

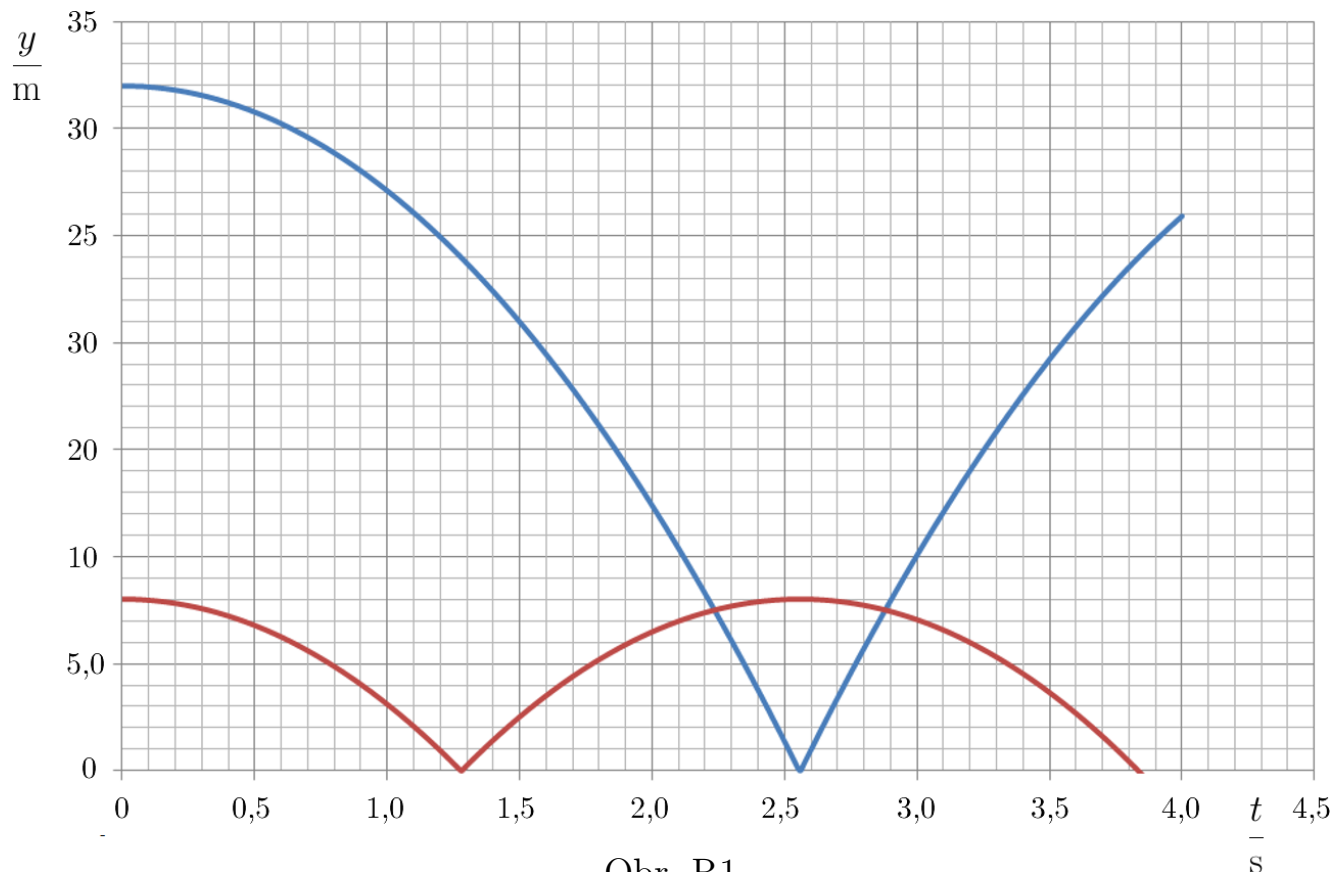
Řešení úloh 2. kola 66. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie B

Úlohy navrhli J. Thomas (1, 3, 4) a J. Jírů (2)

1. Míčky padají z výšek h a $4h$, doby pádu jsou

$$T_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{8h}{g}} = 2T_1.$$

Graf znázorňuje závislost výšky na čase pro samostatný pohyb každého míčku:



Obr. R1

Při každé srážce si míčky vymění rychlosti a naváží na trajektorii druhého míčku.

Ke srážkám dojde v časech $\tau_{1,2} = T_2 \pm \Delta t$, kde Δt dostaneme z rovnice

$$h - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = 4h - \frac{1}{2}g(T_2 - \Delta t)^2 \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{1}{4}T_1 = \frac{1}{8}T_2.$$

Tedy ke srážkám dojde v časech

$$\tau_1 = T_2 - \Delta t = T_2 - \frac{1}{8}T_2 = \frac{7}{8}T_2 = \frac{7}{4}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2,23 \text{ s},$$

$$\tau_2 = T_2 + \Delta t = T_2 + \frac{1}{8}T_2 = \frac{9}{8}T_2 = \frac{9}{4}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 2,87 \text{ s}.$$

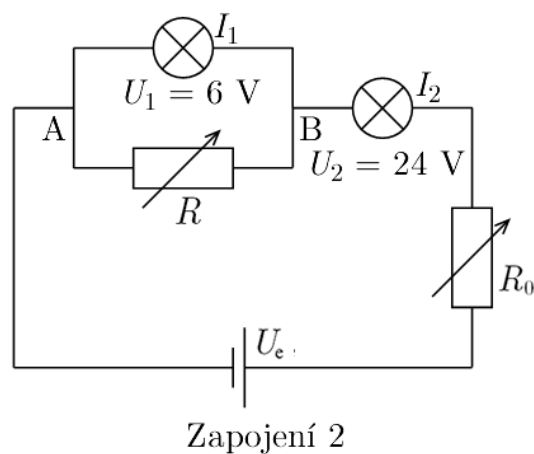
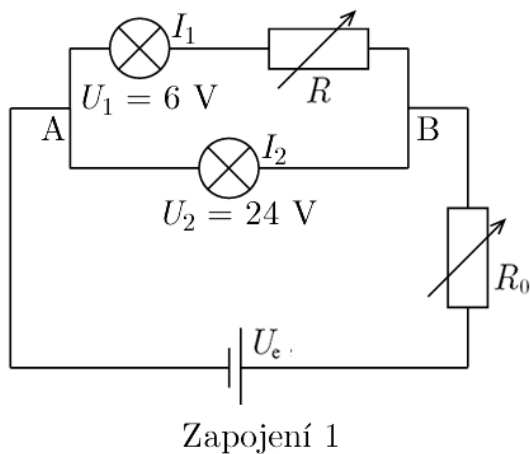
5 bodů

Srážka nastane v obou případech ve výšce

$$y_1 = y_2 = 4h - \frac{1}{2}g\tau_1^2 = 4h - \frac{1}{2}g\frac{49}{16}\frac{2h}{g} = 4h - \frac{49}{16}h = \frac{15}{16}h = 7,5 \text{ m}.$$

Horní míček po první srážce vystoupá do výšky h , po druhé srážce do výšky $4h$.

5 bodů



Obr. R2

2. Zapojení 1:

- a) Napětí U_{AB} mezi uzly A, B se v horní větvi dělí mezi žárovku a reostat, v dolní větvi připadne celé na žárovku, proto žárovku $\check{Z}_1$ umístíme do horní a žárovku $\check{Z}_2$ do dolní větve. Na reostatu o odporu R musí být při proudu I_1 úbytek napětí $U_2 - U_1$, tedy

$$R = \frac{U_2 - U_1}{I_1} = \frac{24 - 6}{0,25} \Omega = 72 \Omega.$$

Odpor zbývajcího reostatu je

$$R_0 = \frac{U_e - U_2}{I_1 + I_2} = \frac{U_e - U_2}{I_1 + \frac{P_2}{U_2}} = \frac{(U_e - U_2)U_2}{U_2I_1 + P_2} = \frac{(40 - 24) \cdot 24}{24 \cdot 0,25 + 15} \Omega = 18 \Omega.$$

3 body

- b) Účinnost:

$$\eta = \frac{P_1 + P_2}{U_e(I_1 + I_2)} = \frac{U_1I_1 + P_2}{U_e \left(I_1 + \frac{P_2}{U_2} \right)} = \frac{(U_1I_1 + P_2)U_2}{(U_2I_1 + P_2)U_e} = \frac{(6 \cdot 0,25 + 15) \cdot 24}{(24 \cdot 0,25 + 15) \cdot 40} = 0,47.$$

2 body

Zapojení 2:

- a) Provozní proud žárovky $\check{Z}_1$ je podle zadání $I_1 = 0,25$ A, provozní proud žárovky $\check{Z}_2$ je

$$I_2 = \frac{P_2}{U_2} = 0,625 \text{ A}.$$

Z důvodu $I_1 < I_2$ musí být žárovka $\check{Z}_1$ umístěna v samostatné větvi mezi body A, B a žárovka $\check{Z}_2$ v nevětvené části obvodu. Proto reostatem v dolní větvi musí protékat proud $I_2 - I_1$ a pro jeho odpor platí

$$R = \frac{U_1}{I_2 - I_1} = \frac{U_1}{\frac{P_2}{U_2} - I_1} = \frac{U_1U_2}{P_2 - U_2I_1} = \frac{6 \cdot 24}{15 - 24 \cdot 0,25} \Omega = 16 \Omega.$$

Odpor zbývajcího reostatu je

$$R_0 = \frac{U_e - U_1 - U_2}{I_2} = \frac{(U_e - U_1 - U_2)U_2}{P_2} = \frac{(40 - 6 - 24) \cdot 24}{15} \Omega = 16 \Omega.$$

3 body

b) Účinnost:

$$\eta = \frac{P_1 + P_2}{U_e I_2} = \frac{(U_1 I_1 + P_2) U_2}{U_e P_2} = \frac{(6 \cdot 0,25 + 15) \cdot 24}{40 \cdot 15} = 0,66.$$

2 body

3.a) Na tyč působí směrem vzhůru síly F_1 a F_2 . Protože prodloužení pružin je stejné, platí pro poměr velikostí těchto sil $\frac{F_2}{F_1} = \frac{k_2}{k_1} = 3$.

Podmínky rovnováhy jsou $F_1 + F_2 = mg + m_1 g$ (rovnováha sil) a

$$F_1 \frac{l}{2} + mg \left(\frac{l}{2} - d \right) = F_2 \frac{l}{2}$$

(rovnováha momentů vzhledem ke středu tyče). Protože $F_2 = 3F_1$ jsou po dosazení do podmínek rovnováhy

$$4F_1 = mg + m_1 g,$$

$$F_1 l = mg \left(\frac{l}{2} - d \right).$$

Po dosazení za F_1 dostaneme

$$\frac{mgl + m_1 gl}{4} = mg \frac{l}{2} - mgd \Rightarrow m = \frac{m_1 l}{l - 4d} = 4,0 \text{ kg}.$$

5 bodů

b) Pro periodu kmitů platí (pružiny jsou zavěšeny paralelně)

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m + m_1}{k_1 + k_2}}, \quad k_1 + k_2 = (m + m_1) \frac{4\pi^2}{T_1^2} = 5,9 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}.$$

Protože $k_2 = 3k_1$ bude $k_1 = 1,5 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ a $k_2 = 4,4 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

2 body

c) Další závaží musíme zavěsit v těžišti soustavy. Protože $\frac{m}{m_1} = 2$, bude to ve vzdálenosti $d_1 = 10 \text{ cm}$ od pravého konce tyče.

1 bod

Perioda kmitů nyní bude

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2m + m_1}{k_1 + k_2}} = 0,26 \text{ s}.$$

2 body

4.a) Protože při ději 1–2 je tlak plynu přímo úměrný jeho objemu, platí $\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}$. Dále ze stavové rovnice $p_1 V_1 = nRT_1$ a $p_2 V_2 = nRT_2$, a podle zadání $\frac{p_2}{p_1} = k$. Po úpravách dostaneme

$$\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{T_2}{T_1} = k^2 \Rightarrow T_2 = k^2 T_1 = 4T_1 = 1200 \text{ K}.$$

2 body

b) Užitím Boyle–Mariottova zákona:

$$p_2 V_2 = p_3 V_3, \tag{1}$$

$$p_1 V_1 = p_4 V_4. \tag{2}$$

Z přímé úměrnosti mezi tlakem a objemem

$$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}, \quad (3)$$

$$\frac{p_3}{V_3} = \frac{p_4}{V_4}. \quad (4)$$

Víme také, že $V_2 = V_4$.

Po úpravách z rovnic (1) a (2):

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{p_4 V_4}{p_2 V_2} \cdot \frac{V_1}{V_3} = \frac{p_4 V_3}{p_2 V_1}.$$

Po dosazení z rovnic (3) a (4):

$$\frac{p_1}{p_3} = \frac{p_4 V_3}{p_2 V_1} = \frac{\frac{p_3}{V_3} V_3}{\frac{p_1}{V_1} V_1} = \frac{p_3}{p_1} \Rightarrow p_1 = p_3. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- c) Při ději 1–2 plyn přijme teplo, které slouží ke zvýšení jeho vnitřní energie a na vykonání práce:

$$\begin{aligned} nC(T_2 - T_1) &= \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) \\ &= \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}nR(T_2 - T_1) = 2nR(T_2 - T_1) \Rightarrow C = 2R. \end{aligned}$$

2 body

- d) Při řešení využijeme vztahů $V_3 = 2V_2$, $T_2 = 4T_1$, $p_1 = p_3$ a $p_4 = \frac{p_1}{2}$.

Účinnost kruhového děje je

$$\eta = \frac{W'_{12} + W'_{23} - W_{34} - W_{41}}{Q_{12} + Q_{23}}.$$

Po dosazení

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\frac{1}{2}nR(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} - \frac{p_3 + p_4}{2}(V_3 - V_2) - nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}{nC(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}nR(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln 2 - \frac{3p_1}{4} \cdot 2V_1 - nRT_1 \ln 2}{2nR(T_2 - T_1) + nRT_2 \ln 2} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}nR \cdot 3T_1 + nR \cdot 4T_1 \ln 2 - \frac{3}{2}nRT_1 - nRT_1 \ln 2}{n2R \cdot 3T_1 + nR \cdot 4T_1 \ln 2} = \\ &= \frac{\frac{3}{2} + 4 \ln 2 - \frac{3}{2} - \ln 2}{6 + 4 \ln 2} = \frac{3 \ln 2}{6 + 4 \ln 2} = 0,24. \end{aligned}$$

4 body