Řešení úloh školního kola 67. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2025/2026

Kategorie E a F

FO67EF1-1: Ze Lhoty do Suché *J. Thomas*

a) Luboš jede po větru a vzdálenost $d_1 = 14{,}4\,\mathrm{km}$ ujel za čas $t_1 = 36\,\mathrm{min} = 0{,}60\,\mathrm{h}$, pohyboval se po větru rychlostí

$$v_1 = \frac{14{,}4\,\mathrm{km}}{0{,}60\,\mathrm{h}} = 24\,\mathrm{km/h}.$$ **1 bod**

Podobně Standa ujel za stejnou dobu proti větru vzdálenost $l_1 = d - d_1 = 24\,\mathrm{km} - 14{,}4\,\mathrm{km} = 9{,}6\,\mathrm{km}$ rychlostí

$$v_2 = \frac{9{,}6\,\mathrm{km}}{0{,}60\,\mathrm{h}} = 16\,\mathrm{km/h}.$$ **1 bod**

b) Podle zadání je rychlost po větru v_1 větší o u než rychlost v za bezvětří, rychlosti v_2 naopak o u menší než za bezvětří. Rozdíl $v_1 - v_2$ tak odpovídá $2u$, dostáváme

$$u = \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{24\,\mathrm{km/h} - 16\,\mathrm{km/h}}{2} = 4{,}0\,\mathrm{km/h}.$$

Z v_1 nebo v_2 dopočítáme rychlost v za bezvětří, např.

$$v = v_1 - u = 24\,\mathrm{km/h} - 4{,}0\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{km/h}.$$ **2 body**

c) Luboš do místa druhého setkání ujede celou vzdálenost d ze Lhoty do Suché za čas $d/v_1 = 24\,\mathrm{km}/24\,\mathrm{km/h} = 1{,}0\,\mathrm{h}$ a ještě vzdálenost $d - d_2 = 24\,\mathrm{km} - 4{,}8\,\mathrm{km} = 19{,}2\,\mathrm{km}$ ze Suché zpět do místa setkání za čas $(d - d_2)/v_2 = 19{,}2\,\mathrm{km}/16\,\mathrm{km/h} = 1{,}2\,\mathrm{h}$. Celkem dojede do místa druhého setkání za $1{,}0\,\mathrm{h} + 1{,}2\,\mathrm{h} = 2{,}2\,\mathrm{h} = 132\,\mathrm{min}$. Standa dojel ze Suché do Lhoty za čas $d/v_2 = 24\,\mathrm{km}/16\,\mathrm{km} = 1{,}5\,\mathrm{h} = 90\,\mathrm{min}$ a na ujetí vzdálenosti d_2 rychlostí v_1 do místa setkání potřebuje čas $d_2/v_1 = 4{,}8\,\mathrm{km}/24\,\mathrm{km/h} = 0{,}2\,\mathrm{h} = 12\,\mathrm{min}$. Pro dobu, kterou odpočíval ve Lhotě, tak vychází

$$\Delta t = 2{,}2\,\mathrm{h} - 1{,}5\,\mathrm{h} - 0{,}2\,\mathrm{h} = 0{,}5\,\mathrm{h}$$

nebo v minutách

$$\Delta t = 132\,\mathrm{min} - 90\,\mathrm{min} - 12\,\mathrm{min} = 30\,\mathrm{min}.$$ **3 body**

d) Možné grafické řešení je na obr. 1. **3 body**

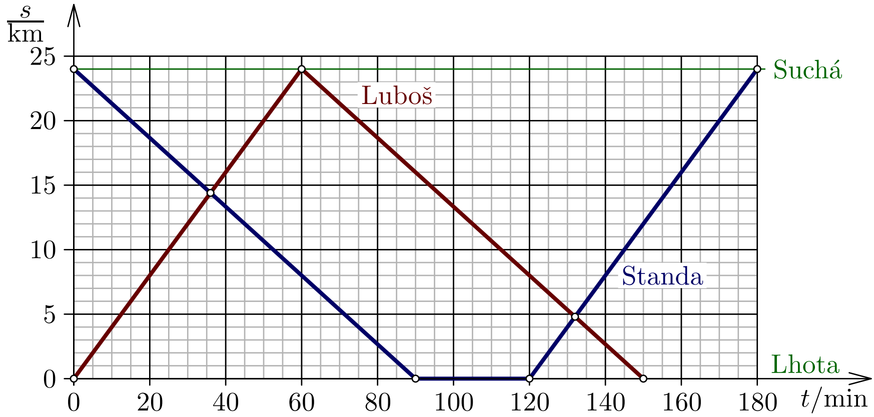
FO67EF1-2: Vesmírný dalekohled Jamese Webba *J. Thomas*

a) V tabulkách nebo na internetu (např. na `https://cs.wikipedia.org/wiki/Rovnostrann%C3%BD_troj%C3%BAheln%C3%ADk` nebo `https://www.vypocitejto.cz/obsah-obvod/rovnostranny-trojuhelnik/`) najdeme, že obsah jednoho rovnostranného trojúhelníka o straně $a = 75\,\mathrm{cm}$ vypočítáme podle vztahu

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3} \cdot (75\,\mathrm{cm})^2}{4} \doteq 2\,435{,}7\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}243\,57\,\mathrm{m}^2.$$ **2 body**

Celková plocha zrcadla pak vychází

$$S = 18 \cdot 6 \cdot S_1 = 18 \cdot 6 \cdot 0{,}243\,57\,\mathrm{m}^2 = 26{,}306\,\mathrm{m}^2 \doteq 26\,\mathrm{m}^2.$$ **2 body**



Obr. 1: Možné grafické řešení k úloze FO67EF1-1

Poznámka: V tabulkách pro ZŠ (Běloun F. a kol., Praha, Prometheus, 2018) najeme i vztah pro výpočet obsahu celého šestiúhelníku s délkou strany a

$$S_6 \doteq 2{,}60a^2 = 2{,}60 \cdot (0{,}75\,\mathrm{m})^2 = 1{,}462\,5\,\mathrm{m}^2.$$

Plochu zrcadla pak bude 18krát větší, tj. $S = 18S_6 = 18 \cdot 1{,}462\,5\,\mathrm{m}^2 = 26{,}325\,\mathrm{m}^2 \doteq 26\,\mathrm{m}^2$.

b) Celková hmotnost zrcadla vychází

$$m = \varrho_{\mathrm{Be}} S h = 1\,850\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 26{,}306\,\mathrm{m}^2 \cdot 0{,}008\,\mathrm{m} \doteq 389{,}33\,\mathrm{kg} \doteq 390\,\mathrm{kg}.$$ **2 body**

c) Hmotnost použitého zlata vychází

$$m_{\mathrm{z}} = 2 \cdot 12 \cdot 12\,\mathrm{g} \cdot 0{,}785 = 226{,}08\,\mathrm{g},$$

jeho objem

$$V = \frac{m_{\mathrm{z}}}{\varrho_{\mathrm{Au}}} = \frac{226{,}08\,\mathrm{g}}{19{,}3\,\mathrm{g/cm^3}} = 11{,}714\,\mathrm{cm}^3.$$ **2 body**

Pro tloušťku zlaté vrstvy pak dostáváme

$$h_{\mathrm{Au}} = \frac{V}{S} = \frac{11{,}714\,\mathrm{cm}^3}{263\,060\,\mathrm{cm}^2} \doteq 0{,}000\,044\,530\,\mathrm{cm} \doteq 0{,}000\,000\,45\,\mathrm{m} = 0{,}45\,\mathrm{\mu m}.$$

2 body

FO67EF1-3: Rychlostní tempo

J. Thomas

a) Z definice rychlostního tempa T vidíme, že při větším T uběhne Markéta kilometr za delší čas a její rychlost bude menší, naopak pro nižší rychlostní tempo bude rychlost větší. Nejmenší rychlost má Markéta během prvního a sedmého kilometru (kdy je její rychlostní tempo největší); hodnota 6 min/km odpovídá rychlosti

$$v_{\min} = \frac{1\,\mathrm{km}}{6\,\mathrm{min}} = \frac{1\,\mathrm{km}}{\frac{1}{10}\,\mathrm{h}} = 10\,\mathrm{km/h}.$$

Největší rychlost má Markéta při nejmenším T, tj. během čtvrtého kilometru, a její hodnota vychází

$$v_{\max} = \frac{1\,\mathrm{km}}{3\,\mathrm{min}} = \frac{1\,\mathrm{km}}{\dfrac{1}{20}\,\mathrm{h}} = 20\,\mathrm{km/h}. \qquad \textbf{2 body}$$

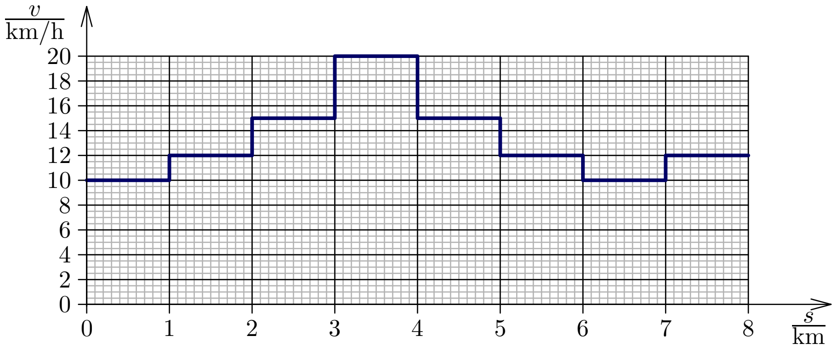
Poznámka: Rychlosti můžeme získat i úvahou: pokud např. při nejmenší rychlosti uběhne 1 km za 6 min, tj. 1/10 h, za hodinu uběhne 10× více, tj. 10 km.

b) Určíme rychlosti během každého uběhnutého kilometru ($v_1 = v_7 = v_{\min}$, $v_4 = v_{\max}$):

$$v_2 = v_6 = v_8 = \frac{1\,\mathrm{km}}{5\,\mathrm{min}} = \frac{1\,\mathrm{km}}{\dfrac{1}{12}\,\mathrm{h}} = 12\,\mathrm{km/h}; \qquad \textbf{1 bod}$$

$$v_3 = v_5 = \frac{1\,\mathrm{km}}{4\,\mathrm{min}} = \frac{1\,\mathrm{km}}{\dfrac{1}{15}\,\mathrm{h}} = 15\,\mathrm{km/h}. \qquad \textbf{1 bod}$$

Příklad grafu závislosti $v = v(s)$ rychlosti na uběhnuté dráze je na obr. 2. **3 body**



Obr. 2: K úloze FO67EF1-3

c) Protože Markéta neběží stálou rychlostí, musíme určit čas jejího běhu na každém úseku zvlášť. Mohli bychom sice časy počítat pomocí rychlostí v jednotlivých kilometrových úsecích, ale jednodušší je použít graf v zadání, podle kterého odečteme, jak dlouho Markéta běžela jednotlivé kilometry tréninkové tratě. Dostáváme

$$t = 6\,\mathrm{min} + 5\,\mathrm{min} + 4\,\mathrm{min} + 3\,\mathrm{min} + 4\,\mathrm{min} + 5\,\mathrm{min} + 6\,\mathrm{min} + 5\,\mathrm{min} = 38\,\mathrm{min}.$$

2 body

d) Průměrnou rychlost získáme jako podíl celkové uběhnuté dráhy $s = 8{,}0\,\mathrm{km}$ a celkového času $t = 38\,\mathrm{min} = \frac{38}{60}\,\mathrm{h}$, vychází

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{8{,}0\,\mathrm{km}}{\dfrac{38}{60}\,\mathrm{h}} \doteq 12{,}632\,\mathrm{km/h} \doteq 13\,\mathrm{km/h}; \qquad (\doteq 3{,}5\,\mathrm{m/s}). \qquad \textbf{1 bod}$$

FO67EF1-4 Plavba v dřevěné bedně *Ľ. Konrád (FO SR), L. Richterek*

a) Objem dřeva V_d určíme z hmotnosti bedny $m = 30\,\mathrm{kg}$ a hustoty dřeva $\varrho = 600\,\mathrm{kg/m^3}$, dostáváme

$$V_\mathrm{d} = \frac{m}{\varrho} = \frac{30\,\mathrm{kg}}{600\,\mathrm{kg/m^3}} = 0{,}050\,\mathrm{m^3}; \qquad (= 50\,\text{litrů})\,. \qquad \textbf{1 bod}$$

Vnější objem bedny spočítáme ze zadaných rozměrů (převedených ideálně na metry), vychází

$$V = abh = 2{,}5\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\cdot 0{,}32\,\mathrm{m} = 0{,}40\,\mathrm{m^3}; \qquad (= 400\,\text{litrů}).$$

Vnitřní objem V_1 bude rozdílem

$$V - V_\mathrm{d} = 0{,}40\,\mathrm{m^3} - 0{,}05\,\mathrm{m^3} = 0{,}35\,\mathrm{m^3}; \qquad (= 350\,\text{litrů})\,. \qquad \textbf{2 body}$$

b) Podle Archimédova zákona bude při plování bedny tíhová síla působící na bednu $F_\mathrm{G} = mg$ rovna vztlakové síle odpovídající objemu kvádru o ploše podstavy $S = ab = 2{,}5\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 1{,}25\,\mathrm{m^2}$ a výšce h_1, tj. $F_\mathrm{vz} = ab\cdot h_1\varrho g$, kde $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ je hustota vody v jezírku. Můžeme psát

$$F_\mathrm{G} = F_\mathrm{vz}, \qquad \Longrightarrow \qquad mg = abh_1\varrho g,$$

odkud vyjádříme hledanou hloubku ponoření bedny

$$h_1 = \frac{m}{ab\varrho} = \frac{30\,\mathrm{kg}}{2{,}5\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}} = 0{,}024\,\mathrm{m} = 2{,}4\,\mathrm{cm}. \qquad \textbf{3 body}$$

c) Oproti případu b) musíme nyní ještě započítat tíhovou sílu působící na Honzu $F_\mathrm{G1} = M_1 g$. Postupně dostáváme

$$F_\mathrm{G} + F_\mathrm{G1} = F_\mathrm{vz}, \qquad \Longrightarrow \qquad mg + Mg = abh_2\varrho g,$$

odkud vyjádříme hledanou hloubku ponoření bedny

$$h_2 = \frac{m + M_1}{ab\varrho} = \frac{30\,\mathrm{kg} + 75\,\mathrm{kg}}{2{,}5\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}} = 0{,}084\,\mathrm{m} = 8{,}4\,\mathrm{cm}.$$

Ponoření bedny se zvětší o $\Delta h = h_2 - h_1 = 8{,}4\,\mathrm{cm} - 2{,}4\,\mathrm{cm} = 6{,}0\,\mathrm{cm}$. **3 body**

d) Maruška má menší hmotnost než Honza, pokud by přistoupila do bedny, ponořila by se méně než o dalších 6,0 cm a celkově by bedna byla ponořena méně než $8{,}4\,\mathrm{cm} + 6{,}0\,\mathrm{cm} = 13{,}4\,\mathrm{cm}$, což je méně než výška bedny, která by se proto nepotopila. **1 bod**

Poznámka: Hloubku ponoření h_3, kdyby přistoupila Maruška, můžeme spočítat přesně; oproti případu c) musíme nyní ještě započítat tíhovou sílu působící na Marušku $F_\mathrm{G2} = M_2 g$. Postupně dostáváme

$$F_\mathrm{G} + F_\mathrm{G1} + F_\mathrm{G2} = F_\mathrm{vz}, \qquad \Longrightarrow \qquad mg + M_1 g + M_2 g = abh_3\varrho g,$$

odkud vyjádříme hledanou hloubku ponoření bedny

$$h_3 = \frac{m + M_1 + M_2}{ab\varrho} = \frac{30\,\mathrm{kg} + 75\,\mathrm{kg} + 50\,\mathrm{kg}}{2{,}5\,\mathrm{m}\cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}} = 0{,}124\,\mathrm{m} \doteq 12\,\mathrm{cm} < h.$$

Bedna se ani s Maruškou nepotopí.

FO67EF1-5: Přehrada Nové Heřminovy *L. Richterek*

a) Na zadržování povodní je plánována kapacita

$$V = 14{,}5\,\text{miliónů}\,\text{m}^3 - 3{,}0\,\text{miliónů}\,\text{m}^3 = 11{,}5\,\text{miliónů}\,\text{m}^3,$$

což odpovídá podílu $11{,}5/14{,}5 \doteq 0{,}793\,1 \doteq 79\,\%$. **1 bod**

b) Srážkový úhrn 1 mm odpovídá množství na $1\,\text{m}^2$, tj. $0{,}001\,\text{m} \cdot 1\,\text{m}^2 = 0{,}001\,\text{m}^3$, pro naměřený denní srážkový úhrn pak vychází $0{,}385\,6\,\text{m}^3$ na m^2. Pro plochu povodí $S = 151\,\text{km}^2 = 151\,000\,000\,\text{m}^2$ pak dostáváme denní objem vody

$$V_1 = 0{,}385\,6\,\text{m}^3/\text{m}^2 \cdot 151\,000\,000\,\text{m}^2 \doteq 58\,226\,000\,\text{m}^3 \doteq 58\,\text{miliónů}\,\text{m}^3.$$

Kapacita nádrže by se naplnila za

$$n = \frac{V}{V_1} = \frac{11{,}5\,\text{miliónů}\,\text{m}^3}{58{,}226\,\text{miliónů}\,\text{m}^3} \doteq 0{,}197\,5\,\text{dne} \doteq 4{,}7\,\text{h}.$$ **3 body**

Dodejme, že srážkové úhrny nejsou stejné v celém povodí, na většině území byly menší, než naměřený extrém. Část vody se také zadrží v půdě a lesních porostech.

c) Pro jednotlivé průtoky $Q_1 = 3{,}55\,\text{m}^3/\text{s}$, $Q_2 = 206\,\text{m}^3/\text{s}$ a $Q_3 = 280\,\text{m}^3/\text{s}$ postupně dostáváme časy naplnění nádrže

$$t_1 = \frac{V}{Q_1} = \frac{11\,500\,000\,\text{m}^3}{3{,}55\,\text{m}^3/\text{s}} \doteq 3\,239\,400\,\text{s} \doteq 37{,}493\,\text{dne} \doteq 37\,\text{dní},$$

$$t_2 = \frac{V}{Q_2} = \frac{11\,500\,000\,\text{m}^3}{206\,\text{m}^3/\text{s}} \doteq 55\,825\,\text{s} \doteq 0{,}646\,1\,\text{dne} \doteq 15{,}507\,\text{h} \doteq 16\,\text{h},$$

$$t_3 = \frac{V}{Q_3} = \frac{11\,500\,000\,\text{m}^3}{280\,\text{m}^3/\text{s}} \doteq 41\,071\,\text{s} \doteq 0{,}475\,4\,\text{dne} \doteq 11{,}409\,\text{h} \doteq 11\,\text{h}.$$

3 body

d) Pro pohybovou energii vody, která za sekundu proteče při průtoku Q_1 korytem řeky rychlostí $v_1 = 5{,}0\,\text{km/h} \doteq 1{,}388\,9\,\text{m/s}$ při hustotě $\varrho = 1\,000\,\text{kg/m}^3$, vychází

$$E_1 = \frac{1}{2}\varrho Q_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\,000\,\text{kg/m}^3 \cdot 3{,}55\,\text{m}^3 \cdot (1{,}388\,9\,\text{m/s})^2 \doteq 3\,424{,}1\,\text{J} \doteq 3{,}4\,\text{kJ}.$$

Podobně pro pohybovou energii cyklisty s kolem o hmotnosti $m = 80\,\text{kg}$ jedoucího rychlostí $v_2 = 15\,\text{km/h} \doteq 4{,}166\,7\,\text{m/s}$ dostáváme

$$E_2 = \frac{1}{2} m v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 80\,\text{kg} \cdot (4{,}166\,7\,\text{m/s})^2 \doteq 694{,}46\,\text{J} \doteq 690\,\text{J}.$$

Vidíme, že $E_1/E_2 \doteq 4{,}9$, energie vody je téměř $5\times$ větší. **3 body**.

Poznámka: Další údaje o plánované přehradě lze nalézt na stránkách `https://prehradanoveherminovy.cz`. V úloze se dopouštíme určitého zjednodušení, protože oblast v okolí horské chaty Švýcárna nepatří k povodí Opavy (potažmo Odry), ale k povodí Desné (potažmo Moravy a Dunaje). Dva ze tří hlavních toků tvořících Opavu (Bílá a Střední Opava) však pramení poměrně blízko, na jiné straně nejvyššího vrcholu Jeseníků Pradědu (necelé 3 km a 2 km od Švýcárny). Při plnění nádrže pak nikdy nevyužíváme všechnu vodu, která přiteče, vždy musí být zachován alespoň minimální odtok.

FO67EF1-6 Běh na věž *J. Thomas*

Převeďme časy běžců na sekundy: $t_\mathrm{M} = 8\,\mathrm{min}\ 16\,\mathrm{s} = 496\,\mathrm{s}$, $t_\mathrm{D} = 9\,\mathrm{min}\ 30\,\mathrm{s} = 570\,\mathrm{s}$, $t_\mathrm{Z} = 16\,\mathrm{min}\ 40\,\mathrm{s} = 1\,000\,\mathrm{s}$.

a) Martin při zvedání své hmotnosti $m_\mathrm{M} = 70\,\mathrm{kg}$ do výšky $h = 232\,\mathrm{m}$ vykonal práci

$$W_\mathrm{M} = m_\mathrm{M}gh = 70\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg}\cdot 232\,\mathrm{m} = 159\,152\,\mathrm{J} \doteq 160\,\mathrm{kJ}.$$

Podobně Dan o hmotnosti $m_\mathrm{D} = 85\,\mathrm{kg}$ vykonal práci

$$W_\mathrm{D} = m_\mathrm{D}gh = 85\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg}\cdot 232\,\mathrm{m} = 193\,256\,\mathrm{J} \doteq 190\,\mathrm{kJ}$$

a Zdeněk o hmotnosti $m_\mathrm{Z} = 75\,\mathrm{kg}$ vykonal práci

$$W_\mathrm{Z} = m_\mathrm{Z}gh = 75\,\mathrm{kg}\cdot 9{,}8\,\mathrm{N/kg}\cdot 232\,\mathrm{m} = 170\,520\,\mathrm{J} \doteq 170\,\mathrm{kJ}.$$

Největší práci vykonal závodník s největší hmotností, tedy Dan. **3 body**

b) Pro výkony běžců platí

$$P_\mathrm{M} = \frac{W_\mathrm{M}}{t_\mathrm{M}} = \frac{159\,152\,\mathrm{J}}{496\,\mathrm{s}} \doteq 320{,}87\,\mathrm{W} \doteq 320\,\mathrm{W},$$
$$P_\mathrm{D} = \frac{W_\mathrm{D}}{t_\mathrm{D}} = \frac{193\,256\,\mathrm{J}}{570\,\mathrm{s}} \doteq 339{,}05\,\mathrm{W} \doteq 340\,\mathrm{W},$$
$$P_\mathrm{Z} = \frac{W_\mathrm{Z}}{t_\mathrm{Z}} = \frac{170\,520\,\mathrm{J}}{1\,000\,\mathrm{s}} \doteq 170{,}52\,\mathrm{W} \doteq 170\,\mathrm{W}.$$

Nejvyšší výkon měl také Dan. **3 body**

c) Rychlost stoupání Dana vypočteme podle vztahu $v_\mathrm{D} = h/t_\mathrm{D} = 232\,\mathrm{m}/570\,\mathrm{s} \doteq 0{,}407\,0\,\mathrm{m/s}$, pro Martina $v_\mathrm{M} = h/t_\mathrm{M} = 232\,\mathrm{m}/496\,\mathrm{s} \doteq 0{,}467\,7\,\mathrm{m/s}$. Dan s náskokem $t_1 = 12\,\mathrm{s}$ bude při Martinově startu ve výšce $h_1 = v_\mathrm{D}t_1 = 0{,}407\,0\,\mathrm{m/s}\cdot 12\,\mathrm{s} = 4{,}884\,2\,\mathrm{m}$. Z rozdílu rychlostí $\Delta v = v_\mathrm{M} - v_\mathrm{D} = 0{,}467\,7\,\mathrm{m/s} - 0{,}407\,0\,\mathrm{m/s} = 0{,}060\,7\,\mathrm{m/s}$ vidíme, že Martin uběhne každou sekundu o $0{,}060\,7\,\mathrm{m}$ více než Dan a jeho náskok tak doběhne v čase

$$t_2 = \frac{h_1}{\Delta v} = \frac{4{,}884\,2\,\mathrm{s}}{0{,}060\,7\,\mathrm{m/s}} \doteq 80{,}465\,\mathrm{s} \doteq 80\,\mathrm{s},$$

neboli $80\,\mathrm{s} + 12\,\mathrm{s} = 92\,\mathrm{s}$ od vyběhnutí Dana. K předběhnutí dojde ve výšce

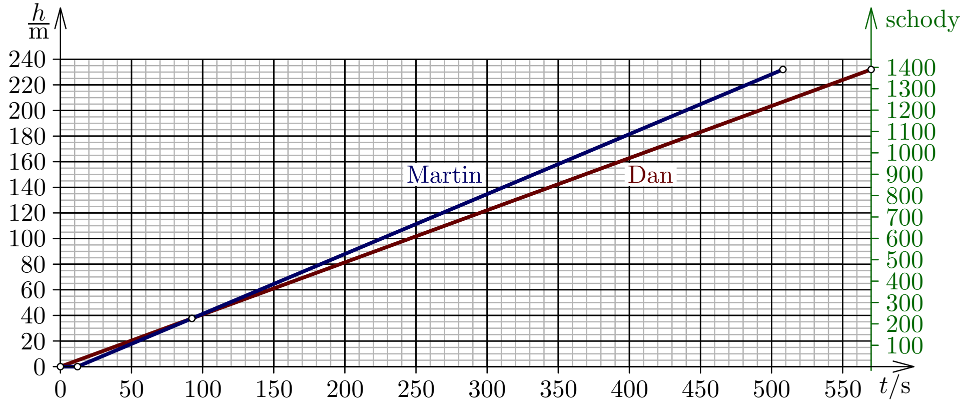
$$h_2 = v_\mathrm{M}t_2 = 0{,}467\,7\,\mathrm{m/s}\cdot 80{,}465\,\mathrm{s} \doteq 37{,}633\,\mathrm{m} \doteq 38\,\mathrm{m}.$$

Při celkovém počtu $n = 1\,390$ schodů je průměrná výška jednoho schodu $h_\mathrm{s} = h/n = 232\,\mathrm{m}/1\,390 \doteq 0{,}166\,9\,\mathrm{m}$. K předběhnutí tedy dojde, když Martin zdolá schodů

$$n_1 = \frac{h_2}{h_\mathrm{s}} = \frac{37{,}633\,\mathrm{m}}{0{,}166\,9\,\mathrm{m}} \doteq 225{,}48 \doteq 225.$$ **4 body**

Část c) je možno řešit i graficky, příklad je na obr. 3.

Poznámka: Číselný výsledek je poměrně citlivý na zaokrouhlování během výpočtu. Pokud řešitelé použijí zaokrouhlené hodnoty rychlosti, můžete se počet schodů, při kterém Martin doběhne Dana lišit až o 2 schody, což doporučujeme při hodnocení tolerovat.



Obr. 3: K úloze FO67EF1-6

FO67EF1-7 Hmotnost dřevěné tyče *ChatGPT, L. Richterek*

a) Hmotnost objemu $V = 1\,\mathrm{litr} = 0{,}001\,\mathrm{m}^3$ vody je $m = \varrho V = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}001\,\mathrm{m}^3 = 1{,}0\,\mathrm{kg}$, 80 % odpovídá $m_1 = 0{,}8m = 0{,}80\,\mathrm{kg}$. Tyč Monika použila jako dvojzvratnou páku, v rovnováze musí být součin hmotnosti a vzdálenosti od místa podpěry stejný pro obě strany (fyzikálně přesněji řečeno, momenty tíhových sil musí být stejné). V prvním případě platí

$$Mx = 0{,}8\,\mathrm{kg} \cdot 20\,\mathrm{cm} = 16\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{cm},$$

ve druhém

$$M\,(x + 10\,\mathrm{cm}) = 0{,}8\,\mathrm{kg} \cdot 40\,\mathrm{cm} = 32\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{cm}.$$

Porovnáním vidíme, že $M \cdot 10\,\mathrm{cm} = 16\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{cm}$ a $M = 1{,}6\,\mathrm{kg}$. Z první rovnice pak dopočteme vzdálenost těžiště tyče od středu

$$x = \frac{16\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{cm}}{M} = \frac{16\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{cm}}{1{,}6\,\mathrm{kg}} = 10\,\mathrm{cm}.$$ **7 bodů**

b) Nyní bude objem vody o 300 ml menší a její hmotnost menší o 0,3 kg. Hmotnost PET lahve s vodou pak vychází $m_2 = 0{,}8\,\mathrm{kg} - 0{,}3\,\mathrm{kg} = 0{,}5\,\mathrm{kg}$. Pro hledanou vzdálenost, kam musí Monika PET lahev zavěsit, nyní platí

$$Mx = 16\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{cm} = m_2 y = 0{,}5\,\mathrm{kg} \cdot y,$$

odkud vyjádříme

$$y = \frac{16\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{cm}}{0{,}5\,\mathrm{kg}} = 32\,\mathrm{cm}.$$ **3 body**

FO67EF1-8 Věžní hodiny *J. Thomas*

a) Konec minutové ručičky urazí vzdálenost odpovídající délce kružnice o poloměru $r_\mathrm{m} = 1{,}5\,\mathrm{m}$ za čas 1,0 h, konec hodinové ručičky opíše kružnici o poloměru $r_\mathrm{h} = 1{,}0\,\mathrm{m}$ za čas 12 h. Pro rychlost koncového bodu minutové ručičky tak dostáváme

$$v_\mathrm{m} = \frac{2\pi \cdot 1{,}5\,\mathrm{m}}{1{,}0\,\mathrm{h}} \doteq 9{,}424\,8\,\mathrm{m/h} \doteq 0{,}009\,4\,\mathrm{km/h} \doteq$$
$$\doteq 0{,}002\,6\,\mathrm{m/s} = 0{,}26\,\mathrm{cm/s} \doteq 0{,}16\,\mathrm{m/min}.$$

2 body

Podobně pro hodinovou ručičku vychází

$$v_\mathrm{h} = \frac{2\pi \cdot 1{,}0\,\mathrm{m}}{12\,\mathrm{h}} \doteq 0{,}523\,6\,\mathrm{m/h} \doteq 0{,}000\,52\,\mathrm{km/h} \doteq$$
$$\doteq 0{,}000\,15\,\mathrm{m/s} = 0{,}015\,\mathrm{cm/s} \doteq 0{,}008\,7\,\mathrm{m/min}.$$

2 body

b) Dráha bude 24× delší než za 1,0 h, tedy

$$s_\mathrm{m} = 24\,\mathrm{h} \cdot 9{,}424\,8\,\mathrm{m/h} \doteq 226{,}20\,\mathrm{m} \doteq 230\,\mathrm{m},$$
$$s_\mathrm{h} = 24\,\mathrm{h} \cdot 0{,}523\,6\,\mathrm{m/h} \doteq 12{,}566\,\mathrm{m} \doteq 13\,\mathrm{m}.$$

1 bod

Poznámka: Dráhy uražené konci ručiček lze také spočítat z jejich poloměru (který určuje obvod kružnice, po které konce ručiček obíhají) a počtu oběhů za den kolem ciferníku (minutová ručička 24×, hodinová 2×). Dostáváme

$$s_\mathrm{m} = 24 \cdot 2\pi r_\mathrm{m} = 24 \cdot 2\pi \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} \doteq 226{,}19\,\mathrm{m} \doteq 230\,\mathrm{m},$$
$$s_\mathrm{h} = 2 \cdot 2\pi r_\mathrm{h} = 2 \cdot 2\pi \cdot 1{,}0\,\mathrm{m} \doteq 12{,}566\,\mathrm{m} \doteq 13\,\mathrm{m}.$$

c) Pokud mají obě ručičky mířit stejným směrem, musí se minutová ručička za hledanou dobu t_1 otočit o jeden oběh (360°) více než hodinová; přitom se za 1,0 min otočí o $360°/60 = 6°$, hodinová o $360°/(12 \cdot 60) = 0{,}5°$, minutová se otočí za minutu více o 5,5°. O celých 360° více se otočí za

$$t_1 = \frac{360°}{5{,}5\,°/\mathrm{min}} \doteq 65{,}455\,\mathrm{min} \doteq 1\,\mathrm{h}\,5\,\mathrm{min}\,27\,\mathrm{s} \doteq 1\,\mathrm{h}\,5{,}5\,\mathrm{min}.$$

3 body

Poznámka: Lze využít i dráhy koncových bodů z předchozích částí s tím, že si představíme ručičky stejně dlouhé a buď rychlost koncového bodu hodinové ručičky 1,5× zvětšíme (obě ručičky budou dlouhé jako minutová), nebo rychlost minutové ručičky 1,5× zmenšíme (obě ručičky budou dlouhé jako hodinová).
Lze použít i následující úvahy: Představme si, že po obvodu hodin jsou kromě čísel odpovídajících hodinám (1–12) i 60 minutových dílků, vždy 5 mezi značkami hodin. Když se malá ručička posune o jeden takový dílek (1/5 h), tak se velká ručička posune o $60/5 = 12$ minut. Za hodinu bude malá ručička ukazovat na 1 a velká ručička bude ukazovat na 12. O další dílek se malá ručička posunout nemůže, protože by velká urazila dalších 12 minut a dostala se za 2. Můžeme tak odhadnout, že se velká ručička posune asi o 5,5 dílku. To znamená, že stejný směr budou zaujímat za 1 h 5,5 min = 1 h 5 min 30 s.

d) V tomto případě se za hledaný čas t_2 minutová ručička musí otočit o 180° více než hodinová, musí platit

$$t_2 = \frac{180°}{5{,}5\,°/\mathrm{min}} \doteq 32{,}727\,\mathrm{min} \doteq 32\,\mathrm{min}\,44\,\mathrm{s}.$$

Z podstaty je zřejmé, že doba bude poloviční než v části c), tuto odpověď lze uznat i bez výpočtu.

2 body

FO67EF1-9 Na vařiči *J. Thomas*

a) Teplo potřebné k ohřátí konvice o hmotnosti $m_\mathrm{k} = 200\,\mathrm{g} = 0{,}2\,\mathrm{kg}$ vychází

$$Q_1 = m_\mathrm{k} c_\mathrm{k}\,(t_\mathrm{v} - t_\mathrm{k}) = 0{,}2\,\mathrm{kg}\cdot 460\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}\cdot(100\,^\circ\mathrm{C} - 20\,^\circ\mathrm{C}) = 7\,360\,\mathrm{J} \doteq 7{,}4\,\mathrm{kJ}.$$

2 body

b) Pro teplo potřebné k ohřátí vody o objemu $V = 1{,}0\,\mathrm{l} = 0{,}001\,\mathrm{m^3}$ a tedy hmotnosti $m = \varrho V = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}\cdot 0{,}001\,\mathrm{m^3} = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ z teploty $t_1 = 8{,}0\,^\circ\mathrm{C}$ k varu analogicky dostáváme

$$Q_2 = mc\,(t_\mathrm{v} - t_1) = 1{,}0\,\mathrm{kg}\cdot 4\,200\,\mathrm{J/(kg\cdot{}^\circ C)}\cdot(100\,^\circ\mathrm{C} - 8{,}0\,^\circ\mathrm{C}) = 386\,400\,\mathrm{J} \doteq 390\,\mathrm{kJ}.$$

2 body

c) Potřebnou energii dodává vařič o výkonu $P = 1\,200\,\mathrm{W}$ za hledaný čas τ, pro který platí $P\tau = Q_1 + Q_2$, odkud vyjádříme

$$\tau = \frac{Q_1 + Q_2}{P} = \frac{7\,360\,\mathrm{J} + 386\,400\,\mathrm{J}}{1\,200\,\mathrm{W}} \doteq 328{,}13\,\mathrm{s} \doteq 330\,\mathrm{s} \quad (\doteq 5{,}5\,\mathrm{min} = 5\,\mathrm{min}\,30\,\mathrm{s}).$$

2 body

d) Podle části c) je potřeba čas $\tau = 328{,}13\,\mathrm{s}$ k přivedení vody v konvici k varu, potom se dodané teplo spotřebovává po dobu $\tau_2 = 20\cdot 60\,\mathrm{s} - 328{,}13\,\mathrm{s} = 871{,}87\,\mathrm{s}$ k přeměně vody na páru. Za tuto dobu se přemění

$$m_2 = \frac{P\tau_2}{l_\mathrm{v}} = \frac{1\,200\,\mathrm{W}\cdot 871{,}87\,\mathrm{s}}{2\,260\,000\,\mathrm{J/kg}} \doteq 0{,}462\,9\,\mathrm{kg\ vody}.$$

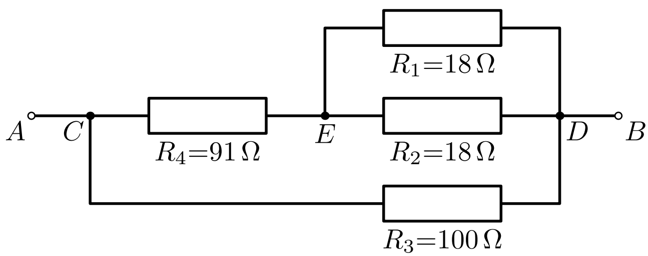
To odpovídá objemu $V_2 = 0{,}462\,9\,\mathrm{l} \doteq 4{,}6\,\mathrm{dl}$ a v konvici by mělo zbýt ještě $5{,}4\,\mathrm{dl} > 3{,}0\,\mathrm{dl}$, což by na jeden šálek čaje mělo stačit. **4 body**

Poznámka: K vypařování vody dochází po celou dobu, ale rezerva na jeden šálek je zde dostatečná (i když takový způsob vaření spojený s návštěvou nelze doporučit jako ideální). Pro kontrolu můžeme odhadnout čas potřebný k přeměně veškeré vody v konvici na páru

$$\tau_3 = \frac{ml_\mathrm{v}}{P} = \frac{1{,}0\,\mathrm{kg}\cdot 2\,260\,000\,\mathrm{J/kg}}{1\,200\,\mathrm{W}} \doteq 1\,883{,}3\,\mathrm{s} \doteq 31\,\mathrm{min}.$$

I z toho lze odhadnout, že za 20 min se více jak 2/3 vody neodpaří/nevyvaří.

FO67EF1-10 Elektrický obvod *J. Thomas*



Obr. 4: K úloze FO67EF1-10

a) K určení celkového odporu Klářina zapojení překreslíme schéma obvodu přehlednějším způsobem podle obr. 4. Rezistory R_1 a R_2 jsou zapojeny paralelně, jejich výsledný odpor R_{12} určíme podle vztahu ze zadání úlohy

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{18\,\Omega \cdot 18\,\Omega}{18\,\Omega + 18\,\Omega} = 9{,}0\,\Omega.$$

K nim je sériově připojený rezistor R_4, takže odpor $R_{124} = R_{12} + R_4 = = 9{,}0\,\Omega + 91\,\Omega = 100\,\Omega$. K této kombinaci je paralelně připojen rezistor R_3, výsledný odpor zapojení tedy vychází

$$R = \frac{R_{124} R_3}{R_{124} + R_3} = \frac{100\,\Omega \cdot 100\,\Omega}{100\,\Omega + 100\,\Omega} = 50\,\Omega.$$ **4 body**

b) Celkový proud mezi body A a B vychází

$$I = \frac{U}{R} = \frac{9\,\mathrm{V}}{50\,\Omega} = 0{,}18\,\mathrm{A} = 180\,\mathrm{mA}.$$

Rezistorem s odporem R_3 prochází proud $I_3 = U/R_3 = 9{,}0\,\mathrm{V}/100\,\Omega = 0{,}09\,\mathrm{A} = = 90\,\mathrm{mA} = I/2$, stejný proud $I_4 = I - I_3 = I/2 = 90\,\mathrm{mA}$ prochází i rezistorem s odporem R_4 (lze jej získat i ze vztahu $I_4 = U/R_{124} = 9{,}0\,\mathrm{V}/100\,\Omega = 0{,}09\,\mathrm{A} = = 90\,\mathrm{mA}$). Proud I_4 se pak větví mezi rezistory R_1 a R_2; protože mají stejný odpor, poteče jimi stejný proud $I_1 = I_2 = I_4/2 = 45\,\mathrm{mA}$. **2 body**

Poznámka: Proudy $I_1 = I_2$ můžeme získat i úvahou, že na dvojici rezistorů R_1 a R_2 připadá napětí $U_{12} = U - R_4 I_4 = 9{,}0\,\mathrm{V} - 91\,\Omega \cdot 0{,}09\,\mathrm{A} = 0{,}81\,\mathrm{V}$. Odtud již dopočítáme $I_1 = U_{12}/R_1 = 0{,}81\,\mathrm{V}/18\,\Omega = 0{,}045\,\mathrm{A}$.

c) Pro celkový výkon platí

$$P = \frac{U^2}{R} = UI = RI^2,$$

takže např.

$$P = UI = 9{,}0\,\mathrm{V} \cdot 0{,}18\,\mathrm{A} = 1{,}62\,\mathrm{W} \doteq 1{,}6\,\mathrm{W}.$$ **2 body**

d) Protože výkon závisí na odporu a na druhé mocnině proudu, bude největší výkon na rezistoru s odporem R_3, tj.

$$P_{\mathrm{max}} = R_3 I_3^2 = 100\,\Omega \cdot (0{,}09\,\mathrm{A})^2 = 0{,}81\,\mathrm{W} = 810\,\mathrm{mW}.$$

Nejmenší výkon bude na stejných rezistorech s odporem $R_1 = R_2$, tj.

$$P_{\mathrm{min}} = R_1 I_1^2 = 18\,\Omega \cdot (0{,}045\,\mathrm{A})^2 = 0{,}036\,450\,\mathrm{W} \doteq 36\,\mathrm{mW}.$$ **2 body**

Poznámka: I když to není po řešitelích požadováno, pro úplnost můžeme dopočítat i výkon na rezistoru s odporem R_4, dostáváme

$$P_4 = R_4 I_4^2 = 91\,\Omega \cdot (0{,}09\,\mathrm{A})^2 = 0{,}737\,1\,\mathrm{W} \doteq 740\,\mathrm{mW}.$$

Vidíme, že $P_{\mathrm{min}} < P_4 < P_{\mathrm{max}}$.

FO67EF1-11 Intenzita osvětlení (experimentální úloha) *N. Martínková*

Úloha seznamuje s intenzitou osvětlení a její závislostí na vzdálenosti zdroje světla od čidla. Měřicí schopnosti luxmetru v telefonu jsou omezené, protože se nejedná o profesionální laboratorní přístroj. Výsledky tak poskytují spíše orientační představu o hodnotách intenzity osvětlení v daných podmínkách.

Úlohu je důležité měřit v co největší tmě, aby nedocházelo ke zkreslování výsledků okolními zdroji světla. Pokud není možné okolní světlo zcela eliminovat, je vhodné použít zástěnu, například dostatečně velkou krabici vyloženou černým papírem, která nežádoucí světlo odrazí nebo pohltí. Pokud v místnosti není úplná tma, měříme intenzitu osvětlení nejen světla dopadajícího ze zvoleného zdroje, ale také z okolí. Pro malé vzdálenosti, kdy jsou hodnoty intenzity vysoké, by nejspíš bylo možné tento faktor zanedbat, při větších vzdálenostech už nikoli.

Hodnota intenzity osvětlení s rostoucí vzdáleností mezi zdrojem a čidlem luxmetru klesá. Pokud dodržíme stejný úhel (světlo dopadá na telefon kolmo), pro intenzitu osvětlení platí vztah

$$E = \frac{\text{konst.}}{d^2},$$

kde d je vzdálenost mezi čidlem a zdrojem a konstanta závisí na svítivosti zdroje. Ve jmenovateli zlomku se tak nachází druhá mocnina vzdálenosti mezi čidlem a zdrojem světla.

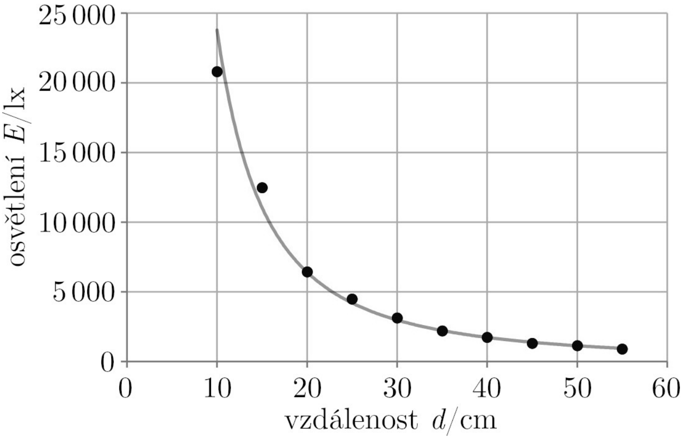
Světlo ze svítilny se šíří do všech směrů, takže na světelné čidlo dopadá jen jeho část. Při měření se může stát, že svítilna bude umístěna mimo rovinu čidla, na které tak dopadá menší část světla. Vliv může mít i natočení baterky, neboť intenzita osvětlení je ovlivněna i úhlem mezi dopadajícími paprsky a normálou (kolmicí) k ploše světelného čidla. Když světlo dopadá ve směru normály, je intenzita osvětlení největší, jinak je její hodnota menší.

Lze také diskutovat o přesnosti určení vzdálenosti mezi zdrojem a světelným čidlem. Počátek, ze kterého světelné paprsky vychází, se obvykle nenachází na hraně svítilny. Nepřesně může být umístěn i počátek metru, jehož poloha se spíše než s rovinou světelného čidla shoduje se středem tloušťky telefonu nebo jeho některým okrajem.

Příklad reálně naměřených hodnot je v následující tabulce.

vzdálenost d/cm	intenzita osvětlení E/lx					průměr E/lx
	měření 1	měření 2	měření 3	měření 4	měření 5	
10	20 729	21 129	20 134	20 863	21 098	20 791
15	12 308	12 470	12 557	12 598	12 388	12 464
20	6 654	6 581	6 480	6 150	6 332	6 439
25	4 475	4 549	4 529	4 393	4 489	4 487
30	3 294	3 152	3 038	2 903	3 196	3 117
35	2 234	2 249	2 145	2 154	2 228	2 202
40	1 830	1 732	1 720	1 641	1 744	1 733
45	1 336	1 347	1 283	1 304	1 274	1 309
50	1 186	1 188	1 094	1 078	1 158	1 141
55	913	894	875	907	896	897

Příklad grafu závislosti intenzity osvětlení na vzdálenosti je na obr. 5.



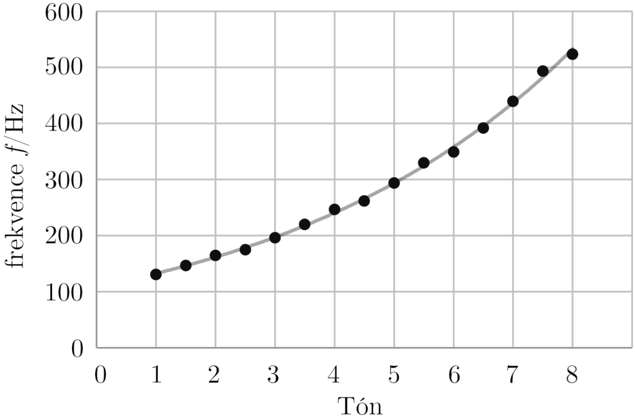
Obr. 5: Graf závislosti osvětlení na vzdálenosti k úloze FO67EF1-11

FO67EF1-12 (experimentální úloha): Frekvence zvuku *N. Martínková*

Úloha pracuje s rozšiřujícím učivem týkajícím se zvuku. Cílem je nalézt závislost frekvence tónu na jeho výšce. K provedení úlohy je třeba jen málo pomůcek, konkrétně telefon a zdroj zvuku, kterým může být hudební nástroj nebo elektronické zařízení, jako je notebook, tablet, či další telefon, skrze které budou přehrávány zvukové záznamy z internetu. Měření frekvence vcelku dobře odpovídají udávaným hodnotám, což řešitelům umožňuje získat jasnou představu o tom, v jakém frekvenčním rozhraní se zkoumané tóny pohybují. Příklad naměřených hodnot:

tón	frekvence/Hz			průměr/Hz
	měření 1	měření 2	měření 3	
C3	130,94	130,76	130,76	130,82
D3	146,98	146,76	146,98	146,91
E3	164,72	164,91	164,73	164,79
F3	174,72	174,72	174,72	174,72
G3	196,14	195,88	196,14	196,05
A3	219,89	220,14	219,89	219,97
H3	247,05	247,05	246,74	246,95
C4	261,67	261,67	261,95	261,76
D4	294,42	293,70	293,34	293,82
E4	329,45	329,45	329,83	329,58
F4	349,02	349,44	349,44	349,30
G4	391,98	391,98	392,44	392,13
A4	439,77	439,77	439,77	439,77
H4	493,61	493,61	493,61	493,61
C5	523,91	523,34	523,91	523,72

V tabulce jsou zaznamenány příklady tří naměřených hodnot frekvence daného tónu a z nich vypočítaného průměru. Díky autokorekci zabudované v aplikaci se hodnoty prvního, druhého a třetího měření odlišují jen nepatrně. Z průměrných hodnot byl vytvořen příklad grafu na obr. 6.



Obr. 6: Závislost frekvence na výšce tónu k úloze FO67EF1-12

Výsledky měření ukazují, že frekvence roste s výškou tónu, ale podle zakřivení spojnice hodnot se nejedná o lineární závislost (jde o příklad exponenciální závislosti, toto pojmenování ale po řešitelích není požadováno). Kdybychom měřili frekvenci u všech tónů včetně zvýšených (snížených) půltónů, bylo by možné ukázat na skutečnost, že podíl dvou po sobě jdoucích (půl)tónů je neměnný, vždy roven hodnotě $\sqrt[12]{2}$.

Přesnost měření může ovlivňovat okolní hluk. I v subjektivně tiché místnosti se může projevit dopravní ruch, šum topení nebo občasné zvuky doléhající z vedlejších pokojů. Při přehrávání tónů záleží také na parametrech místnosti a její akustice. Pokud se zvuk odráží od stěn a předmětů v místnosti, může vznikat akustické zkreslení, které mírně ovlivní naměřenou frekvenci.

Pokud je tón vydáván nástrojem, důležitým faktorem je jeho ladění. Jestliže tón přehráváme zařízením, jako je notebook, telefon aj., pak záleží na kvalitě reproduktoru, který je v něm zabudován. Vliv má i citlivost mikrofonu zabudovaného v telefonu, kterým je frekvence měřena.

Pro přesnější výsledky by bylo vhodné měření provést v brzkých ranních hodinách, kdy v budově i na ulici není většinou tak rušno, a najít co nejlépe odhlučněnou místnost. Pokud je to možné, lze použít externí mikrofon s větší citlivostí. Avšak díky autokorekci zabudované v aplikaci jsou i přes nedokonalé podmínky odchylky naměřených hodnot prakticky zanedbatelné. Řešitelé mají možnost si utvořit poměrně přesnou představu o hodnotách frekvence jednotlivých tónů. I přes nepřesnosti měření, spojnice grafu poměrně dobře vykresluje exponenciální závislost mezi výškou tónu a jeho frekvencí.