Řešení úloh 1. kola 59. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Autoři úloh: J. Jírů (2), J. Thomas (1, 3, 4, 5, 7), V. Vícha (6)

1.a) Pro první úsek jízdy platí: $s = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a t_1^2$,

pro druhý úsek jízdy platí: $s = (v_0 + a t_1)\, t_2 + \frac{1}{2} a t_2^2$,

pro třetí úsek jízdy platí: $s = (v_0 + a t_1 + a t_2)\, t_3 + \frac{1}{2} a t_3^2$.

Všechny rovnice upravíme:

$$\frac{2s}{a} = \frac{2v_0}{a} t_1 + t_1^2$$

$$\frac{2s}{a} = (\frac{2v_0}{a} + 2t_1) t_2 + t_2^2$$

$$\frac{2s}{a} = (\frac{2v_0}{a} + 2t_1 + 2t_2) t_3 + t_3^2$$

Zavedeme substituci: $A = \frac{2s}{a}$ a $B = \frac{2v_0}{a}$. Budeme pak řešit soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$A = B t_1 + t_1^2, \tag{1}$$

$$(A = (B + 2t_1) t_2 + t_2^2, \tag{2}$$

$$A = (B + 2t_1 + 2t_2) t_3 + t_3^2. \tag{3}$$

Z rovnic (1) a (2) dostáváme

$$B = \frac{t_2^2 + 2t_1 t_2 - t_1^2}{t_1 - t_2}, \quad A = \frac{t_1 t_2 \,(t_1 + t_2)}{t_1 - t_2}. \tag{4}$$

Úpravou rovnice (3) : $t_3^2 + (B + 2t_1 + 2t_2)\, t_3 - A = 0$, po dosazení a úpravě

$$(t_1 - t_2)\, t_3^2 + \left(t_1^2 + 2t_1 t_2 - t_2^2\right) t_3 - t_1 t_2 \,(t_1 + t_2) = 0$$

$$t_3 = \frac{-\left(t_1^2 + 2t_1 t_2 - t_2^2\right) + \sqrt{\left(t_1^2 + 2t_1 t_2 - t_2^2\right)^2 + 4\frac{t_1 t_2 (t_1 + t_2)}{t_1 - t_2}}}{2\,(t_1 - t_2)} = 0{,}77 \text{ s}.$$

Z rovnic (4) určíme číselné hodnoty konstant B a A: $\{B\} = 1$ a $\{A\} = 6$ a dosadíme do rovnice (3) i za t_1 a t_2, dostaneme jednodušší tvar kvadratické rovnice:

$$t_3^2 + 7t_3 - 6 = 0,$$

$$t_3 = \frac{-7 + \sqrt{7^2 + 24}}{2} = 0{,}77 \text{ s}.$$

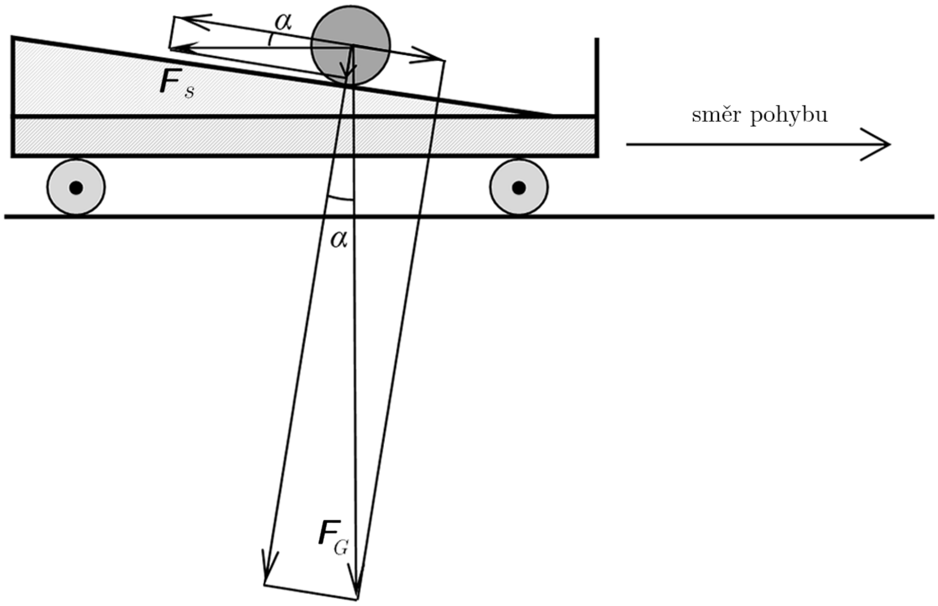
6 bodů

b) Známe-li číselné hodnoty konstant A a B, můžeme určit číselné hodnoty zrychlení a počáteční rychlosti: $a = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ a $v_0 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Dobu jízdy od první k páté značce určíme ze vztahu pro dráhu: $4s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

Po číselném dosazení dostáváme kvadratickou rovnici: $t^2 + t - 24 = 0$, jejímž řešením je $t = \frac{-1 + \sqrt{97}}{2} = 4{,}4$ s.

Rychlost u páté značky pak bude $v = v_0 + at = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. **4 body**



Obr. 1

2. a) Označme m hmotnost válce. V soustavě spojené s vagónem musí být výslednice tíhové síly a setrvačné síly $\boldsymbol{F}_s = -m\boldsymbol{a}_m$ kolmá k nakloněné rovině, z podmínky plyne

$$F_s = mg\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Velikost zrychlení vagónu pak je

$$a_m = \frac{F_s}{m} = g\,\mathrm{tg}\alpha = 0{,}86\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

1 bod

b) Pohybová síla působící ve směru pohybu plného homogenního válce o poloměru r a hmotnosti m, valícího se bez prokluzování po vodorovné rovině se zrychlením o velikosti a_1, má velikost

$$F = ma_1 + \frac{J\varepsilon}{r},$$

kde $J = \frac{1}{2}mr^2$ a $\varepsilon = \frac{a_1}{r}$. Po dosazení dostaneme

$$F = \frac{3}{2}ma_1.$$

Pak během zrychlování vagónu se válec pohybuje vzhledem k vagónu se zrychlením o velikosti

$$a_1 = \frac{2F}{3m},$$

kde

$$F = F_s\cos\alpha - mg\sin\alpha,$$

$$F_s = 1{,}6ma_m = 1{,}6mg\,\mathrm{tg}\alpha.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$a_1 = \frac{2F}{3m} = \frac{2\,(F_s \cos\alpha - mg \sin\alpha)}{3m} =$$

$$= \frac{2\,(1{,}6mg\,\mathrm{tg}\alpha \cos\alpha - mg \sin\alpha)}{3m} = 0{,}40 g \sin\alpha.$$

Odpovídající doba pohybu je

$$t_1 = \frac{v}{1{,}6 a_m} = \frac{v}{1{,}6 g\,\mathrm{tg}\alpha} = \frac{5v}{8g\,\mathrm{tg}\alpha}.$$

2 body

Během následného rovnoměrného pohybu vagónu setrvačná síla již nepůsobí a válec se pohybuje rovnoměrně zpomaleným pohybem po dobu t_2 se zrychlením o velikosti

$$a_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{mg \sin\alpha}{m} = \frac{2}{3} g \sin\alpha.$$

Pro maximální velikost v' rychlosti válce vzhledem k vagónu platí

$$v' = a_1 t_1 = a_2 t_2,$$

z čehož doba rovnoměrně zpomaleného pohybu je

$$t_2 = \frac{a_1}{a_2} t_1 = \frac{3}{5} t_1 = \frac{3v}{8g\,\mathrm{tg}\alpha}.$$

2 body

Minimální délka nakloněné roviny pak je dána součtem obou drah válce

$$l = s_1 + s_2 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = \frac{v^2 \cos^2\alpha}{8g \sin\alpha} = 18 \text{ m}.$$

2 body

c) Doba pohybu po nakloněné rovině dolů je

$$t_3 = \sqrt{\frac{2l}{a_2}} = \sqrt{\frac{3}{8}} \frac{v}{g\,\mathrm{tg}\alpha}.$$

Příslušná dráha vlaku pak je

$$s = \frac{1}{2} \cdot 1{,}6 a_m {t_1}^2 + v\,(t_2 + t_3) = \left(\frac{11}{16} + \sqrt{\frac{3}{8}} \right) \cdot \frac{v^2}{g\,\mathrm{tg}\alpha} = 180 \text{ m}.$$

2 body

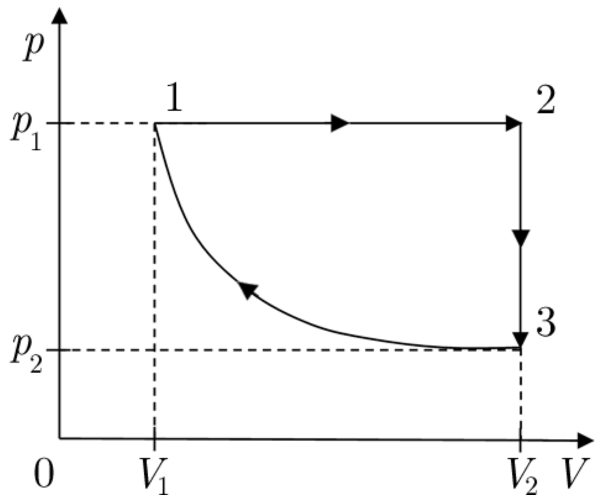
3.a) Viz obrázek 2. Děj 3-1 je adiabatická komprese. Z Poissonova zákona

$$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_2 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa.$$

Číselně: $p_1 = 1{,}61$ MPa. **2 body**

b) Děj 1 – 2 je izobarické rozpínání. Plyn vykoná práci

$$W'_{12} = p_1\,(V_2 - V_1) = p_2 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa (V_2 - V_1)\,.$$



Obr. 2

Číselně: $W'_{12} = 22{,}6$ kJ. Přitom musíme dodat teplo

$$Q_{12} = \frac{5}{2}nR\,(T_2 - T_1) = \frac{5}{2}p_1\,(V_2 - V_1) = \frac{5}{2}p_2\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa}(V_2 - V_1)\,.$$

Číselně: $Q_{12} = 56{,}4$ kJ. **3 body**

Děj 2 – 3 je izochorické ochlazení. Práce se nekoná, plyn odevzdá teplo

$$Q'_{23} = \frac{3}{2}nR\,(T_2 - T_3) = \frac{3}{2}\,(p_1 - p_2)\,V_2 = \frac{3}{2}p_2V_2\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa} - 1\right].$$

Číselně: $Q'_{23} = 37{,}5$ kJ.

Děj 3 – 1 je adiabatická komprese. Plyn přijímá práci

$$W_{31} = \frac{3}{2}nR\,(T_1 - T_3) = \frac{3}{2}\,(p_1V_1 - p_2V_2) = \frac{3}{2}p_2\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa}V_1 - V_2\right].$$

Číselně: $W_{31} = 3{,}6$ kJ. Celková práce vykonaná plynem během kruhového děje

$$W' = W'_{12} - W_{31} = p_2V_2\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa} - \frac{5}{2}p_2V_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa} + \frac{3}{2}p_2V_2 = 19 \text{ kJ}.$$

3 body

c) Účinnost cyklu $\eta = \dfrac{W'_{12} - W_{31}}{Q_{12}} = \dfrac{Q_{12} - Q'_{23}}{Q_{12}} = 0{,}34 = 34\ \%$. **2 body**

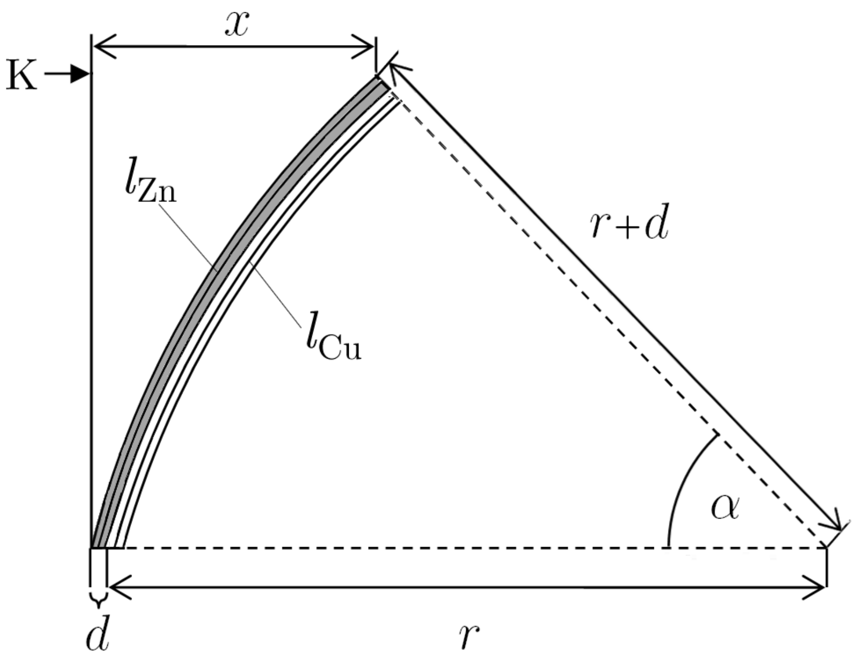
Poznámka: Výpočet práce plynem přijaté při adiabatické kompresi není pro výpočet účinnosti kruhového děje nezbytný.

4.a) Rozdíl délek mezi částmi pásku bude $\Delta l = l_{\mathrm{Zn}} - l_{\mathrm{Cu}} = l_0\,(\alpha_{\mathrm{Zn}} - \alpha_{\mathrm{Cu}})\,t = 9{,}36 \cdot 10^{-2}$ mm. **2 body**

b) Vyjdeme z obrázku 3

$$l_{\mathrm{Zn}} = \left(r + \frac{d}{2}\right)\cdot \operatorname{arc}\alpha = \left(r + \frac{d}{2}\right)\frac{\alpha\cdot\pi}{180}$$

$$l_{\mathrm{Cu}} = \left(r - \frac{d}{2}\right)\operatorname{arc}\alpha = \left(r - \frac{d}{2}\right)\frac{\alpha\cdot\pi}{180}$$



Obr. 3

$$\frac{l_{\mathrm{Zn}}}{l_{\mathrm{Cu}}} = \frac{1+\alpha_{\mathrm{Zn}}t}{1+\alpha_{\mathrm{Cu}}t} = \frac{r+\dfrac{d}{2}}{r-\dfrac{d}{2}}$$

$$\frac{1{,}0018}{1{,}00102} = \frac{r+0,05cm}{r-0{,}05cm} \quad \Rightarrow \quad r = 128{,}4\ \mathrm{cm}$$

4 body

Pro úhel α pak platí $\alpha = \dfrac{l_{\mathrm{Zn}}\cdot 180}{\pi\left(r+\dfrac{d}{2}\right)} = \dfrac{l_0\left(1+\alpha_{\mathrm{Zn}}t\right)\cdot 180}{\pi\left(r+\dfrac{d}{2}\right)} = 5{,}4^\circ.$

2 body

c) Protože $\cos\alpha = \dfrac{r+d-x}{r+d}$, můžeme vyjádřit $x = r{+}d{-}(r+d)\cos\alpha = 5{,}6$ mm.

2 body

5.a) Označme hmotnost vody v kalorimetru m_1, hmotnost jedné součástky m a její objem V. Napíšeme si kalorimetrické rovnice pro oba případy:

$$mc\,(t-t_2) = (m_1 - V\rho_v)c_v\,(t_2-t_1) = (m_1 - \frac{m}{\rho}\rho_v)c_v\,(t_2-t_1)\,,$$

$$2mc\,(t-t_3) = (m_1 - 2V\rho_v)c_v\,(t_3-t_1) = (m_1 - 2\frac{m}{\rho}\rho_v)c_v\,(t_3-t_1)\,.$$

Rovnice upravíme na tvar

$$\frac{\mathrm{mc}}{c_v}\frac{(t-t_2)}{(t_2-t_1)} = m_1 - \frac{m}{\rho}\rho_v, \tag{1}$$

$$\frac{2mc}{c_v}\frac{(t-t_3)}{(t_3-t_1)} = m_1 - 2\frac{m}{\rho}\rho_v. \tag{2}$$

Odečtením rovnic dostaneme $\frac{mc}{c_v}\left[\frac{(t-t_2)}{(t_2-t_1)}-2\frac{(t-t_3)}{(t_3-t_1)}\right]=m\frac{\rho_v}{\rho}$, odtud

$$c=c_v\frac{\rho_v}{\rho}\frac{1}{\left[\frac{(t-t_2)}{(t_2-t_1)}-2\frac{(t-t_3)}{(t_3-t_1)}\right]}=920\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}K^{-1}}.$$

4 body

b) Úpravou rovnice (1) dostaneme

$$\frac{m_1}{m}=\frac{c}{c_v}\frac{(t-t_2)}{(t_2-t_1)}+\frac{\rho_v}{\rho}=\frac{\rho_v}{\rho}\left[\frac{\frac{(t-t_2)}{(t_2-t_1)}}{\frac{(t-t_2)}{(t_2-t_1)}-2\frac{(t-t_3)}{(t_3-t_1)}}+1\right]=$$

$$=\frac{\rho_v}{\rho}\left[\frac{(t-t_2)\,(t_3-t_1)}{(t-t_2)\,(t_3-t_1)-2\,(t-t_3)\,(t_2-t_1)}+1\right]=$$

$$0,37\left[\frac{66{,}8\cdot 29{,}8}{66{,}8\cdot 29{,}8-2\cdot 50{,}2\cdot 13{,}2}+1\right]=1{,}47.$$

3 body

c) Přidáme-li do plného kalorimetru tři součástky, můžeme kalorimetrickou rovnici napsat ve tvaru

$$3mc\,(t-t_4)=(m_1-3\frac{m}{\rho}\rho_v)c_v\,(t_4-t_1)\,,$$

$$\frac{3mc}{c_v}\frac{(t-t_4)}{(t_4-t_1)}=m_1-3\frac{m}{\rho}\rho_v. \tag{3}$$

Z rovnic (1) a (3) pak odečtením $\frac{c}{c_v}\left[\frac{(t-t_2)}{(t_2-t_1)}-3\frac{(t-t_4)}{(t_4-t_1)}\right]=2\frac{\rho_v}{\rho}$.

Po úpravě a číselném dosazení $\frac{(t-t_4)}{(t_4-t_1)}=\frac{(t-t_2)}{3\,(t_2-t_1)}-\frac{2}{3}\frac{\rho_v}{\rho}\frac{c_v}{c}$,

$$\frac{99-\{t_4\}}{\{t_4\}-19}=0{,}547\quad\Rightarrow\quad t_4=70{,}7\ ^\circ\mathrm{C}.$$

3 body

6. *Řešení teoretických úloh:* Pro periodu kyvadla platí vztah $T=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}}$, kde J je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k jeho ose, m hmotnost kyvadla a d vzdálenost těžiště od osy.

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose rovnoběžné s osou jdoucí těžištěm vypočteme podle *Steinerovy věty:* $J=J_\mathrm{T}+mr^2$, kde J_T je moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm, m je hmotnost tělesa a r je vzdálenost rovnoběžných os.

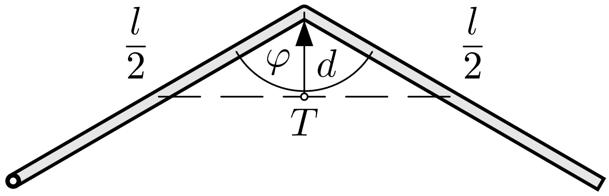
a) U rovné tyče je $d = \frac{l}{2}$, $J = \frac{ml^2}{3}$.

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{3}}{\frac{mgl}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}\,, \qquad l = \frac{3gT_1^2}{8\pi^2} = 0{,}372\ \mathrm{m}\,.$$

b) Z obr. 4 plyne: $d = \frac{l\cos\varphi}{4}$, $J = \frac{ml^2}{12}$.

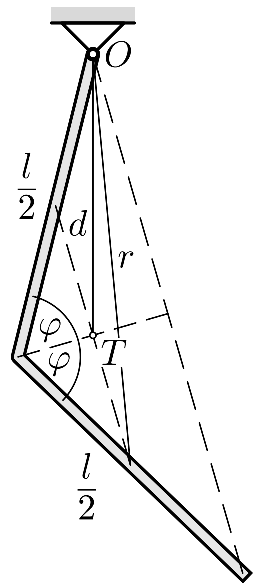
$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{12}}{\frac{mgl\cos\varphi}{4}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{3g\cos\varphi}} = T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}\,.$$

Z toho $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = 60°$. Obě poloviny tyče svírají úhel $2\varphi = 120°$.



Obr. 4

c) Z obr. 5 plyne:



Obr. 5

$$d^2 = \left(\frac{l}{2}\sin\varphi\right)^2 + \left(\frac{l}{4}\cos\varphi\right)^2 = \frac{13l^2}{64}\,, \qquad d = \frac{l}{8}\sqrt{13}\,.$$

Podle kosinové věty

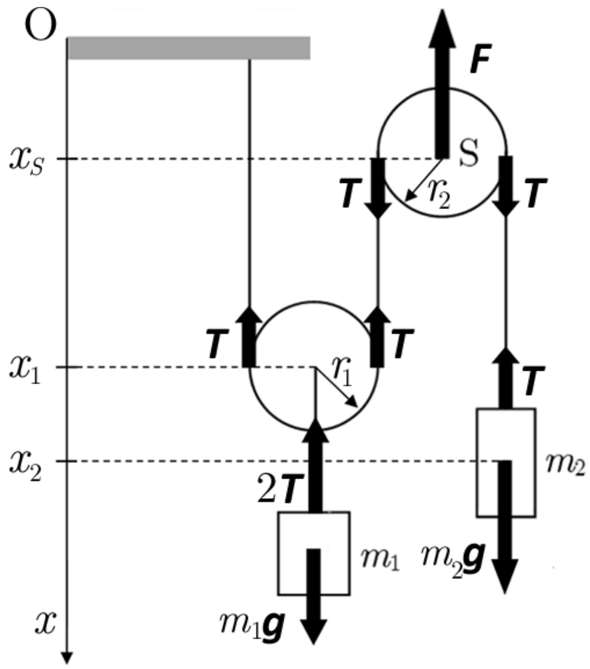
$$r^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{4}\right)^2 - 2\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{4}\cos 2\varphi = \frac{7}{16}l^2\,.$$

$$J = \frac{1}{3}\cdot\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}\cdot\frac{m}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{m}{2}\cdot\frac{7}{16}l^2 = \frac{13}{48}ml^2\,.$$

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2\frac{13}{48}}{mgl\frac{\sqrt{13}}{8}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\sqrt{13}}{6g}}\,.$$

Po dosazení $l = \frac{3gT_1^2}{8\pi^2}$ dostaneme $T_3 = \frac{T_1}{2}\sqrt[4]{13} = 0{,}9494T_1\,.$

7.a) Označme T velikost síly, která napíná nit, na které visí závaží hmotnosti m_2. Z obrázku vidíme, že $T = \frac{F}{2}$. Velikost síly napínající nit, na které visí závaží hmotnosti m_1 je $2T = F$. **2 body**



Obr. 6

b) Z pohybových rovnic $m_1a_1 = m_1g - 2T$, $m_2a_2 = m_2g - T$ a vzhledem k tomu, že $2T = F$ dostaneme $a_1 = \dfrac{m_1g - F}{m_1} = g - \dfrac{F}{m_1}$, $a_2 = \dfrac{m_2g - T}{m_2} = g - \dfrac{F}{2m_2}$.

2 body

c) Označme x_S, x_1 a x_2 souřadnice osy horní kladky, osy spodní kladky a těžiště tělesa m_2 (obr. 6). Pro délku niti můžeme napsat:

$$l = x_1 + \pi r_1 + (x_1 - x_S) + \pi r_2 + (x_2 - x_S)\,.$$

Po krátké době Δt budou souřadnice x'_S, x'_1 a x'_2 a pro délku niti platí:

$$l = x'_1 + \pi r_1 + (x'_1 - x'_S) + \pi r_2 + (x'_2 - x'_S)\,.$$

Odečtením rovnic

$$x'_1 - x_1 + (x'_1 - x'_S) - (x_1 - x_S) + (x'_2 - x'_S) - (x_2 - x_S) = 0,$$

upravíme na

$$2\,(x'_1 - x_1) + (x'_2 - x_2) = 2\,(x'_S - x_S)$$

a po vydělení malým časovým intervalem Δt dostaneme $2v_1 + v_2 = 2v_S$, kde v_1 a v_2 jsou velikosti rychlosti závaží a v_S velikost rychlosti horní kladky.
Co platí pro rychlosti, bude platit i pro zrychlení:

$$2a_1 + a_2 = 2a_S,$$

takže velikost zrychlení kladky

$$a_S = a_1 + \frac{a_2}{2} = g - \frac{F}{m_1} + \frac{g}{2} - \frac{F}{4m_2} = \frac{3}{2}g - \frac{m_1 + 4m_2}{4m_1m_2}F. \quad \textbf{6 bodů}$$

Poznámka: Zrychlení horní kladky může být větší, než zrychlení tíhové. To je dáno tím, že kladka má zanedbatelnou hmotnost a na kladku působí síly F a 2T, které jsou v rovnováze, takže zrychlení kladky může být větší i menší než zrychlení tíhové.