Ústřední komise fyzikální olympiády České republiky

Praktická úloha celostátního kola 58. ročníku FO

RUMBURK 2017

Řešení

a) Pro malé kmity kolem osy procházející libovolným otvorem bude periodu kmitů popisovat vzorec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_T + (m_1 + m_2)\,R^2}{g\,(m_1 + m_2)\,R}},$$

kde J_T je moment setrvačnosti vzhledem k těžišti. Odsud vyjádříme

$$T^2R = \frac{4\pi^2}{g}R^2 + \frac{4\pi^2 J_T}{(m_1 + m_2)\,g}. \qquad (1)$$

1 bod

b) Polohu těžiště určíme vyvážením na špejli. Získáme $l_T = 23$ cm, $L = 39$ cm.

1 bod

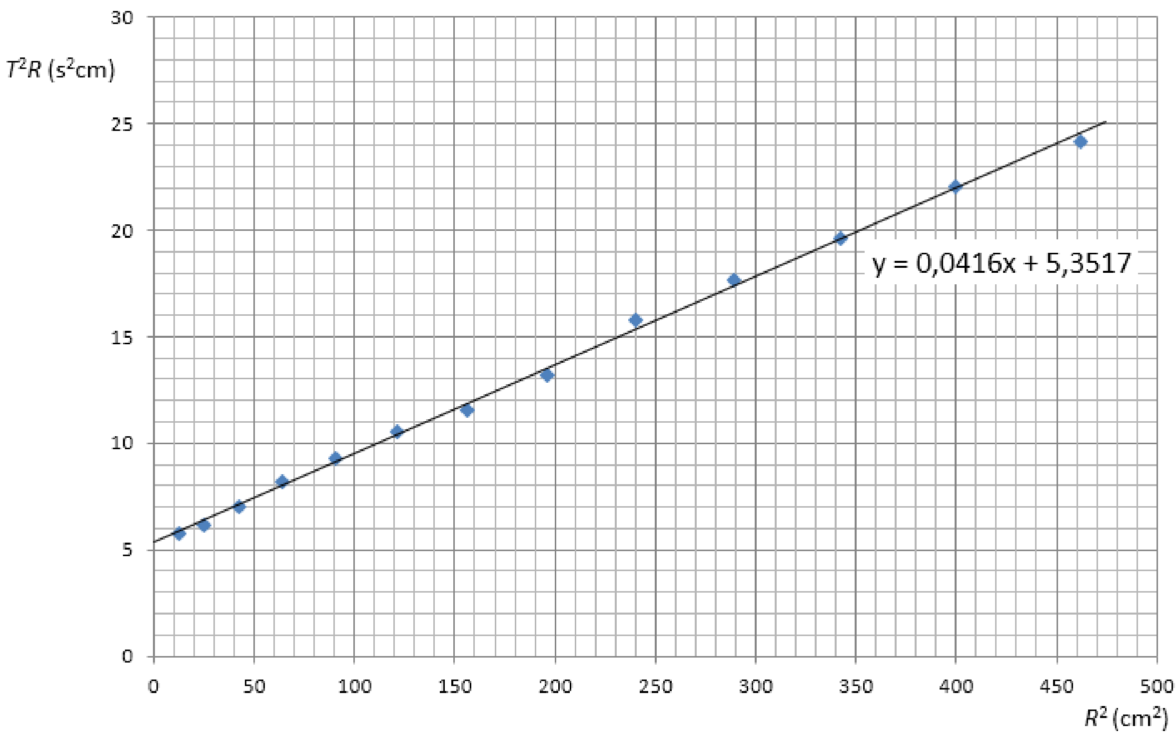
c) Příklad naměřených hodnot je v tabulce, graf je na obrázku na následující stránce.

Bod závěsu	Vzdálenost od horního okraje	R	$10T$	T	R^2	T^2R
1	1,5	21,5	10,6	1,06	462,25	24,1574
2	3,0	20,0	10,5	1,05	400,00	22,0500
3	4,5	18,5	10,3	1,03	342,25	19,62665
4	6,0	17,0	10,2	1,02	289,00	17,6868
5	7,5	15,5	10,1	1,01	240,25	15,81155
6	9,0	14,0	9,7	0,97	196,00	13,1726
7	10,5	12,5	9,6	0,96	156,25	11,5200
8	12,0	11,0	9,8	0,98	121,00	10,5644
9	13,5	9,5	9,9	0,99	90,25	9,31095
10	15,0	8,0	10,1	1,01	64,00	8,1608
11	16,5	6,5	10,4	1,04	42,25	7,0300
12	18,0	5,0	11,1	1,11	25,00	6,1605
13	19,5	3,5	12,8	1,28	12,25	5,7344

6 bodů

d) Z grafu dostáváme hodnoty $k = 0{,}042\ \mathrm{s^2 \cdot cm^{-1}} = 4{,}2 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s^2 \cdot m^{-1}}$, $q = 5{,}4\ \mathrm{s^2 \cdot cm} = 5{,}4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{s^2 \cdot m}$.

2 body



e) Směrnice grafu je podle rovnice (1) $k = \dfrac{4\pi^2}{g}$, odkud úpravou obdržíme

$$g = \frac{4\pi^2}{k} = 950\ \mathrm{cm\cdot s^{-2}} = 9{,}50\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

2 body

f) Z rovnice (1) vyplývá, že průsečík s osou y bude

$$q = \frac{4\pi^2 J_T}{(m_1 + m_2)\, g}.$$

Odtud můžeme určit moment setrvačnosti vzhledem k těžišti

$$J_T = (m_1 + m_2)\,\frac{q}{k}. \tag{2}$$

Z bodu d) máme hodnoty $k = 0{,}042\ \mathrm{s^2\cdot cm^{-1}}$, $q = 5{,}4\ \mathrm{s^2\cdot cm}$, dosazením do rovnice (2) dostaneme

$$J_T = 128{,}57\,(m_1 + m_2)\,. \tag{3}$$

Pro moment setrvačnosti vzhledem k těžišti soustavy bude platit

$$J_T = \frac{1}{12} m_2 L^2 + m_2 \left(l_T - \frac{L}{2}\right)^2 + m_1\,(l_s - l_T)^2\,.$$

Polohu těžiště jsme určili vyvážením trubky na špejli, po dosazení známých hodnot obdržíme

$$J_T = \frac{1}{12} m_2\,(39)^2 + m_2\,(23 - 19{,}5)^2 + m_1\,(l_s - 23)^2\,. \tag{4}$$

Z rovnosti pravých stran rovnic (3) a (4) dostaneme

$$128{,}57\,(m_1 + m_2) = 126{,}75 m_2 + 12{,}25 m_2 + m_1\,(l_s - 23)^2\,,$$

$$-12{,}25\frac{m_2}{m_1}+128{,}57=\left(l_s-23\right)^2\,. \tag{5}$$

Pro polohu těžiště platí

$$l_T=\frac{m_1 l_s+m_2\dfrac{L}{2}}{m_1+m_2},$$

$$23=\frac{m_1 l_s+19{,}5m_2}{m_1+m_2},$$

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{l_s-23}{3{,}5}. \tag{6}$$

Řešením soustavy rovnic (5), (6) vzhledem k l_s dostaneme

$$l_s=32{,}8\ \text{cm}.$$

6 bodů

g) Řešením stejné soustavy vzhledem k $\dfrac{m_2}{m_1}$ obdržíme výsledek

$$\frac{m_2}{m_1}=2{,}8.$$

2 body

Poznámka: Ke stejným výsledkům se můžeme dostat i obecným řešením. Ze vzorce pro polohu těžiště lze vyjádřit poměr hmotností:

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{l_s-l_T}{l_T-\frac{L}{2}}. \tag{7}$$

Kombinaci rovnic (3) a (4) lze obecně zapsat jako

$$\left(m_1+m_2\right)\frac{q}{k}=\frac{1}{12}m_2L^2+m_2\left(l_T-\frac{L}{2}\right)^2+m_1\left(l_s-l_T\right)^2.$$

Dělením m_2 dostaneme

$$\left(\frac{m_1}{m_2}+1\right)\frac{q}{k}=\frac{1}{2}L^2+\left(l_T-\frac{L}{2}\right)^2+\frac{m_1}{m_2}\left(l_s-l_T\right)^2.$$

Za $\dfrac{m_1}{m_2}$ můžeme dosadit převrácenou hodnotu z rovnice (7) a výsledná rovnice je již pouze v proměnné l_s. Její řešení je dosti komplikované a vede na tvar

$$l_s=\left[\tfrac{1}{4}\sqrt{\left(12l_T^2k-12l_TLk+4l_T^2k-12q\right)^2+48q\left(12l_T^2k-12l_TLk+3L^2k\right)}+\right.$$
$$\left.+3l_T^2k-L^2k+3q\right]\frac{1}{3k\left(2l_T-L\right)}.$$

Poměr hmotností se pak ze známé hodnoty l_s vypočte z rovnice (7).