Ústřední komise fyzikální olympiády České republiky

Úlohy celostátního kola 66. ročníku FO kategorie A

1. Mise na Mars

Jednou z možností, jak by mohly probíhat budoucí pilotované mise na Mars, je ta, kdy kosmická loď poletí z oběžné dráhy Země na oběžnou dráhu Marsu po eliptické přechodové trajektorii, která se obou planet dotýká tečnou. Perihélium této trajektorie je na oběžné dráze Země a afélium na oběžné dráze Marsu. Navzdory některým nevýhodám se tato trajektorie při meziplanetárních letech běžně používá, protože je relativně úsporná. V této úloze budete zkoumat některé vlastnosti této trajektorie.

a) Určete oběžnou dobu Marsu T_M, tedy délku marsovského roku.

b) Určete dobu t jednosměrného letu na Mars po takové trajektorii.

c) Kosmická loď je na tuto trajektorii navedena krátkým, ale silným zážehem motoru v blízkosti Země (protože je účinnější spálit palivo rychlým impulzem, dokud je loď ještě u Země). Jak velká změna rychlosti Δv_1 je potřebná k tomu, aby loď v blízkosti Země přešla na přechodovou dráhu? Odpor atmosféry zanedbejte a předpokládejte, že se kosmická loď v blízkosti Země pohybuje spolu s ní – tedy má vzhledem ke Slunci stejnou rychlost jako Země.

d) Odhadněte změnu rychlosti Δv_2 potřebnou ke vstupu na téměř kruhovou oběžnou dráhu v blízkosti Marsu.

Průměrná vzdálenost Marsu od Slunce je $r_M = 1{,}52$ au, průměrná vzdálenost Země je $r_Z = 1{,}00 \text{ au} = 1{,}50 \cdot 10^8$ km. Hmotnost Slunce je $M_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg.

2. Magnetický nárazník

Pružný mechanický nárazník, např. u železničních vozů, obsahuje pružinu, která se při nárazu stlačí, a tím pohltí (absorbuje) kinetickou energii vozu. Po nárazu vozu na nepohyblivou překážku je zpomalení vozu při použití pružného nárazníku podstatně menší, než by bylo při tvrdém (nepružném) nárazu, a tak můžeme předejít mechanickému poškození vozu. Podobně by mohl fungovat i magnetický nárazník.

Uvažujme následující model nárazníku: Po vodorovných elektricky vodivých kolejnicích, jejichž vzájemná vzdálenost je l, se pohybuje vozík, který představuje dokonalý elektrický zkrat. Pro zjednodušení modelu místo reálného vozu uvažujeme vodivou tyč o hmotnosti m na kolečkách, která se po kolejnicích valí s velmi malým třením. Na konci kolejnic je navinuta cívka s indukčností L. Koncová část trati je v homogenním magnetickém poli s indukcí o velikosti B, jejíž vektor směřuje svisle vzhůru. Vozík se pohybuje kolmo na toto magnetické pole, a jakmile do něj vnikne, začne se na základě působení proudu v cívce a magnetického pole zpomalovat.

a) Nakreslete ilustrační obrázek a vyznačte na něm potřebné veličiny. Stručně popište fyzikální podstatu děje, který nastane po vjezdu vozíku do magnetického pole. Vysvětlete, proč vozík začne prakticky okamžitě po vjezdu do magnetického pole zpomalovat.

b) Vozík, kolejnice a cívka představují uzavřený elektrický obvod s velmi malým odporem. Odvoďte výraz pro proud i v tomto obvodu jako funkci času a přímým dosazením ověřte, že obecné řešení má skutečně tvar

$$i(t) = I_0 + I_m \sin\big(\omega t + \alpha\big).$$

Určete rovněž jednotlivé parametry tohoto řešení: I_0, I_m, ω, α.

c) Určete závislost rychlosti vozíku $v(t)$ na čase a určete čas τ, který uplyne od okamžiku vjezdu vozíku do magnetického pole do jeho zastavení.

d) Určete velikost tuhosti magnetické pružiny $k = \dfrac{F}{x}$.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m = 50$ g, $l = 20$ cm, $L = 1{,}5$ H, $B =$ $= 1{,}0$ T, $v_0 = 60\ \mathrm{cm \cdot s^{-1}}$.

Pomůcka: Derivace funkce $f(t) = a + b\sin\big(ct + d\big)$ podle času je

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} = bc\cos(ct + d),$$

derivace funkci $g(t) = a + b\cos(ct + d)$ podle času je

$$\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t} = -bc\sin(ct + d),$$

a dále

$$\int_0^t \cos c\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{c}\sin c\,t.$$

3. Bungee jumping

Při tomto adrenalinovém sportu skáče člověk o hmotnosti $m = 70$ kg z plošiny, která je ve výšce $h = 90$ m nad jezerem. Gumové lano o délce L a tuhosti k je připevněno k nohám skokana, druhý konec lana je pevně fixován k plošině. V blízkosti hladiny vody musí mít skokan nulovou rychlost a zrychlení $a_0 = 2g$. Předpokládejme, že se deformace lana řídí Hookeovým zákonem. Zanedbejte rozměry skokana, hmotnost lana, odpor vzduchu a přeměny energie v laně na jiné formy než potenciální energii pružnosti.

Za těchto podmínek určete:

a) délku L nenataženého lana a jeho tuhost k,

b) délku lana v rovnovážné poloze,

c) maximální rychlost osoby v_{max},

d) čas t, za který osoba dosáhne hladiny vody.

Pozor! Přesnost vašich výpočtů může být klíčová pro bezpečnost skokana!

4. Standardní atmosféra

Protože izotermická ani adiabatická atmosféra nejsou ideálním modelem, v praxi se často používá tzv. standardní model atmosféry (International Standard Atmosphere, ISA). Model ISA nepočítá s kolísáním v poloze a čase a každé výšce přiřazuje jednu hodnotu hustoty, tlaku a teploty. To nám umožňuje například jednotně ocejchovat tlakoměrné přístroje (výškoměr, letecký rychloměr, variometr). Přitom se předpokládá stálé složení atmosféry a platnost zákonů pro ideální plyny. Při popisu atmosféry budeme používat s uvedenou přesností platné fyzikální konstanty, jejichž hodnoty jsou:

Molární hmotnost vzduchu $M_m = 28{,}96 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$.

Molární plynová konstanta $R = 8{,}314\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}}$.

Tíhové zrychlení $g = 9{,}807\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Atmosférický tlak u hladiny moře $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa.

Teplota vzduchu u hladiny moře $t_0 = 15{,}00\,°\mathrm{C}$.

Teplota absolutní nuly $t_{an} = -273{,}15\,°\mathrm{C}$.

Až do výšky $z = 11{,}0$ km teplota vzduchu lineárně klesá o $\dfrac{\Delta t}{\Delta z} = 6{,}500\ \dfrac{°\mathrm{C}}{\mathrm{km}}$, tedy o $6{,}500\,°\mathrm{C}$ na každý kilometr výšky.

a) Vypočítejte hustotu vzduchu na úrovni mořské hladiny ρ_0.

b) Zapište vztah pro závislost termodynamické teploty T na výšce z ve tvaru

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)$$

a určete číselné hodnoty parametrů T_0 a h.

c) Odvoďte vztah pro změny atmosférického tlaku s výškou $\dfrac{\Delta p}{\Delta z}$ pro malé změny Δz.

d) Vztahy pro atmosférický tlak a hustotu mají v modelu ISA tvar $p(z) = p_0 \left(1 - \dfrac{z}{h}\right)^{\alpha}$ a $\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{z}{h}\right)^{\beta}$. Určete číselné hodnoty konstant α a β.