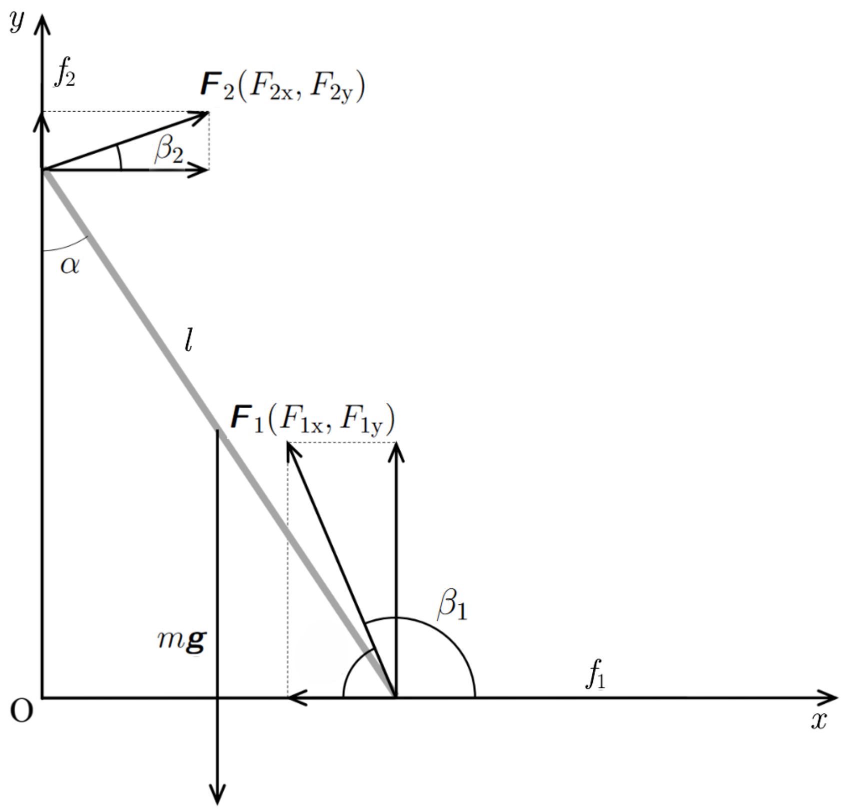
Řešení úloh 1. kola 67. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Úlohy navrhli J. Jírů (1, 2, 3), F. Studnička (4, 5, 7)

1.a)



Obr. 1

V rovnovážné poloze tyče je vektorový součet sil působících na tyč i vektorový součet momentů těchto sil nulový.

První podmínku pro působící síly $\boldsymbol{F_1} = (F_{1x}, F_{1y})$, $\boldsymbol{F_2} = (F_{2x}, F_{2y})$, $m\boldsymbol{g} = (0, -mg)$ rozepíšeme ve složkách:

$$F_{1x} + F_{2x} = 0,$$

$$F_{1y} + F_{2y} - mg = 0,$$

přičemž $F_{1y}, F_{2x}, F_{2y} > 0$, $F_{1x} < 0$.

V uvažované krajní rovnovážné poloze je velikost každé tečné složky rovna maximální možné velikosti třecí síly působící proti kluzu, pro složky platí:

$$F_{1x} = -f_1 F_{1y}, \ |F_{1x}| = f_1 F_{1y},$$

$$F_{2y} = f_2 F_{2x}.$$

Ze vztahů plyne

$$F_{1x} = -\frac{f_1}{1 + f_1 f_2} mg = -\frac{5}{21} mg,$$

$$F_{1y} = \frac{1}{1 + f_1 f_2} mg = \frac{20}{21} mg,$$

$$F_{2x} = -F_{1x} = \frac{f_1}{1+f_1f_2}mg = \frac{5}{21}mg,$$

$$F_{2y} = \frac{f_1f_2}{1+f_1f_2}mg = \frac{1}{21}mg.$$

4 body

Pro druhou podmínku (momentová věta) zvolíme osu otáčení kolmo k rovině Oxy, např. procházející dotykovým bodem tyče s osou x:

$$\frac{mgl}{2}\sin\alpha = F_{2x}l\cos\alpha + F_{2y}l\sin\alpha.$$

Ze vztahu plyne

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2F_{2x}}{mg-2F_{2y}} = \frac{\dfrac{2f_1}{1+f_1f_2}mg}{mg-\dfrac{2f_1f_2}{1+f_1f_2}mg} = \frac{2f_1}{1-f_1f_2} = \frac{10}{19} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha = 28\,^\circ.$$

2 body

b) Podlaha působí na tyč silou o velikosti

$$F_1 = \sqrt{F_{1x}^2+F_{1y}^2} = \frac{\sqrt{1+f_1^2}}{1+f_1f_2}mg = \frac{5\sqrt{17}}{4\sqrt{21}}mg = 1{,}12\,mg$$

pod úhlem

$$\beta_1 = 90\,^\circ + \operatorname{arctg}\left(\frac{|F_{1x}|}{F_{1y}}\right) = 90\,^\circ + \operatorname{arctg}(f_1) =$$

$$90\,^\circ + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{4}\right) = 90\,^\circ + 14\,^\circ = 104\,^\circ.$$

Svislá stěna působí na tyč silou o velikosti

$$F_2 = \sqrt{F_{2x}^2+F_{2y}^2} = \frac{f_1\sqrt{1+f_1^2}}{1+f_1f_2}mg = \frac{\sqrt{26}}{21}mg = 0{,}24\,mg$$

pod úhlem

$$\beta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{F_{2y}}{F_{2x}}\right) = \operatorname{arctg}(f_2) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) = 11\,^\circ.$$

4 body

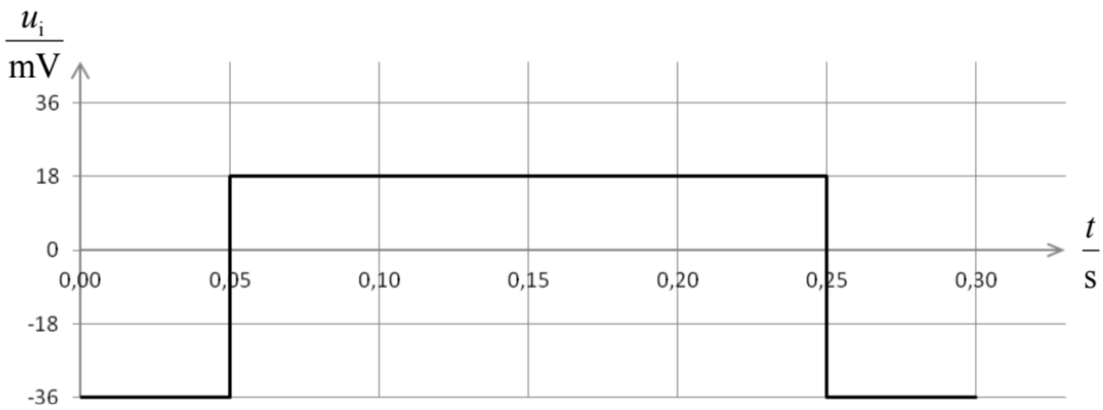
2.a) Na každém časovém úseku s lineární částí grafu se indukční tok mění rovnoměrně, indukované napětí je proto na každém z nich konstantní. Na třech úsecích první periody je určíme pomocí Faradayova zákona elektromagnetické indukce:

$$U_{i1} = -\frac{(B_1-0)S}{\dfrac{T}{6}-0} = -\frac{6B_1a^2}{T} = -36\text{ mV},$$

$$U_{i2} = -\frac{(-B_1-B_1)S}{\dfrac{5T}{6}-\dfrac{T}{6}} = \frac{3B_1a^2}{T} = 18\text{ mV},$$

$$U_{i3} = -\frac{[0-(-B_1)]\,S}{T-\frac{5T}{6}} = -\frac{6B_1a^2}{T} = U_{i1} = -36\ \mathrm{mV},$$

viz Obr. 2.



Obr. 2

2 body

b) Práce vykonaná elektrickým proudem za periodu T je součtem prací na každém ze tří úseků

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = \frac{U_{i1}^2}{4R_1}\frac{T}{6} + \frac{U_{i2}^2}{4R_1}\frac{2T}{3} + \frac{U_{i3}^2}{4R_1}\frac{T}{6} =$$

$$2\left(\frac{-6B_1a^2}{T}\right)^2\frac{T}{24R_1} + \left(\frac{3B_1a^2}{T}\right)^2\frac{T}{6R_1} = \frac{9B_1^2a^4}{2R_1T} = 54\ \mathrm{mJ}.$$

3 body

c) Indukované napětí se nemění, změnil se odpor z hodnoty $4R_1$ na hodnotu $26R_1$:

$$W' = \frac{4}{26}W = \frac{9B_1^2a^4}{13R_1T} = 8{,}3\ \mathrm{mJ}.$$

2 body

d) V případě měděného rámečku, kdy každá strana má stejný odpor, je napětí indukované na přímém vodiči rovno stejně velkému úbytku napětí vlivem jeho odporu. Proto mezi koncovými body bude výsledné napětí nulové:

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CD} = U_{DA} = 0.$$

1 bod

Pro kombinovaný rámeček vytvoříme náhradní schéma se zdroji a rezistory stejných parametrů, viz Obr. 3. Rámečkem protéká proud

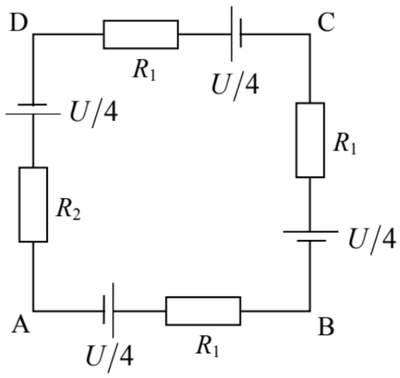
$$I = \frac{U}{3R_1 + R_2} = \frac{U}{26R_1}.$$

Mezi každými dvěma sousedními vrcholy je výsledné napětí algebraickým součtem čtvrtiny celkového indukovaného napětí a úbytku napětí na rezistoru. Platí:

$$U'_{AB} = U'_{BC} = U'_{CD} = \frac{U}{4} - R_1I = \frac{U}{4} - R_1\frac{U}{26R_1} = \frac{11U}{52},$$

$$U'_{DA} = \frac{U}{4} - R_2 I = \frac{U}{4} - 23R_1 \frac{U}{26R_1} = -\frac{33}{52}U.$$

2 body



Obr. 3

3.a) Velikost rychlosti cyklisty po větru je

$$v_1 = \frac{s}{2t_1} = 50{,}00\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

a proti větru

$$v_2 = \frac{s}{2t_2} = 32{,}00\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

Výkon cyklisty při jízdě po větru lze vyjádřit

$$P_1 = F_{\mathrm{odp1}} \cdot v_1 = k(v_1 - u)^2 \cdot v_1$$

a při jízdě proti větru

$$P_2 = F_{\mathrm{odp2}} \cdot v_2 = k(v_2 + u)^2 \cdot v_2.$$

Z rovnosti výkonů P_1, P_2 dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou u:

$$(v_1 - v_2) \cdot u^2 - 2\left(v_1^2 + v_2^2\right) \cdot u + v_1^3 - v_2^3 = 0.$$

Rovnici řešíme:

$$u = \frac{2\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \pm \sqrt{4\left(v_1^2 + v_2^2\right)^2 - 4(v_1 - v_2)\left(v_1^3 - v_2^3\right)}}{2(v_1 - v_2)} =$$

$$\frac{v_1^2 + v_2^2 \pm \sqrt{v_1^4 + 2v_1^2 v_2^2 + v_2^4 - v_1^4 + v_1 v_2^3 + v_1^3 v_2 - v_2^4}}{v_1 - v_2} =$$

$$\frac{v_1^2 + v_2^2 \pm \sqrt{v_1 v_2\left(v_1^2 + 2v_1 v_2 + v_2^2\right)}}{v_1 - v_2} =$$

$$\frac{v_1^2 + v_2^2 \pm (v_1 + v_2)\sqrt{v_1 v_2}}{v_1 - v_2}.$$

Dosazením číselných hodnot dostaneme dvě hodnoty rychlosti větru: $u = 13{,}56\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $u' = 378\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Reálnou hodnotu představuje pouze rychlost u. (Rychlost u' odpovídá teoretické situaci, kdy cyklista jede s obrovským výkonem proti větru rychlostí o velikosti $v_2 + u' = 410\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ vzhledem ke vzduchu a se stejným brzdným výkonem po větru rychlostí o velikosti $|v_1 - u'| = 328\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ vzhledem ke vzduchu, kdy naopak vítr cyklistu tlačí. V prvním případě cyklista práci šlapáním koná, v druhém případě práci konanou větrem brzděním spotřebovává.)

6 bodů

b) Vyjdeme z rovnosti výkonů za bezvětří a na jednom z úseků za větru, např.

$$P = kv_0^3 = k(v_1 - u)^2 v_1.$$

Z rovnosti plyne

$$v_0 = \sqrt[3]{(v_1 - u)^2 v_1} = 40{,}49\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

Dosažený čas za bezvětří je

$$t_0 = \frac{s}{v_0} = 53\ \mathrm{min}\ 21\ \mathrm{s}.$$

Za bezvětří je doba jízdy kratší o čas

$$\Delta t = t_1 + t_2 - t_0 = 2\ \mathrm{min}\ 00\ \mathrm{s}.$$

4 body

4.a) Na počátku měření je píst v rovnovážné poloze ve vzdálenosti l_0. Tlak uvnitř válce je atmosférický tlak p_0. Zvýšení tlaku se projeví prodloužením pružiny. Pro tlak uvnitř válce můžeme napsat

$$p = p_0 + \frac{k(l - l_0)}{S} = p_0 + \frac{kl}{S} - \frac{kl_0}{S} = p_0 + \frac{kl}{S} - p_0 = \frac{\frac{F_0}{l_0}l}{S} = \frac{F_0}{S}\frac{l}{l_0} = p_0\frac{l}{l_0},$$

kde silou F_0 rozumíme sílu, kterou působí okolní vzduch (resp. pružina) na píst v rovnovážné poloze pístu.
Tlak vzduchu uvnitř válce je přímo úměrný jeho výšce.

1 bod

b) Ze stavové rovnice $\dfrac{plS}{T} = \dfrac{p_0 l_0 S}{T_0}$ plyne $\dfrac{p_0\frac{l}{l_0}}{T} lS = \dfrac{p_0 l_0 S}{T_0}$.

Po zkrácení a úpravě $T = T_0 \left(\dfrac{l}{l_0}\right)^2$.

Závislost vzdálenosti pístu od základny na teplotě $l = l_0\sqrt{\dfrac{T}{T_0}}$.

2 body

c) Z předcházejícího plyne

$$T_1 = T_0 \left(\frac{l}{l_0}\right)^2 = T_0 \left(\frac{l_0(1 + x)}{l_0}\right)^2 = T_0(1 + x)^2 = 293 \cdot (1{,}2)^2\ \mathrm{K} = 422\ \mathrm{K}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = 149\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

2 body

Teplo dodané vzduchu uvnitř válce je podle 1. termodynamického zákona

$$Q = \Delta U + W'.$$

Změna vnitřní energie dvouatomového plynu $\Delta U = \frac{5}{2} nR\Delta T$.

Přírůstek teploty je $\Delta T = T_0 \left[\left(\frac{l}{l_0}\right)^2 - 1\right] = T_0[(1+x)^2 - 1] = (2+x)xT_0$.

Dosadíme do vztahu pro vnitřní energii a s využitím stavové rovnice $p_0 l_0 S = nRT_0$

$$\Delta U = \frac{5}{2} nR\Delta T = \frac{5}{2} nR(2+x)xT_0 = \frac{5}{2}(2+x)xp_0 l_0 S = 22{,}0 \text{ J}.$$

2 body

Podle části a) je tlak plynu uvnitř válce přímo úměrný jeho výšce a tedy i jeho objemu. Střední hodnota tlaku je $\frac{p_0 + p_1}{2}$, kde $p_1 = p_0(1+x)$.

Při zahřívání plyn vykoná práci

$$W' = \frac{p_0 + p_1}{2} \Delta V = \frac{p_0 + p_1}{2} (l - l_0) S = \frac{p_0 + p_0(1+x)}{2} x l_0 S =$$

$$\frac{1}{2}(2+x)xp_0 l_0 S = 4{,}4 \text{ J}.$$

2 body

Bude potřeba dodat teplo

$$Q = \Delta U + W' = \frac{5}{2}(2+x)xp_0 l_0 S + \frac{1}{2}(2+x)xp_0 l_0 S = 3(2+x)xp_0 l_0 S = 26{,}4 \text{ J}.$$

1 bod

5.a) V zapojení A platí: $\frac{1}{k_A} = \frac{1}{2k_1} + \frac{2}{k_2} \quad \Longrightarrow \quad k_A = \frac{2k_1 k_2}{4k_1 + k_2}$.

V zapojení B platí: $\frac{1}{k_B} = \frac{1}{2k_2} + \frac{2}{k_1} \quad \Longrightarrow \quad k_B = \frac{2k_1 k_2}{k_1 + 4k_2}$.

V zapojení C platí: $k_C = 2k' = \frac{2k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

V zapojení D platí: $\frac{1}{k_D} = \frac{2}{k_1} + \frac{2}{k_2} \quad \Longrightarrow \quad k_D = \frac{k_1 k_2}{2k_1 + 2k_2}$.

3 body

b) Vlastně hledáme případ, kdy je tuhost jedné soustavy dvojnásobkem tuhosti druhé soustavy. Nejmenší výslednou tuhost má zapojení D, v zapojení C je tuhost 4 krát větší než v zapojení D a přitom větší, než v zapojení A a B. Hledané dvojice mohou být A a D nebo B a D, případně C a A nebo C a B.

V případě, kdy $k_A = 2k_D$, tedy $\frac{2k_1 k_2}{4k_1 + k_2} = \frac{2k_1 k_2}{2k_1 + 2k_2} \Longrightarrow 4k_1 + k_2 = 2k_1 + 2k_2$

$\Longrightarrow \frac{k_2}{k_1} = 2$.

V případě, kdy $k_B = 2k_D$, tedy $\frac{2k_1 k_2}{k_1 + 4k_2} = \frac{2k_1 k_2}{2k_1 + 2k_2} \Longrightarrow k_1 + 4k_2 = 2k_1 + 2k_2$

$\Longrightarrow \dfrac{k_1}{k_2} = 2.$

V případě, kdy $k_C = 2k_A$, tedy $\dfrac{2k_1k_2}{k_1+k_2} = \dfrac{4k_1k_2}{4k_1+k_2} \Longrightarrow 4k_1 + k_2 = 2k_1 + 2k_2 \Longrightarrow$ $\dfrac{k_2}{k_1} = 2.$

Podobně $k_C = 2k_B$, tedy $\dfrac{2k_1k_2}{k_1+k_2} = \dfrac{4k_1k_2}{k_1+4k_2} \Longrightarrow k_1 + 4k_2 = 2k_1 + 2k_2 \Longrightarrow$ $\dfrac{k_1}{k_2} = 2.$

Odpověď na otázku b) tedy je, že může jít o soustavy B a D nebo C a B.

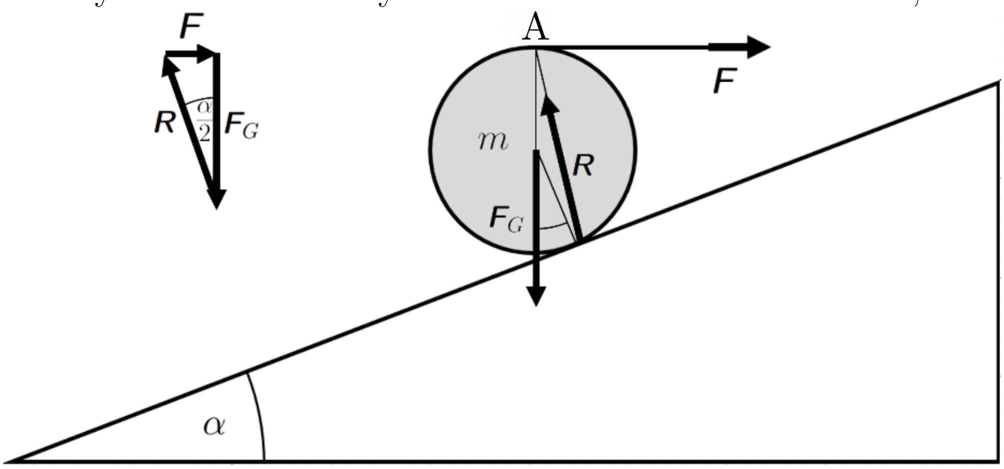
4 body

c) Platí $T_D = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k_D}}$. Soustava B má dvojnásobnou tuhost, proto $T_B = \dfrac{T_D}{\sqrt{2}} = 1{,}4$ s. Soustava C má dvojnásobnou tuhost v porovnání se soustavou B, proto $T_C = \dfrac{T_D}{2} = 1{,}0$ s.

Ještě musíme určit tuhost soustavy A, tedy $k_A = \dfrac{2k_1k_2}{4k_1+k_2} = \dfrac{4}{9}k_2$. A soustavy D, kde $k_D = \dfrac{k_1k_2}{2k_1+2k_2} = \dfrac{1}{3}k_2$. Porovnáním $k_A = \dfrac{4}{3}k_D$. Doba kmitu soustavy A tedy bude $T_A = \sqrt{\dfrac{3}{4}}T_D = 1{,}7$ s.

3 body

7.a) Na kouli působí kromě síly $\boldsymbol{F}$ ještě tíhová síla s působištěm ve středu koule a reakce nakloněné roviny $\boldsymbol{R}$ v místě dotyku koule s nakloněnou rovinou, viz Obr. 4.



Obr. 4

Síly, které na kouli působí, jsou v rovnováze, proto musí jejich nositelky procházet jedním bodem – bodem A. Z vlastností úhlů v trojúhelníku plyne, že reakce nakloněné roviny $\boldsymbol{R}$ svírá se svislým směrem úhel $\dfrac{\alpha}{2}$.

Velikosti sil jsou:

$$F_G = mg = 4{,}9\ \mathrm{N},$$

$$F = mg\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = 1{,}3\ \mathrm{N},$$

$$R = \frac{mg}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 5{,}7\ \mathrm{N}.$$

6 bodů

b) Aby koule neprokluzovala, musí být velikost síly tření $F_t = fR\cos\frac{\alpha}{2}$ větší než pohybová složka síly, kterou působí koule na nakloněnou rovinu $R\sin\frac{\alpha}{2}$, proto $f \geq \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$, tj. $f \geq 0,27$

4 body