Řešení úloh 2. kola 67. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie C*

Úlohy navrhli J. Jírů (1, 3), R. Horáková (2, 4).

1. a) Označme V objem každé koule. Při vznášení je součet tíhových sil obou koulí roven dvojnásobku vztlakové síly působící na každou kouli:

$$\rho_1 V g + \rho_2 V g = 2\rho V g \Rightarrow \rho_2 = 2\rho - \rho_1 = 1,4 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}.$$

2 body

b) Během vznášení nit brání pohybu horní koule nahoru a současně pohybu spodní koule dolů. Nit je napínána výslednicí vztlakové síly a tíhové síly, které působí např. na horní kouli:

$$F = \rho V g - \rho_1 V g = (\rho - \rho_1)\frac{m_1}{\rho_1} g = \left(\frac{\rho}{\rho_1} - 1\right) m_1 g = 0,31 \text{ N}.$$

2 body

(Stejný výsledek dostaneme z výslednice tíhové a vztlakové síly působící na spodní kouli:

$$F = \rho_2 V g - \rho V g = (\rho_2 - \rho)\frac{m_1}{\rho_1} g = \frac{(2\rho - \rho_1) - \rho}{\rho_1} m_1 g = \left(\frac{\rho}{\rho_1} - 1\right) m_1 g = 0,31 \text{ N. })$$

c) Označíme-li r poloměr olověné koule, pak poloměr dřevěné koule je $3r$. Výslednice vztlakové a tíhové síly působící na dřevěnou kouli směřuje vzhůru a má velikost

$$F_1 = \rho \frac{4}{3}\pi (3r)^3 g - \rho_1 \frac{4}{3}\pi (3r)^3 g = 36\pi r^3 (\rho - \rho_1) g.$$

Výslednice tíhové a vztlakové síly působící na olověnou kouli směřuje dolů a má velikost

$$F_2 = \rho_3 \frac{4}{3}\pi r^3 g - \rho \frac{4}{3}\pi r^3 g = \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_3 - \rho) g.$$

Jejich poměr je

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{36\pi r^3 (\rho - \rho_1) g}{\frac{4}{3}\pi r^3 (\rho_3 - \rho) g} = \frac{27(\rho - \rho_1)}{\rho_3 - \rho} = \frac{10,8}{10,3} > 1.$$

Jelikož $F_1 > F_2$, soustava koulí vystoupá k hladině.

3 body

(Můžeme též přímo využít poznatku, že objem koule roste s třetí mocninou jejího poloměru. Při objemu V dané koule pak koule s trojnásobným poloměrem má objem $3^3 V = 27V$.)

d) Vyjdeme např. z podmínky, že výslednice vztlakové a tíhové síly působící na kouli nahoru musí být větší než výslednice tíhové a vztlakové síly působící na válec dolů:

$$\rho \frac{4}{3}\pi r_\text{k}^3 g - \rho_1 \frac{4}{3}\pi r_\text{k}^3 g > \rho_4 \pi r_\text{v}^2 h g - \rho \pi r_\text{v}^2 h g.$$

Úpravami dostaneme

$$4(\rho-\rho_1)r_\mathrm{k}^3 > 3(\rho_4-\rho)r_\mathrm{v}^2 h \Rightarrow r_k > \sqrt[3]{\frac{3(\rho_4-\rho)}{4(\rho-\rho_1)}r_\mathrm{v}^2 h} = 4,1\ \mathrm{cm}.$$

Poloměr koule musí být větší než 4,1 cm.

3 body

2.a) Odpojený vagón se bude pohybovat rovnoměrně zpomaleným pohybem, vlak rovnoměrně zrychleným pohybem.

1 bod

b) Před odpojením vagónu se vlak pohyboval rovnoměrně přímočaře, tedy

$$F = F_\mathrm{o} = kmg \Rightarrow k = \frac{F}{mg}.$$

Na odpojený vagón působí odporová síla

$$F_\mathrm{o1} = km_1 g = \frac{F}{mg}m_1 g = F\frac{m_1}{m}.$$

1 bod

c) Protože se tahová síla lokomotivy nemění, je výsledná síla působící na kratší vlak dána rozdílem tahové síly F a odporové síly $F_\mathrm{o}' = F_\mathrm{o} - F_\mathrm{o1}$:

$$F_\mathrm{v} = F - F_\mathrm{o}' = F - k(m-m_1)g = F - \frac{F}{mg}(m-m_1)g = F\frac{m_1}{m}.$$

1 bod

d) Odpojený vagón se bude pohybovat se zrychlením o velikosti:

$$a_1 = \frac{F_\mathrm{o1}}{m_1} = \frac{F\frac{m_1}{m}}{m_1} = \frac{F}{m}.$$

1 bod

e) Odpojený vagón urazí do zastavení dráhu $s_1 = vt - \frac{1}{2}a_1 t^2$, kde $t = \frac{v}{a_1}$.
Po dosazení dostaneme:

$$s_1 = v\frac{v}{a_1} - \frac{1}{2}a_1\frac{v^2}{a_1^2} = \frac{v^2}{\frac{F}{m}} - \frac{v^2}{2\frac{F}{m}} = \frac{mv^2}{2F}.$$

1 bod

f) Kratší vlak se bude pochybovat se zrychlením:

$$a = \frac{F_\mathrm{v}}{m-m_1} = \frac{F\frac{m_1}{m}}{m-m_1} = F\frac{m_1}{m(m-m_1)}.$$

2 body

g) Kratší vlak urazí za dobu t dráhu $s = vt + \frac{1}{2}at^2$, kde $t = \frac{v}{a_1}$.
Po dosazení dostaneme:

$$s = v\frac{v}{a_1} + \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a_1^2} = \frac{v^2}{\frac{F}{m}} + \frac{1}{2}F\frac{m_1}{m(m-m_1)}\frac{v^2}{\frac{F^2}{m^2}} = \frac{mv^2}{F} + \frac{mm_1v^2}{2F(m-m_1)} =$$

$$= \frac{2m(m-m_1)v^2 + mm_1v^2}{2F(m-m_1)} = \frac{(2m-2m_1+m_1)mv^2}{2F(m-m_1)} = \frac{(2m-m_1)mv^2}{2F(m-m_1)}.$$

3 body

3.a) Označme H_1 ustálenou výšku hladiny nade dnem nádrže při uzavřeném horním otvoru. Z rovnosti objemových toků v ustálených stavech po uzavření a před uzavřením horního otvoru dostaneme

$$S\sqrt{2g(H_1-h)} = S\sqrt{2g(2,5h-h)} + \frac{3}{2}S\sqrt{2g(2,5h-2h)}.$$

Po úpravách:

$$H_1 - h = \left(\sqrt{1,5h} + \frac{3}{2}\sqrt{0,5h}\right)^2 = \left(\sqrt{1,5} + \frac{3}{2}\sqrt{0,5}\right)^2 h \Rightarrow H_1 \approx 6,22h > 5h.$$

Jelikož $H_1 > 5h$, bude po jisté době nádrž přetékat.

3 body

Označme H_2 ustálenou výšku hladiny nade dnem nádrže při uzavřeném dolním otvoru. Z rovnosti objemových toků v ustálených stavech po uzavření a před uzavřením dolního otvoru dostaneme

$$\frac{3}{2}S\sqrt{2g(H_2-2h)} = S\sqrt{2g(2,5h-h)} + \frac{3}{2}S\sqrt{2g(2,5h-2h)}.$$

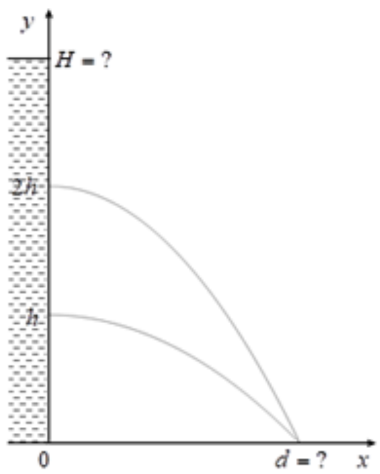
Po úpravách:

$$H_2 - 2h = \left(\frac{2}{3}\sqrt{1,5h} + \sqrt{0,5h}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{1,5} + \sqrt{0,5}\right)^2 h \Rightarrow H_2 \approx 4,32h < 5h.$$

Jelikož $H_2 < 5h$, ustálí se hladina pod horním okrajem nádrže a nebude přetékat.

3 body

b) Každý z proudů tvoří vodorovný vrh s počátečními rychlostmi $v_1 = \sqrt{2g(H-h)}$ a $v_2 = \sqrt{2g(H-2h)}$. Zvolíme-li soustavu souřadnic tak, že oba výtokové otvory leží na ose y orientované svisle vzhůru a osu x tvoří průsečnice roviny obou vrhů a roviny dna s orientací od nádrže (viz obrázek 1), pak rovnice vrhů jsou:



Obr. 1

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2, x = v_1 t,$$

$$y = 2h - \frac{1}{2}gt^2, x = v_2 t.$$

Vyloučením času t a dosazením za počáteční rychlosti dostaneme:

$$y = h - \frac{g}{2v_1^2}x^2 = h - \frac{x^2}{4(H-h)},$$

$$y = 2h - \frac{g}{2v_2^2}x^2 = 2h - \frac{x^2}{4(H-2h)}.$$

Položíme-li $y = 0$ a $x = d$, pak platí:

$$d^2 = 4h(H-h), d^2 = 8h(H-2h).$$

Z rovnosti pravých stran plyne: $H = 3h$.

3 body

Zpětným dosazením dostaneme: $d = \sqrt{4h(H-h)} = \sqrt{4h(3h-h)} = 2\sqrt{2}h \approx 2{,}83h$.

1 bod

4.a) Prvním dějem je izochorické zvýšení tlaku, kdy dle zadání $p_2 = \frac{3}{2}p_1$ a $V_2 = V_1$. Teplotu T_2 určíme ze stavové rovnice pro izochorický děj:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow T_2 = T_1\frac{p_2}{p_1} = T_1\frac{\frac{3}{2}p_1}{p_1} = \frac{3}{2}T_1.$$

0.5 bodu

Druhý děj je izotermícká expanze, tedy $T_3 = T_2 = \frac{3}{2}T_1$. Dále dle zadání platí, že $V_3 = 3V_1$. Tlak p_3 určíme ze stavové rovnice pro izotermický děj:

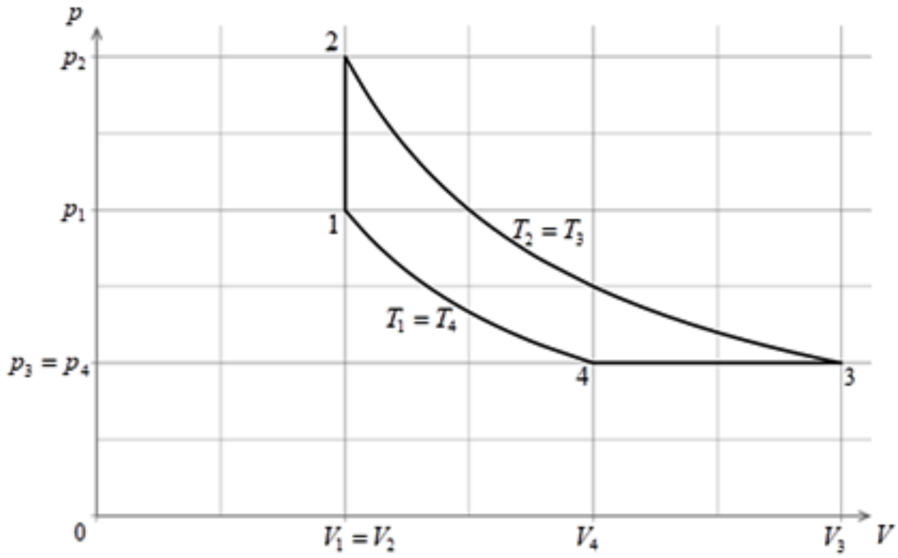
$$p_2V_2 = p_3V_3 \Rightarrow p_3 = p_2\frac{V_2}{V_3} = \frac{3}{2}p_1\frac{V_1}{3V_1} = \frac{1}{2}p_1.$$

0.5 bodu

Třetím dějem je izobarická komprese, během které se objem sníží na hodnotu $V_4 = \frac{2}{3}V_3 = \frac{2}{3}3V_1 = 2V_1$. Tlak zůstává zachován, tedy $p_4 = p_3 = \frac{1}{2}p_1$. Teplota T_4 se dle zadání rovná teplotě T_1 (izotermícký děj).

0.5 bodu

b) Celý kruhový děj znázorněný v pV diagramu je ukázán na obrázku 2.



Obr. 2

2 body

c) U prvního děje se práce nekoná. U druhého děje, izotermické expanze, koná plyn práci:

$$W_2' = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = \frac{3}{2} nRT_1 ln \frac{3V_1}{V_1} = \frac{3}{2} nRT_1 \ln 3.$$

U třetího děje konají práci vnější síly, plyn práci přijímá. Plyn vykonal zápornou práci:

$$W_3' = p_4(V_4 - V_3) = \frac{1}{2} p_1(2V_1 - 3V_1) = -\frac{1}{2} p_1 V_1 = -\frac{1}{2} nRT_1.$$

Poslední děj je izotermický a práci konají opět vnější síly. Práce plynu je opět záporná:

$$W_4' = nRT_4 \ln \frac{V_1}{V_4} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{2V_1} = nRT_1 \ln \frac{1}{2} = -nRT_1 \ln 2.$$

Práce vykonaná plynem během jednoho cyklu kruhového děje je:

$$W' = W_2' + W_3' + W_4' = \frac{3}{2} nRT_1 \ln 3 - \frac{1}{2} nRT_1 - nRT_1 \ln 2 = nRT_1 (\frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} - \ln 2).$$

4 body

d) Plyn přijímá teplo u prvního a druhého děje. V případě prvního děje jde o teplo

$$Q_1 = nC_V(T_2 - T_1) = \frac{5}{2} nR \left(\frac{3}{2} T_1 - T_1 \right) = \frac{5}{4} nRT_1.$$

U druhého děje je přijaté teplo rovno vykonané práci:

$$Q_2 = W_2' = \frac{3}{2} nRT_1 \ln 3.$$

Celkové přijaté teplo je:

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{5}{4}nRT_1 + \frac{3}{2}nRT_1 \ln 3 = \frac{1}{2}nRT_1\left(\frac{5}{2} + 3\ln 3\right).$$

1.5 bodu

e) Účinnost kruhového děje je dána vztahem:

$$\eta = \frac{W'}{Q} = \frac{nRT_1(\frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2} - \ln 2)}{\frac{1}{2}nRT_1\left(\frac{5}{2} + 3\ln 3\right)} = \frac{3\ln 3 - 1 - 2\ln 2}{\frac{5}{2} + 3\ln 3} = 0.16.$$

1 bod