Experimentální úloha celostátního kola 66. ročníku FO

Jihlava 2025

Řešení

a) Pro úhlovou frekvenci kmitů fyzického kyvadla platí

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgx}{J}}. \tag{1}$$

S využitím Steinerovy věty $J = J_\mathrm{T} + mx^2$, kde $J_\mathrm{T} = \frac{1}{12}ml^2$, a dosazením do vztahu (1) lze pro hledanou periodu odvodit

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^2}{12gx} + \frac{x}{g}}, \tag{2}$$

(2 body)

b, c) Jelikož je tyč rovnoměrně rozdělená otvory na $n = 22$ úseků, pro vzdálenost k-tého otvoru od těžiště tyče platí

$$x = \frac{L}{n}k, . \tag{3}$$

Dosazením (3) do vztahu (2), kde $l = L$, lze pro hledanou délku L získat

$$L = \frac{3gknT^2}{(12k^2 + n^2)\pi^2}. \tag{4}$$

Příklad naměřených hodnot period a příslušných délek tyče je v následující tabulce.

k	$10\,T_k$ [s]	T_k [s]	L_k [m]
2	17,69	1,769	0,7718
3	15,09	1,509	0,7570
4	13,84	1,384	0,7435
5	13,47	1,347	0,7591
6	13,50	1,350	0,7831
7	13,37	1,337	0,7657
8	13,57	1,357	0,7719
9	13,78	1,378	0,7700
10	14,00	1,400	0,7635

(4 body)

Statistickou analýzou dostáváme pro výslednou délku

$$L = \bar{L} \ \pm \ t_{0{,}95;9} \, \sigma_{\bar{L}} \approx (0{,}765 \ \pm \ 0{,}009) \text{ m},$$

relativní odchylka je

$$\delta_L = \frac{t_{0{,}95;9} \, \sigma_{\bar{L}}}{\bar{L}} \approx 1{,}1 \ \%.$$

Pro výpočet směrodatné odchylky aritmetického průměru pro N naměřených hodnot platí vztah (5)

$$\sigma_{\bar{L}} = \sqrt{\frac{\sum(\bar{L} - L_k)^2}{N(N-1)}}. \tag{5}$$

(2 body)

d) Dosahuje-li funkce $T(x)$ dle rovnice (2) v bodě $x = x_{\text{min}}$ minima, bude minimální i výraz pod odmocninou. Zderivujeme tedy výraz pod odmocninou podle x a najdeme kořen zderivované funkce

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{l^2}{12gx} + \frac{x}{g}\right) = \frac{1}{g} - \frac{l^2}{12gx^2} = 0. \tag{6}$$

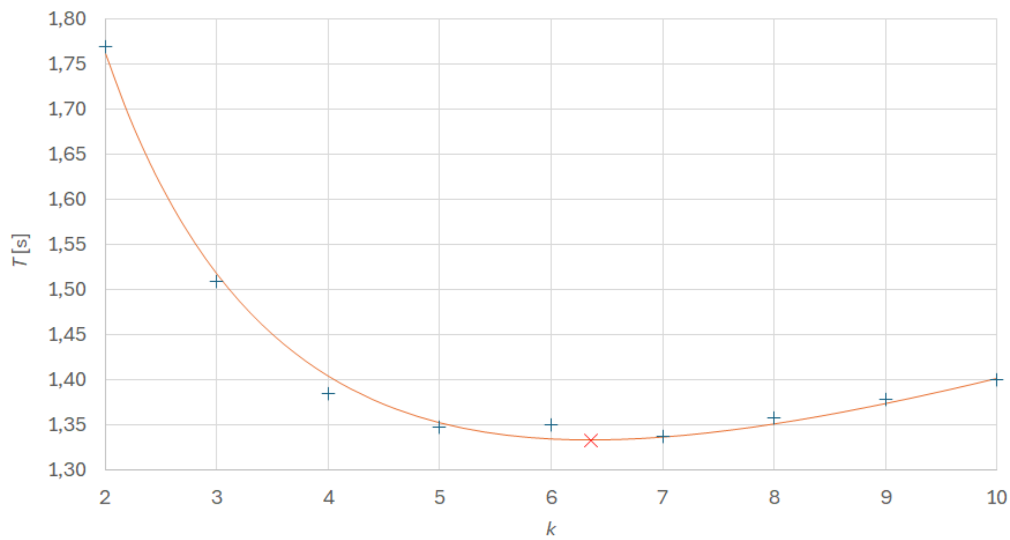
Úpravou rovnice (6) a s využitím (3) dostáváme

$$x_{\text{min}} = \frac{l}{2\sqrt{3}}; \quad k_{\text{min}} = \frac{n}{2\sqrt{3}} \approx 6{,}35. \tag{7}$$

Pokud dosadíme za $l = \bar{L}$, vychází pro $x_{\text{min}} \approx 0{,}221$ m. Hodnota minimální periody je po dosazení do (2) rovna $T_{\text{min}} \approx 1{,}33$ s.

(2 body)

e) Graf závislosti $T(k)$ s vyznačením minimální periody je na následujícím obrázku



(2 body)

f) Příklad naměřených hodnot deseti period je v následující tabulce.

i	$10\,T_i$ [s]	T_i [s]
1	14,06	1,406
2	13,84	1,384
3	13,97	1,397
4	13,89	1,389
5	14,11	1,411

Statistickým zpracováním dostáváme pro výslednou periodu

$$T = \bar{T} \ \pm\ t_{0,95;5}\,\sigma_{\bar{T}} \approx (1{,}40\ \pm\ 0{,}01)\ \mathrm{s},$$

relativní odchylka je

$$\delta_T = \frac{t_{0,95;5}\,\sigma_{\bar{T}}}{\bar{T}} \approx 1{,}0\ \%.$$

(4 body)

g) Pro moment setrvačnosti tyče s deseti šrouby s maticemi vzhledem k ose procházející středem zřejmě platí

$$J = \frac{1}{12}ML^2 + \sum_{i=1}^{10} m\left(\frac{L}{n}i\right)^2 = \frac{1}{12}L^2\left(M + \frac{4620\,m}{n^2}\right) \tag{8}$$

a vzdálenost těžiště od středu tyče je

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{10\,m\ (L/4)}{M + 10\,m} = \frac{5Lm}{2(M + 10\,m)}. \tag{9}$$

Dosazením vztahů (8) a (9) do rovnice (1) a vyjádřením hledané hmotnosti tyče M dostáváme

$$M = \frac{15}{2}m\left(\frac{gT^2}{\pi^2 L} - \frac{616}{n^2}\right). \tag{10}$$

Dosazením za $n = 22$, $T = \bar{T}$ a $L = \bar{L}$ vychází

$$M \approx 0{,}178\ \mathrm{kg}.$$

(2 body)

Chybu nepřímého měření hmotnosti M určíme dle vztahu (11)

$$\Delta M = \sqrt{\left(\frac{\partial M(L,T)}{\partial L}\,\Delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial M(L,T)}{\partial T}\,\Delta T\right)^2}, \tag{11}$$

kde jednotlivé parciální derivace rovnice (10) jsou

$$\frac{\partial M}{\partial L} = -\frac{15gmT^2}{2\pi^2 L^2}, \quad \frac{\partial M}{\partial T} = \frac{15gmT}{\pi^2 L}. \tag{12}$$

Dosazením parciálních derivací do (11) po úpravě dostáváme

$$\Delta M = \frac{15gmT}{2\pi^2 L^2}\sqrt{(T\,\Delta L)^2 + (2L\,\Delta T)^2} \approx 0{,}008\,\mathrm{kg}, \tag{13}$$

což odpovídá relativní odchylce $\Delta M/M \approx 4{,}6\,\%$.

(2 body)