frac{3}{5}mg = \frac{2}{5}mg + \frac{3}{5}mg \cdot \frac{d' - l}{d'}$$

plyne $d' = \frac{3}{2}l = 5{,}25$ m. **1 bod**

2. a) Velikost rychlosti cyklisty po větru je $v_1 = \frac{s}{2t_1} = 50{,}00\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$

a proti větru $v_2 = \frac{s}{2t_2} = 32{,}00\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Výkon cyklisty při jízdě po větru lze vyjádřit

$$P = F_{\mathrm{odp}} v_1 = k(v_1 - u)^2 \cdot v_1$$

a při jízdě proti větru

$$P = F_{\mathrm{odp}} v_2 = k(v_2 + u)^2 \cdot v_2.$$

Z rovnosti výrazů na pravé straně dostaneme kvadratickou rovnici

$$(v_1 - v_2)u^2 - 2(v_1^2 + v_2^2)u + v_1^3 - v_2^3 = 0.$$

Úloze vyhovuje menší z kořenů

$$u = \frac{v_1^2 + v_2^2 - (v_1 + v_2)\sqrt{v_1 v_2}}{v_1 - v_2} = 13{,}56\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

6 bodů

b) Vyjdeme z rovnosti výkonů za bezvětří a na jednom z úseků za větru, např.

$$P = kv_0^3 = k(v_1 - u)^2 \cdot v_1.$$

Z rovnosti druhého a třetího členu plyne

$$v_0 = \sqrt[3]{(v_1 - u)^2 v_1} = 40{,}49\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

Dosažený čas za bezvětří je $t_0 = \dfrac{s}{v_0} = 53{:}21$ min.

Za bezvětří je doba jízdy kratší o $\Delta t = t_1 + t_2 - t_0 = 2{:}00$ min.

4 body

3. a) Motocyklista A se pohybuje rovnoměrně zrychleně. Na prvním úseku rovinky platí:

$$l_1 = v_{01}t_1 + \frac{1}{2}at_1^2, \tag{1}$$

$$v_{02} = v_{01} + at_1. \tag{2}$$

Na druhém úseku platí

$$l_2 = v_{02}t_2 + \frac{1}{2}at_2^2, \tag{3}$$

$$v_2 = v_{02} + at_2 = v_{01} + a(t_1 + t_2). \tag{4}$$

Dosadíme z rovnice (2) do rovnice (3), vyjádříme v_{01} a porovnáme s rovnicí (1):

$$l_2 = (v_{01} + at_1)t_2 + \frac{1}{2}at_2^2 \quad \Rightarrow \quad v_{01} = \frac{l_2}{t_2} - at_1 - \frac{at_2}{2} = \frac{l_1}{t_1} - \frac{at_1}{2},$$

$$\frac{a}{2}(t_1 + t_2) = \frac{l_2}{t_2} - \frac{l_1}{t_1} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2\left(\dfrac{l_2}{t_2} - \dfrac{l_1}{t_1}\right)}{t_1 + t_2}.$$

Číselně $a = 1{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. **4 body**

b) Počáteční rychlost určíme ze vztahu (1), rychlost průjezdu cílem ze vztahu (4):

$$v_{01} = \frac{l_1}{t_1} - \frac{\left(\frac{l_2}{t_2} - \frac{l_1}{t_1}\right) t_1}{t_1 + t_2},$$

$$v_2 = \frac{l_1}{t_1} - \frac{\left(\frac{l_2}{t_2} - \frac{l_1}{t_1}\right) t_1}{t_1 + t_2} + \frac{2\left(\frac{l_2}{t_2} - \frac{l_1}{t_1}\right)}{t_1 + t_2}(t_1 + t_2) = 2\frac{l_2}{t_2} - \frac{l_1}{t_1} - \frac{\left(\frac{l_2}{t_2} - \frac{l_1}{t_1}\right) t_1}{t_1 + t_2}.$$

Číselně: $v_{01} = 24{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $v_2 = 36{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. **2 body**

c) Motocyklista A bude v cíli za dobu $t = t_1 + t_2 = 12{,}5$ s. Motocyklista B projede cílovou rovinkou za dobu t_3, pro kterou platí

$$v_{01} t_3 - \frac{1}{2} a_1 t_3^2 = l_1 + l_2 \quad \Rightarrow \quad t_3 = \frac{v_{01} \pm \sqrt{v_{01}^2 - 2a_1(l_1 + l_2)}}{a_1}.$$

Úloze vyhovuje menší kořen $t_3 = 16{,}2$ s. Protože měl motocyklista B náskok $\Delta t = 4{,}0$ s, bude v cíli o 0,3 s dříve. **4 body**

4. a) Zavěšený drát zaujme polohu, ve které je těžiště pod bodem závěsu. Zvolíme-li souřadnicovou soustavu podle obr. R1, má těžiště souřadnice

$$x_T = \frac{\frac{2m}{3} \cdot \frac{l}{3} + \frac{m}{3} \cdot \frac{2l}{3}}{m}, \quad y_T = \frac{\frac{2m}{3} \cdot 0 - \frac{m}{3} \cdot \frac{l}{6}}{m},$$

kde m je hmotnost drátu. Po úpravě

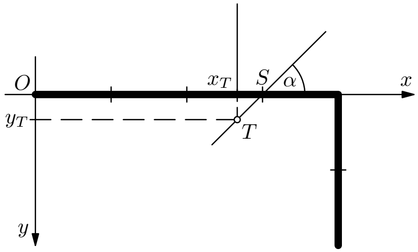
$$x_T = \frac{4}{9} l, \qquad y_T = -\frac{l}{18}.$$

Aby delší část drátu zaujala vodorovnou polohu, musíme bod závěsu umístit do vzdálenosti $x_T \doteq 0{,}444l$ od konce delší části drátu. **3 body**

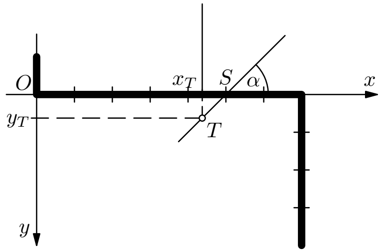
b) Protože pro souřadnici x_S středu délky drátu platí

$$x_T - x_S = \frac{4l}{9} - \frac{l}{2} = -\frac{l}{18} = y_T,$$

je přímka ST odchýlena od delší části drátu o úhel $\alpha = 45°$. Zavěsíme-li drát v bodě S, zaujme přímka ST svislou polohu a obě části drátu budou mít sklon 45°. **2 body**



Obr. R1



Obr. R2

c) U dvakrát zalomeného drátu zvolíme soustavu souřadnic podle obr. R2. Pak

$$x_T = \frac{\frac{m}{12} \cdot 0 + \frac{7m}{12} \cdot \frac{7l}{24} + \frac{m}{3} \cdot \frac{7l}{12}}{m}, \quad y_T = \frac{\frac{m}{12} \cdot \frac{l}{24} + \frac{7m}{12} \cdot 0 - \frac{m}{3} \cdot \frac{2l}{12}}{m},$$

Po úpravě

$$x_T = \frac{35}{96} l, \qquad y_T = -\frac{5}{96} l.$$

Aby prostřední část drátu zaujala vodorovnou polohu, musíme bod závěsu umístit do vzdálenosti $x_T \doteq 0{,}365 l$ od levého ohybu. **3 body**

d) Tentokrát platí

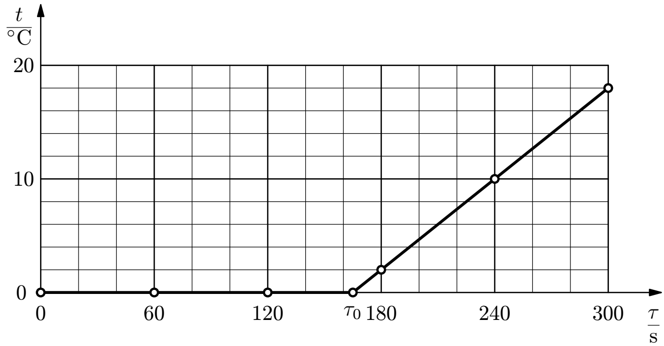
$$x_T - x_S = \frac{35}{96} l - \frac{5}{12} l = -\frac{5}{96} l = y_T,$$

Přímka ST tedy opět svírá se střední částí drátu úhel $\alpha = 45^\circ$ a po zavěšení drátu v bodě S budou mít jeho části sklon 45°. **2 body**

5. a, b) Počáteční teplota směsi vody a ledu je 0 °C. Teplota t v nádobě se začala rovnoměrně zvyšovat od okamžiku, kdy všechen led roztál. Sestrojíme graf závislosti teploty v nádobě na času τ měřeného od okamžiku zapnutí vařiče (obr. R3). Označme m_v, m_l původní hmotnosti vody a ledu v nádobě, τ_0 čas, kdy všechen led roztál, $\tau_1 = 3$ min $= 180$ s, $\tau_2 = 5$ min $= 300$ s, t_1, t_2 teploty v časech τ_1, τ_2. Platí

$$\frac{t_1 - 0\,^\circ\mathrm{C}}{t_2 - t_1} = \frac{\tau_1 - \tau_0}{\tau_2 - \tau_1} \quad \Rightarrow \quad \tau_0 = \tau_1 - \frac{t_1(\tau_1 - \tau_0)}{t_2 - t_1} = 165 \text{ s}.$$

3 body



Obr. R3

Teplo na roztátí ledu o hmotnosti m_l dodal vařič za dobu τ_0:

$$P\tau_0 = m_\mathrm{l} l_\mathrm{t} \quad \Rightarrow \quad m_\mathrm{l} = \frac{P\tau_0}{l_\mathrm{t}} = 0{,}199\ \mathrm{kg}.$$

Za dobu $\tau_2 - \tau_1$ se pak teplota vody zvýší o $t_2 - t_1$, teplo na zvýšení teploty dodal opět vařič:

$$P(\tau_2 - \tau_1) = (m_\mathrm{v} + m_\mathrm{l})c(t_2 - t_1) \quad \Rightarrow \quad m_\mathrm{v} = \frac{P(\tau_2 - \tau_1)}{c(t_2 - t_1)} - m_\mathrm{l} = 0{,}515\ \mathrm{kg}.$$

3 body

c) Označme dále τ_3 čas, kdy se voda v nádobě začala vařit a τ_4 čas, kdy se vyvařila polovina vody. Z energetické bilance plyne

$$P(\tau_3 - \tau_0) = (m_\mathrm{v} + m_\mathrm{l})c \cdot 100\ ^\circ\mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad \tau_3 = \tau_0 + \frac{(m_\mathrm{v} + m_\mathrm{l})c \cdot 100\ ^\circ\mathrm{C}}{P} = 915\ \mathrm{s},$$

$$P(\tau_4 - \tau_3) = (m_\mathrm{v} + m_\mathrm{l}) l_\mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \tau_4 = \tau_3 + \frac{(m_\mathrm{v} + m_\mathrm{l}) l_\mathrm{v}}{2P} = 2\,930\ \mathrm{s}.$$

4 body

7. a) Kapaliny se uspořádají podle klesající hustoty - nahoře bude olej, pod ním voda a dole rtuť. Dřevěná kulička bude plavat na oleji, vosková na hladině mezi olejem a vodou a ocelová mezi vodou a rtutí. **1 bod**

b) Na dřevěnou kuličku působí tíhová síla a vztlaková síla, které jsou v rovnováze. Velikost objemu kuličky, která se nachází pod hladinou oleje označíme V_1. Platí:

$$V \varrho_6 g = V_1 \varrho_3 g \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V} = \frac{\varrho_6}{\varrho_3} = \frac{2}{3}.$$

Dvě třetiny objemu dřevěné kuličky jsou ponořeny v oleji, jedna třetina vyčnívá nad hladinu.

Vosková kulička se nachází na rozhraní mezi vodou a olejem. Část objemu pod hladinou vody označíme V_1. Platí:

$$V\varrho_5 g = V_1\varrho_1 g + (V - V_1)\varrho_3 g \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V} = \frac{\varrho_5 - \varrho_3}{\varrho_1 - \varrho_3} = 0{,}6.$$

Čtyři desetiny objemu voskové kuličky vyčnívají nad hladinu vody, šest desetin objemu kuličky je ponořeno ve vodě. Ocelová kulička se nachází na rozhraní mezi rtutí a vodou. Část objemu pod hladinou rtuti označíme V_1, Platí:

$$V\varrho_4 g = V_1\varrho_2 g + (V - V_1)\varrho_1 g \quad \Rightarrow \quad \frac{V_1}{V} = \frac{\varrho_4 - \varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1} = 0{,}54.$$

46 % objemu kuličky vyčnívá nad hladinu rtuti. **4 body**

c) Protože všechny kuličky jsou v rovnováze, je vztlaková síla rovna vždy síle tíhové. Objem všech kuliček je stejný:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 5{,}2 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}^3 = 0{,}52\ \mathrm{cm}^3, \qquad F_{\mathrm{vz}} = F_G = V \cdot \varrho \cdot g.$$

Vztlakové síly budou mít velikosti $F_\mathrm{d} = 3{,}08$ mN, $F_\mathrm{v} = 4{,}93$ mN, $F_\mathrm{o} = 40{,}1$ mN. **1 bod**

d) Hloubku ponoru určíme řešením rovnice

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\pi r v^2 - \frac{1}{3}\pi v^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3rv^2 - v^3}{4r^3}.$$

Dosazením $r = 0{,}5$ cm dostaneme rovnici

$$\frac{V_1}{V} = 3\{v\}^2 - 2\{v\}^3,$$

kde $\{v\}$ je číselná hodnota výšky spodní ponořené části kuličky v centimetrech. K řešení této kubické rovnice v intervalu $v \in (0\ \mathrm{cm}, 1\ \mathrm{cm})$ můžeme využít např. tabulku vytvořenou pomocí Excelu:

v	3v^2-2v^3
0	0
0,05	0,00725
0,1	0,028
0,15	0,06075
0,2	0,104
0,25	0,15625
0,3	0,216
0,35	0,28175
0,4	0,352
0,45	0,42525
0,5	0,5
0,55	0,57475
0,6	0,648
0,65	0,71825
0,7	0,784
0,75	0,84375
0,8	0,896
0,85	0,93925
0,9	0,972
0,95	0,99275
1	1

v	3v^2-2v^3	
	⋮	
0,525	0,537469	
0,526	0,538965	
0,527	0,540461	ocel ve rtuti
0,528	0,541956	
0,529	0,543451	
	⋮	
0,565	0,596951	
0,566	0,598425	
0,567	0,599898	vosk ve vodě
0,568	0,601371	
0,569	0,602843	
	⋮	
0,611	0,663765	
0,612	0,66519	
0,613	0,666614	dřevo v oleji
0,614	0,668037	
0,615	0,669458	

Levá tabulka slouží k hrubému odhadu, z pravé podrobnější tabulky odečteme hledané hodnoty. Z tabulky plyne, že dřevěná kulička je ponořena do hloubky 0,61 cm v oleji, ocelová 0,53 cm ve rtuti a vosková 0,57 cm ve vodě.

4 body