Řešení úloh 1. kola 67. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Úlohy navrhli: Radmila Horáková, Ondřej Životský

1. a) Podle zákona zachování mechanické energie platí: $mgh_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh_0} = 6,26\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

1 bod

b) Po prvním odrazu vyskočí míček do výšky $h_1 = kh_0 = 1,60\,\mathrm{m}$.

1 bod

c) Pro rychlost míčku v_1 po prvním odraze platí: $v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gkh_0} = 5,60\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$

1 bod

d) Pro výšku h_2 platí: $h_2 = kh_1 = k^2h_0$. Obecně pro výšku h_x tedy platí: $h_x = k^xh_0$.

Pro rychlost v_2 platí: $v_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2gk^2h_0}$. Obecně pro rychlost v_x tedy platí: $v_x = \sqrt{2gk^xh_0} = \sqrt{2gh_0}\sqrt{k^x} = v_0\sqrt{k^x}$.

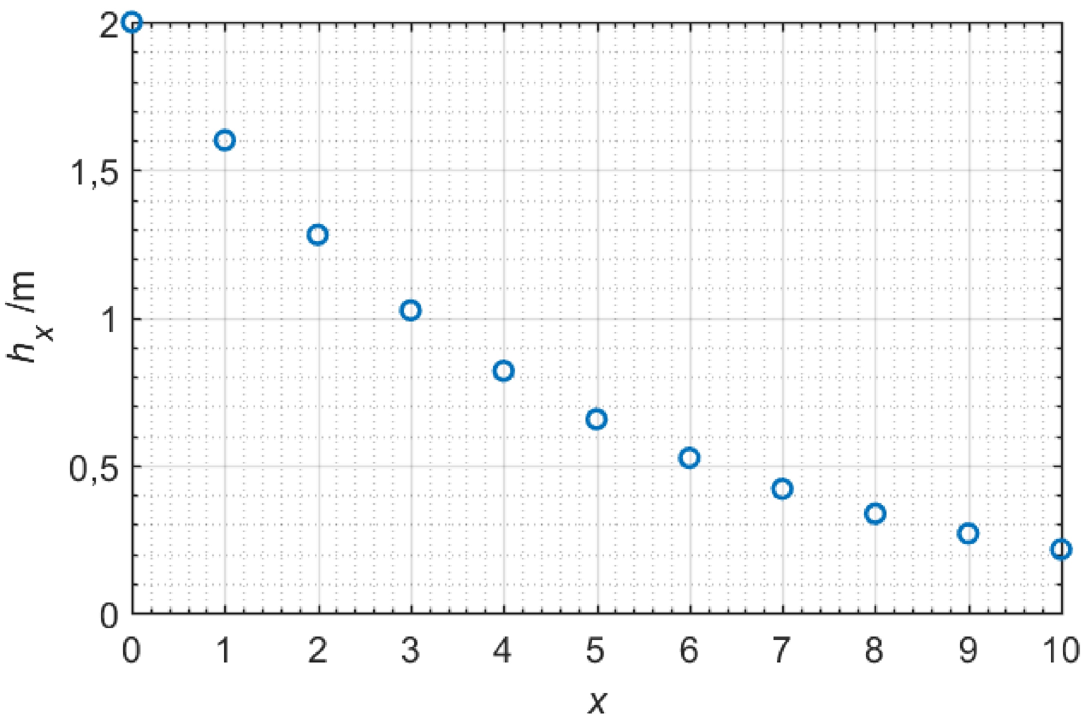
2 body

e) Tabulka vypočtených hodnot h_x a v_x ze závislostí odvozených v části d).

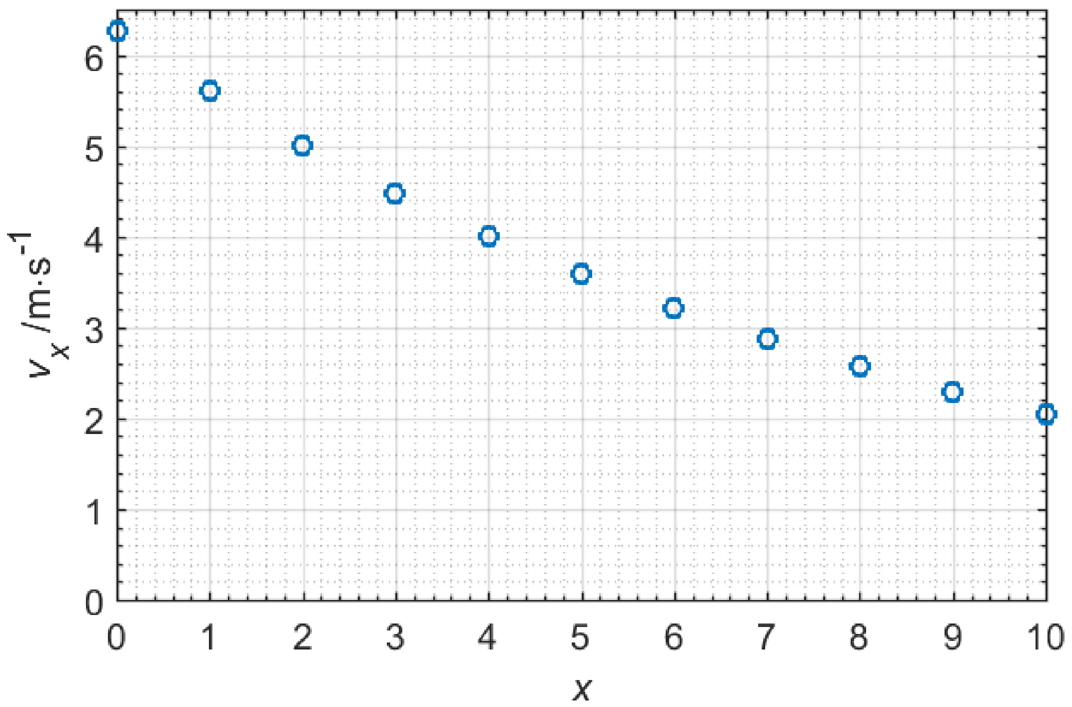
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h_x/m	2,00	1,60	1,28	1,02	0,82	0,66	0,52	0,42	0,34	0,27	0,21
$v_x/\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$	6,26	5,60	5,01	4,48	4,01	3,58	3,21	2,87	2,56	2,29	2,05

1 bod

f) Obrázky závislostí $h_x = f(x)$ a $v_x = f(x)$:



Obr. 1



Obr. 2

Definičním oborem grafů je pouze množina celých čísel z tabulky e).

3 body

g) Z grafu i tabulky je zřejmé, že míček vyskočí do výšky menší než $h_0/2$ po čtvrtém odrazu, rychlost bude menší než $v_0/2$ po sedmém odrazu.

1 bod

2. a) Vodní pára zkapalní a ochladí se na výslednou teplotu t, kterou vypočteme z kalorimetrické rovnice:

$$m_1 c_v (t - t_1) = m_2 l_v + m_2 c_v (t_2 - t) \Rightarrow t = \frac{m_2 l_v + m_2 c_v t_2 + m_1 c_v t_1}{c_v (m_1 + m_2)} = 55{,}8\,^\circ\mathrm{C}.$$

Teplota vody v kalorimetru bude $55{,}8\,^\circ\mathrm{C}$.

4 body

b) Použijeme opět kalorimetrickou rovnici:

$$m_1 c_v (t - t_1) = m_3 c_v (t_3 - t) \Rightarrow m_3 = \frac{m_1 (t - t_1)}{t_3 - t} = 0{,}131\,\mathrm{kg}.$$

Voda v kalorimetru se ustálí na teplotě $55{,}8\,^\circ\mathrm{C}$, přidáme-li místo páry $0{,}131\,\mathrm{kg}$ vody o teplotě $100\,^\circ\mathrm{C}$.

2 body

c) V obou předchozích případech vzrostla teplota soustavy z $50\,^\circ\mathrm{C}$ na $55{,}8\,^\circ\mathrm{C}$, tedy o $5{,}8\,^\circ\mathrm{C}$. Nyní máme předpokládat, že výsledná teplota soustavy po přidání ledu o $5{,}8\,^\circ\mathrm{C}$ poklesne. Výsledná teplota bude tedy $t_5 = 50\,^\circ\mathrm{C} - 5{,}8\,^\circ\mathrm{C} = 44{,}2\,^\circ\mathrm{C}$. Opět vyjdeme z kalorimetrické rovnice – led o neznámé hmotnosti m_4 se musí ohřát na teplotu $t_0 = 0\,^\circ\mathrm{C}$, poté roztát a již jako voda se ohřát na teplotu t_5:

$$m_1 c_v(t_1 - t_5) = m_4 c_l(t_0 - t_4) + m_4 l_t + m_4 c_v(t_5 - t_0) \Rightarrow$$
$$m_4 = \frac{m_1 c_v(t_1 - t_5)}{c_l(t_0 - t_4) + l_t + c_v(t_5 - t_0)} = 0,045\,\mathrm{kg}.$$

Aby se voda v kalorimetru ochladila na $44,2\,^\circ\mathrm{C}$, musíme přidat $0,045\,\mathrm{kg}$ ledu o teplotě $-10\,^\circ\mathrm{C}$.

4 body

3.a) Vyjdeme ze stavové rovnice:

$$p_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow p_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = 1,99 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}.$$

Tlak v počátečním stavu je $1,99 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$.

1 bod

b) Pro výpočet práce při izotermickém ději použijeme uvedený vztah:

$$W = nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT_1 \ln 2 = 6,91 \cdot 10^3\ \mathrm{J}.$$

Práce vykonaná při izotermické ději, při kterém se zdvojnásobí objem, je $6,91\,\mathrm{kJ}$.

1 bod

c) Pro práci u izobarického děje platí:

$$W = p_1(V_2 - V_1) = \frac{nRT_1}{V_1}(V_2 - V_1).$$

Zároveň víme, že tato práce je stejná jako u izotermického děje, tedy:

$$W = \frac{nRT_1}{V_1}(V_2 - V_1) = nRT_1 \ln 2 \Rightarrow V_2 = V_1(1 + \ln 2) = 0,85\,\mathrm{m}^3.$$

2 body

U izobarického děje platí:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = T_1(1 + \ln 2) = 1\,020\ \mathrm{K}.$$

1 bod

Vykoná-li se při izobarickém ději stejná práce jako u izotermického děje, bude objem na konci děje $0,85\,\mathrm{m}^3$ a teplota $1\,020$ K.

d) Pro výpočet práce při adiabatickém ději použijeme uvedený vztah:

$$W = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{1 - \kappa} = \frac{p_1 V_1}{1 - \kappa}\left(\frac{p_2}{p_1}\frac{V_2}{V_1} - 1\right).$$

Pro adiabatický děj dále platí rovnice: $p_1 V_1 = nRT_1$ a $p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$.
Jejich vložením do vztahu pro práci W dostaneme:

$$W=\frac{nRT_1}{1-\kappa}\left(\frac{V_1^\kappa}{V_1}\frac{V_2}{V_2^\kappa}-1\right)=\frac{nRT_1}{1-\kappa}\left(V_1^{\kappa-1}V_2^{1-\kappa}-1\right).$$

Protože víme, že tato práce je stejná jako u izotermického děje, platí:

$$W=\frac{nRT_1}{1-\kappa}\left(V_1^{\kappa-1}V_2^{1-\kappa}-1\right)=nRT_1\ln 2\Rightarrow V_2=V_1\sqrt[1-\kappa]{1+(1-\kappa)\ln 2}=1,13\,\mathrm{m}^3.$$

3 body

Pro výstupní tlak p_2 lze psát:

$$p_2=p_1\frac{V_1^\kappa}{V_2^\kappa}=\frac{nRT_1}{V_1}\frac{V_1^\kappa}{V_1^\kappa(\sqrt[1-\kappa]{1+(1-\kappa)\ln 2})^\kappa}=\frac{nRT_1}{V_1}[1+(1-\kappa)\ln 2]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}=6\,400\text{ Pa}.$$

1 bod

Pro výstupní teplotu T_2 lze psát:

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}\Rightarrow T_2=T_1\frac{V_2}{V_1}\frac{p_2}{p_1}=T_1V_1^{\kappa-1}V_2^{1-\kappa}=T_1[1+(1-\kappa)\ln 2]=434\,\mathrm{K}.$$

1 bod

Vykoná-li se při adiabatickém ději stejná práce jako v předešlých úlohách, je objem na konci děje $1,13\,\mathrm{m}^3$, tlak $6,40\,\mathrm{kPa}$ a teplota $434\,\mathrm{K}$.

4.a) Gravitační zrychlení na rovníku určíme ze vztahu:

$$a_g=G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}^2}=9,801\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Gravitační zrychlení na rovníku je 9,801 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1 bod

b) Vrcholek hory Kenya má od středu Země vzdálenost $R_\mathrm{Z}+h_1$, proto gravitační zrychlení určíme ze vztahu:

$$a_{g1}=G\frac{M_\mathrm{Z}}{(R_\mathrm{Z}+h_1)^2}=9,785\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Gravitační zrychlení na vrcholku hory Kenya je 9,785 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1 bod

c) Hledáme výšku h_2, ve které je gravitační zrychlení $a_{g2}=0,9\ a_g$:

$$G\frac{M_\mathrm{Z}}{(R_\mathrm{Z}+h_2)^2}=0,9G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}^2}\Rightarrow R_\mathrm{Z}^2=0,9(R_\mathrm{Z}+h_2)^2.$$

Řešením kvadratické rovnice $0,9h_2^2+1,8R_\mathrm{Z}h_2-0,1R_\mathrm{Z}^2=0$ dostaneme kořeny pro h_2:

$$h_{2(1,2)} = \frac{-1,8R_\mathrm{Z} \pm \sqrt{1,8^2R_\mathrm{Z}^2 + 4\cdot 0,9\cdot 0,1R_\mathrm{Z}^2}}{1,8}.$$

Fyzikální smysl má pouze kladný kořen:

$$h_2 = -R_\mathrm{Z} + \sqrt{\frac{3,6}{1,8^2}}R_\mathrm{Z} = R_\mathrm{Z}\left(-1+\sqrt{\frac{10}{9}}\right) = 345\ \mathrm{km}.$$

Gravitační zrychlení je o 10% menší než na rovníku ve výšce 345 km nad Zemí.

2 body

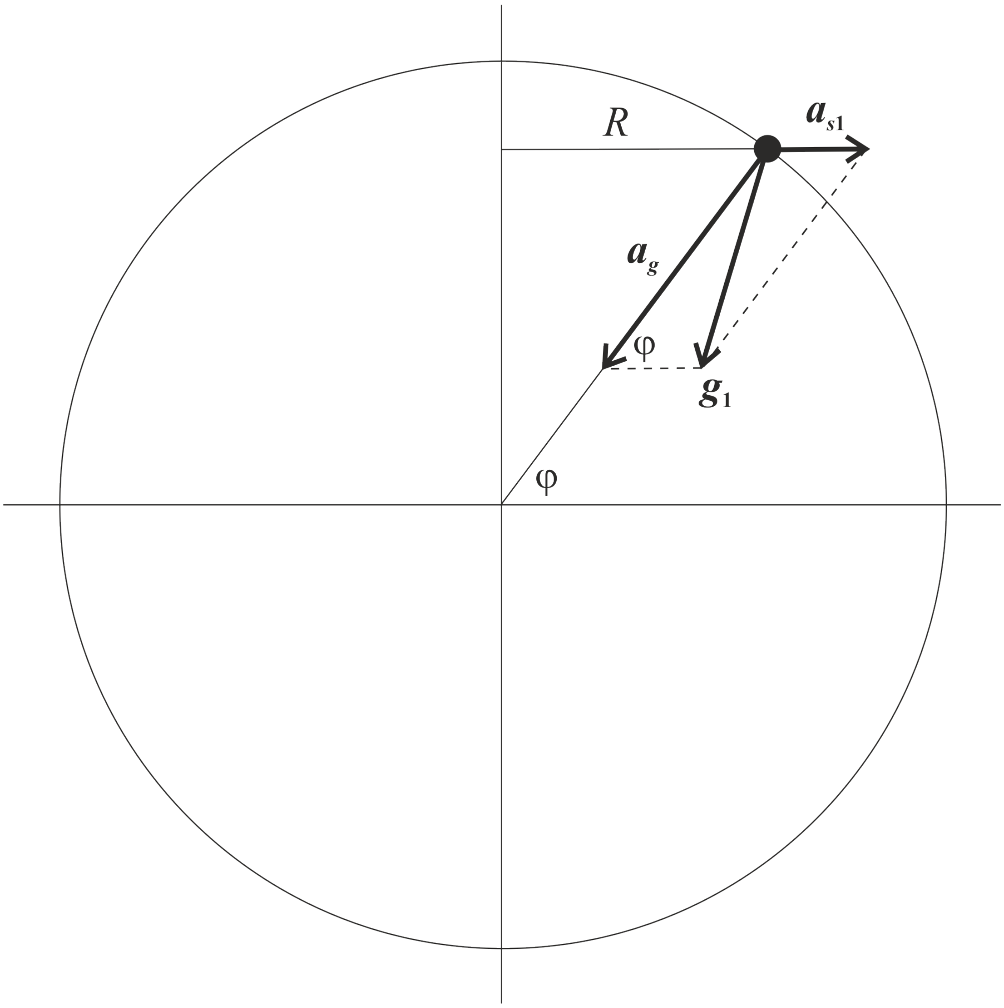
d) Tíhové zrychlení na rovníku určíme jako rozdíl gravitačního a setrvačného odstředivého zrychlení:

$$g = a_g - a_s = G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}^2} - \omega^2 R_\mathrm{Z} = G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}^2} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_\mathrm{Z} = 9,767\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}.$$

Tíhové zrychlení na rovníku je 9,767 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

2 body

Tíhové zrychlení v zeměpisné šířce φ určíme jako vektorový součet gravitačního zrychlení a setrvačného odstředivého zrychlení, které v tomto případě je $a_{s1} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$, kde $R = R_\mathrm{Z}\cos\varphi$ – viz obr. 3.



Obr. 3

Podle obrázku se jedná o obecný trojúhelník, pro výpočet tíhového zrychlení g_1 použijeme kosinovou větu:

$$g_1 = \sqrt{a_g^2 + a_{s1}^2 - 2a_g a_{s1} \cos\varphi}.$$

$$g_1 = \sqrt{\left(G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}^2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^4 R_\mathrm{Z}^2 \cos^2\varphi - 2G\frac{M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}^2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R_\mathrm{Z}\cos^2\varphi} = 9{,}793\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}.$$

Tíhové zrychlení na zeměpisné šířce $\varphi = 60°$ je 9,793 m·s^{-2}.

4 body

5.a) Pro změnu délky tyče platí:

$$\Delta l = l_1\alpha\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta l}{l_1\alpha} = \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

Teplotu t_2 vyjádříme jako:

$$t_2 = t_1 + \Delta t = t_1 + \frac{\varepsilon}{\alpha} = 25{,}9\,°\mathrm{C}.$$

Konečná teplota tyče při zahřátí o 0,01% je 25,9 °C.

2 body

b) Změna vnitřní energie ΔU je rovna dodanému teplu:

$$\Delta U = Q = mc_\mathrm{Cu}\Delta t = l_1 S\varrho_\mathrm{Cu}c_\mathrm{Cu}\frac{\varepsilon}{\alpha} = 4{,}0\cdot 10^3\,\mathrm{J}.$$

Změna vnitřní energie tyče při zahřátí je 4,0 kJ.

2 body

c) Použijeme Hookův zákon. Pro normálové napětí platí:

$$\sigma_n = E\varepsilon = 12\cdot 10^6\,\mathrm{Pa}.$$

Při deformaci tlakem by v tyči vzniklo normálové napětí 12 MPa.

2 body

d) Teplo Q_1, které přijme voda, je rovno teplu Q_2, které při ochlazení odevzdá tyč:

$$Q_1 = V\varrho_\mathrm{v}c_\mathrm{v}(t - t_3) = Q_2 = l_1 S\varrho_\mathrm{Cu}c_\mathrm{Cu}(t_2 - t).$$

Z této rovnice vyjádříme výslednou teplotu t jako:

$$t = \frac{l_1 S\varrho_\mathrm{Cu}c_\mathrm{Cu}t_2 + V\varrho_\mathrm{v}c_\mathrm{v}t_3}{l_1 S\varrho_\mathrm{Cu}c_\mathrm{Cu} + V\varrho_\mathrm{v}c_\mathrm{v}} = 11\,°\mathrm{C}.$$

Výsledná teplota soustavy je 11 °C.

4 body

7. a) Platí rovnováha sil – tíhová síla G se rovná síle vztlakové F_{vz}:

$$G = F_{vz} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi\left[R^3 - (R-x)^3\right]\varrho_{\mathrm{Fe}}g = \frac{2}{3}\pi R^3 \varrho_{\mathrm{v}} g.$$

Po úpravě dostaneme:

$$(R-x)^3 = R^3\left(1 - \frac{\varrho_{\mathrm{v}}}{2\varrho_{\mathrm{Fe}}}\right) \Rightarrow x = R\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\varrho_{\mathrm{v}}}{2\varrho_{\mathrm{Fe}}}}\right) = 9,0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

Aby byla koule ponořena polovinou svého objemu, musí být tloušťka plechu $9,0\,\mathrm{mm}$.

3 body

b) Opět platí rovnováha sil – tíhová síla G se rovná síle vztlakové F_{vz}:

$$G = F_{vz} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi\left[R^3 - (R-x_1)^3\right]\varrho_{\mathrm{Fe}}g = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_{\mathrm{v}} g.$$

Po úpravě dostaneme:

$$(R-x_1)^3 = R^3\left(1 - \frac{\varrho_{\mathrm{v}}}{\varrho_{\mathrm{Fe}}}\right) \Rightarrow x_1 = R\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{\varrho_{\mathrm{v}}}{\varrho_{\mathrm{Fe}}}}\right) = 18,4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

Aby se koule v mořské vodě vznášela, musí být tloušťka plechu $18,4\,\mathrm{mm}$. Ke stejnému závěru dospějeme i úvahou, že průmětná hustota koule se musí rovnat hustotě mořské vody.

2 body

c) Vyjdeme opět z rovnováhy sil. Platí, že tíhová síla G se rovná součtu vztlakové síly F_{vz} a tahové síly T:

$$G = F_{vz} + T \Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_{\mathrm{Fe}} g = \frac{2}{3}\pi R^3 \varrho_{\mathrm{v}} g + T.$$

Odsud vyjádříme tahovou sílu T jako:

$$T = \frac{4}{3}\pi R^3 g\left(\varrho_{\mathrm{Fe}} - \frac{\varrho_{\mathrm{v}}}{2}\right) = 19,2 \cdot 10^3\,\mathrm{N}.$$

Tahová síla ocelového lana bude $19,2\,\mathrm{kN}$.

2 body

d) V laně vznikne normálové napětí $\sigma_{\mathrm{n}} = \frac{T}{S} = \frac{T}{\pi r^2}$.
Nejmenší poloměr bude mít lano tehdy, bude-li normálové napětí rovno mezi pevnosti σ_{p}:

$$r = \sqrt{\frac{T}{\pi\sigma_{\mathrm{p}}}} = \sqrt{\frac{4R^3 g\left(\varrho_{\mathrm{Fe}} - \frac{\varrho_{\mathrm{v}}}{2}\right)}{3\sigma_{\mathrm{p}}}} = 3,2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}.$$

Nejmenší poloměr ocelového lana, který udrží železnou kouli ponořenou do mořské vody polovinou jejího objemu, je $3,2\,\mathrm{mm}$.

3 body