Úlohy 1. kola 68. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Není-li uvedeno jinak, v úlohách uvažujte tíhové zrychlení $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1. Kmity ohnuté tyče

Těleso ve tvaru obráceného V je zhotoveno z homogenní tenké tyče délky l a hmotnosti m, ohnuté v jejím středu tak, že její ramena navzájem svírají úhel α. Na ramenech tělesa jsou umístěna stejná závaží o hmotnosti M, přičemž vzdálenosti a jejich těžišť od vrcholu V tělesa jsou stejné. Těleso je ve vrcholu podepřeno tenkou vodorovnou osou O. Po malém vychýlení o úhel φ z rovnovážné polohy v rovině kolmé k ose a následném uvolnění těleso kmitá.

a) Určete vzdálenost r_T těžiště soustavy od osy O. Nakreslete obrázek soustavy uložené na ose v rovnovážné poloze a vyznačte v něm polohu těžiště T_1 pro $m \ll M$ a T_2 pro $m \gg M$.

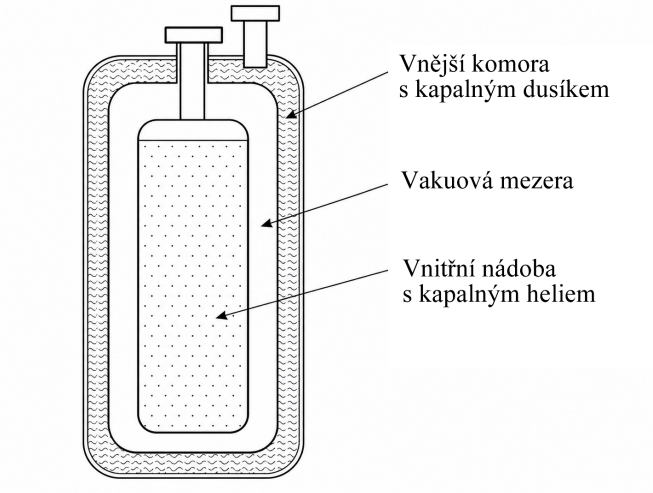
b) Určete periodu T kmitů soustavy jako funkci poměru $x = a/l$. Nakreslete graf funkce $T/T_0 = f(x)$, kde T_0 je perioda kmitů samotné lomené tyče. Pro graf uvažujte $m = M$ a interval $0 \leq x \leq 1/2$, přičemž hodnotu $x = 0$ chápejte jako limitní polohu závaží ve vrcholu tyče. Graf můžete načrtnout ručně nebo sestrojit pomocí vhodného programu. Určete také hodnotu T/T_0 pro $x = 1/2$.

c) Určete kinetickou energii E_k tělesa v okamžiku jeho průchodu rovnovážnou polohou po počátečním vychýlení o úhel φ a uvolnění.

Příčné rozměry tyče, průměr osy a rozměry závaží jsou velmi malé ve srovnání s délkami l a a. Moment setrvačnosti homogenní tenké tyče o hmotnosti m a délce l vzhledem k ose kolmé k tyči a procházející jejím těžištěm je $I = \frac{1}{12}ml^2$.

2. Dewarova nádoba

Ke skladování a přepravě zkapalněných plynů se v laboratořích a v různých kryogenních zařízeních používá tzv. Dewarova nádoba, pojmenovaná podle skotského fyzika a chemika Jamese Dewara, který se zabýval zkapalňováním plynů a jako první zkapalnil kyslík a vodík. Nádoba má dvojité stěny. Z prostoru mezi stěnami je odčerpán vzduch. K přepravě zkapalněného helia s velmi nízkou teplotou varu $T_1 = 4{,}2$ K při normálním tlaku $p_1 = 101$ kPa se používá dvojitá Dewarova nádoba, přičemž ve třetí (vnější) komoře nádoby je kapalný dusík s teplotou varu $T_0 = 77$ K (obr. 1).



Obr. 1

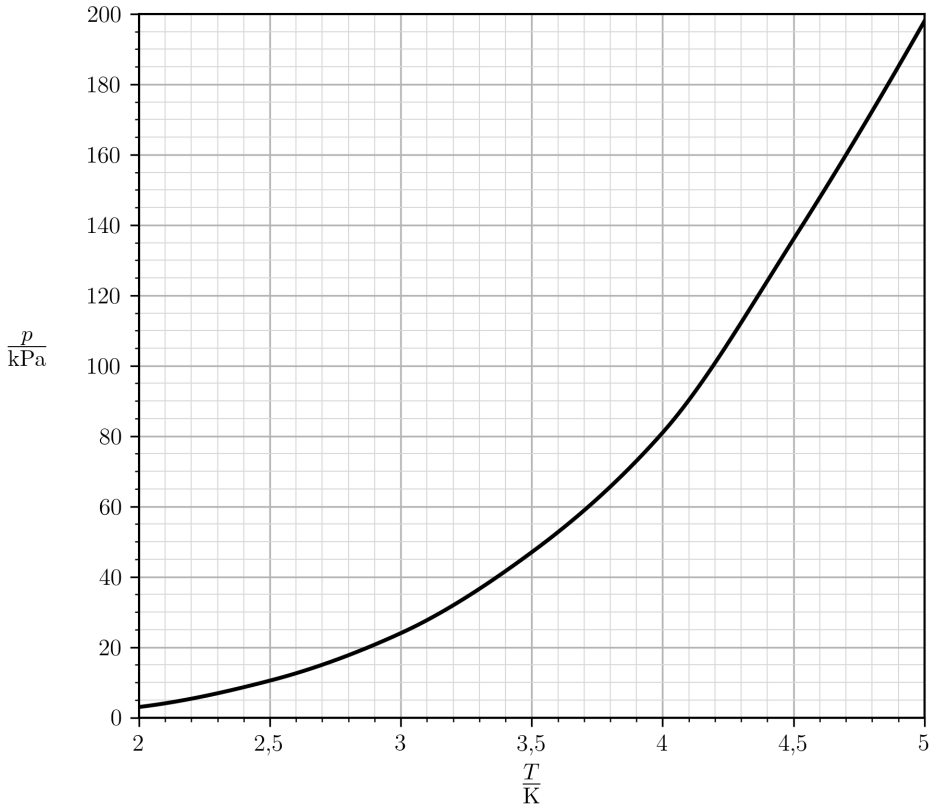
Přenos tepla mezi dusíkem a heliem přes vakuovou mezeru způsobuje vypařování helia. Aby se udržovala konstantní teplota helia, jsou jeho nasycené páry soustavně odsávány z vnitřní nádoby.

a) Vysvětlete, proč se helium vypařuje navzdory vakuové izolaci a chlazení kapalným dusíkem. Jaký význam má vakuová mezera mezi stěnou první komory s heliem a vnitřní stěnou třetí komory s dusíkem? Jakou funkci plní v nádobě kapalný dusík ve třetí komoře? Uvažte, zda malá změna teploty helia podstatně ovlivňuje přenos tepla mezi heliem a dusíkem. Úvahu doložte vhodným výpočtem.

b) V důsledku odsávání klesne tlak páry, a tím i teplota helia. Určete tlak nasycené páry helia při teplotě $T_2 = 4{,}0$ K.

c) Poté zvýšíme objemovou rychlost odsávání páry helia $k = 1{,}5$krát. Určete novou ustálenou teplotu T_3 helia a tlak nasycených par p_3 při této teplotě.

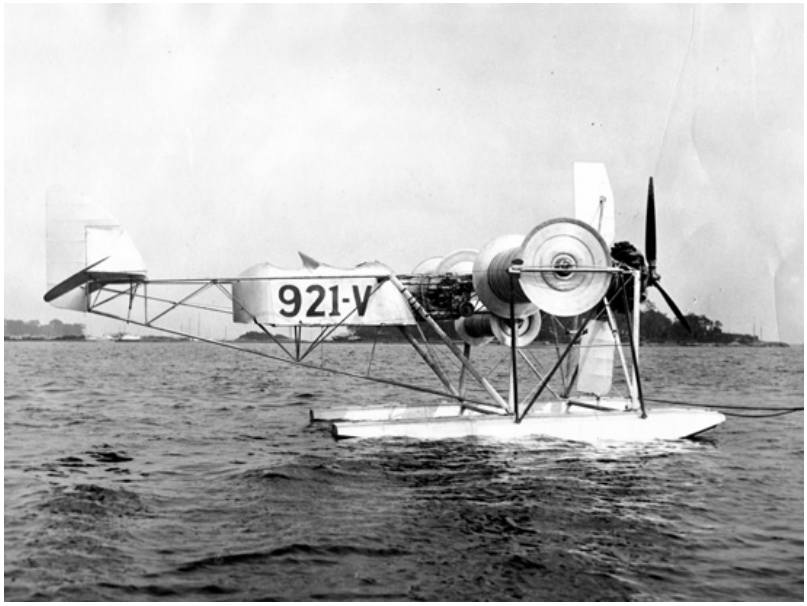
Závislost tlaku nasycené páry helia na teplotě je znázorněna v grafu na obr. 2.



Obr. 2

3. Magnusův jev

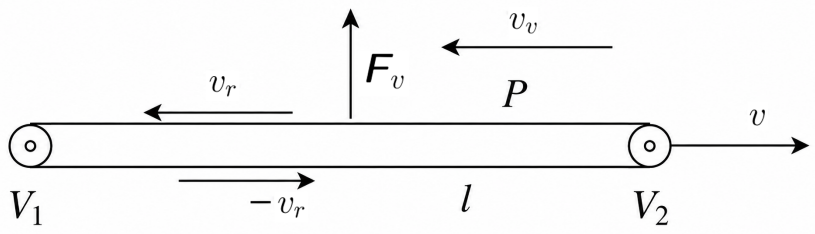
Každý, kdo sleduje míčové sportovní události, zná např. „točené střely“ ve fotbale, topspin ve stolním tenise, liftovaný úder v tenise apod. Po vystřelení rotujícího míče se trajektorie stáčí ve směru rotace. Tohoto jevu si všiml již Isaac Newton v roce 1672 při pozorování hráčů tenisu. První ucelený popis jevu podal až v roce 1852 německý fyzik Heinrich Gustav Magnus, podle něhož byl jev pojmenován – Magnusův jev. Na základě tohoto jevu byl navržen tzv. Flettnerův rotor, jehož základem je rotující válec, na který při jeho pohybu působí tlaková síla kolmá k ose válce a ke směru posuvného pohybu.



Obr. 3

Např. netradiční letadlo Plymouth A-A-2004 z roku 1930, obr. 3, má namísto křídel vodorovné rotující válce, které vytvářejí potřebnou vztlakovou sílu. Pohon vpřed zajišťuje klasická vrtule.

Dynamika vzniku tlakové síly na válec je poměrně složitá. Pro analýzu jevu použijeme zjednodušený model podle obr. 4. Mezi dvěma rotujícími válečky V_1 a V_2, jejichž osy leží ve vodorovné rovině ve vzájemné vzdálenosti l, je pás o šířce L, který se vzhledem k válečkům pohybuje rychlostí v_r. Soustava se pohybuje ve vodorovném směru kolmo k osám válečků rychlostí v ve vzduchu, který je v klidu, avšak vzhledem k soustavě se vzduch pohybuje rychlostí $v_v = -v$. V našem zjednodušeném modelu předpokládejte, že vzduch těsně vně mezních vrstev nad pásem a pod ním proudí rychlostmi o velikostech $(v + v_r)$ a $(|v - v_r|)$ a že tlak na pás lze určit Bernoulliho rovnicí s konstantou odpovídající nerušenému proudu.



Obr. 4

a) S použitím Bernoulliho rovnice určete velikost F_v tlakové síly $\boldsymbol{F}_v$, která působí na soustavu. Určete hodnotu síly F_v pro $l = 1{,}5$ m, $L = 4{,}0$ m, $v = 80\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $v_r = 50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
Německý vědec Martin Wilhelm Kutta a ruský vědec Nikolaj Žukovskij zformulovali matematický model jevu a odvodili vztah pro vztlakovou sílu rotujícího válce. Výsledný vztah pro F_v je stejný jako pro náš zjednodušený model pásu, jestliže délku l pásu nahradíme polovinou obvodu průřezu válce a rychlost v_r obvodovou rychlostí válce.

Uvažujte letadlo podle obr. 3, u něhož vztlakovou sílu vytvářejí dva vodorovné válce o poloměru $r = 30$ cm a délce každého $L = 4{,}0$ m, které jsou poháněny samostatným motorem a dosahují otáček $N = 1\,200\ \mathrm{min}^{-1}$. Hmotnost letadla je $m = 1\,000$ kg. Pohyb vpřed zajišťuje klasická vrtule.

b) Určete rychlost v_{min} letadla při startu, při které se letadlo vznese nad rozjezdovou dráhu.

Úlohu řešte obecně a pak pro dané hodnoty. Hustota vzduchu je $\rho = 1{,}2\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$.

4. Kyvadlo a čočka

Malá žárovka je zavěšena na tenkých svislých vodičích délky $L = 2{,}5$ m a nachází se ve výšce $H = 70$ cm nad vodorovnou plochou stolu.

a) K dispozici jsou dvě čočky s ohniskovými vzdálenostmi $f_1 = 15$ cm a $f_2 = 20$ cm. Určete výšku h nad stolem, do níž je třeba umístit první nebo druhou čočku tak, aby svislá optická osa čočky procházela bodem závěsu a aby se vytvořil ostrý obraz žárovky na stole.

b) Nakreslete chod paprsků od žárovky k zaostřenému obrazu na stole pro výsledky výpočtu v části a) a pro žárovku mírně vychýlenou z rovnovážné polohy.
Žárovce udělíme jemný impuls ve vodorovném směru, takže začne kmitat kolem rovnovážné polohy s amplitudou $x_m = 20$ mm.

c) Určete periodu T pohybu žárovky kolem rovnovážné polohy.

d) Určete maximální rychlost v_{om} pohybu obrazu žárovky na stole v jednotlivých případech a směr pohybu obrazu vzhledem ke směru pohybu žárovky.

Zavěšení žárovky považujte za matematické kyvadlo. Čočky považujte za tenké.

5. Americium ^{241}Am

K napájení elektrických zařízení (nezávislých na připojení k energetické síti) se používají různé zdroje konstantního napětí. Pro některé aplikace jsou zapotřebí zdroje, které dodávají energii po desítky let. Jde zejména o zařízení nedostupná z hlediska trvalého umístění v extrémních podmínkách (hloubkové sondy v oceánech nebo v zemské kůře, majáky, meteorologické sondy, kardiostimulátory) nebo ve velké vzdálenosti (kosmické sondy).

Jedním z takových zdrojů s dlouhou životností jsou zdroje využívající energii uvolněnou při jaderných přeměnách nestabilních radioizotopů. Z ekonomického hlediska je výhodný levnější radioizotop ^{241}Am, který je odpadním produktem jaderných reaktorů. Hlavní jaderná α-přeměna má poločas 432,6 roku a při ní dochází ke vzniku nízkoenergetického γ-fotonu s vlnovou délkou 22,7 pm.

a) Napište rovnici α-přeměny radioizotopu ^{241}Am. Zjistěte, podle které ze čtyř radioaktivních rozpadových řad se jádro izotopu ^{241}Am postupně mění na stabilní jádro. Uveďte názvy prvků, které vznikají během této řady přeměn, poločasy jednotlivých přeměn a výsledný stabilní izotop řady.

b) Nestabilní produkty řady přeměn izotopu ^{241}Am se v přírodě prakticky nevyskytují. Vysvětlete, proč se tyto produkty v přírodě nevyskytují, zatímco produkty jiných rozpadových řad v přírodě existují.
Radioaktivní látky se používají mimo jiné jako zdroje energie. Většinou jde o zdroje tepla, které se využívá buď přímo, nebo se transformuje na elektrickou energii.

c) Určete energii ΔE uvolněnou při α-přeměně jádra ^{241}Am. Určete, jak se uvolněná energie rozdělí mezi produkty reakce. Výsledky vyjádřete v jednotkách eV a v %.

d) Jakou hmotnost čistého ^{241}Am musí mít náplň generátoru, aby jeho tepelný výkon byl $P = 5{,}0$ kW?

e) Během provozu generátoru klesá jeho tepelný výkon a roste jeho β-záření. Určete aktivitu A_α produkce α-částic a A_β produkce β-částic náplně generátoru po $\tau = 20$ letech provozu.

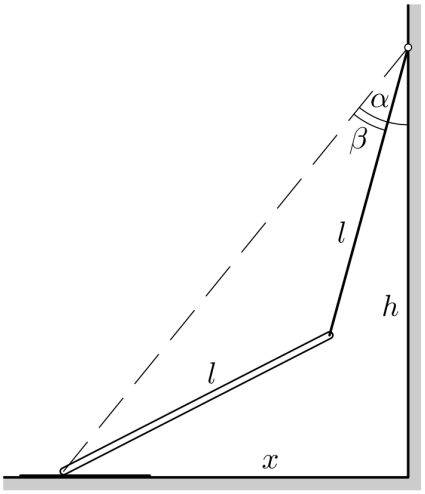
Potřebné konstanty a hodnoty veličin vyhledejte na internetu. Atomové hmotnosti izotopů $m_{\mathrm{Am241}} = 241{,}056\,827$ u, $m_{\mathrm{Np237}} = 237{,}048\,171$ u, $m_{\mathrm{He}} = 4{,}002\,603$ u, hmotnost částice alfa $m_\alpha = 4{,}001\,506$ u.

Poznámka: Při úpravě lze pro $|x| \ll 1$ využít přibližný vztah $e^x \doteq 1 + x$.

6. Praktická úloha: Měření součinitele smykového tření

Pomůcky: dřevěná tyč dlouhá 0,5 m až 1 m, provázek, délkové měřidlo, podložky z různých materiálů (papír, guma, skelný papír aj.).

Provedení úlohy:
Na konec tyče délky l přivážeme provázek stejné délky l a jeho konec připevníme na svislou stěnu do výšky h. Druhý konec tyče položíme na podložku ze zkoumaného materiálu, která leží na podlaze, a podložku zvolna posouváme směrem od stěny. V okamžiku, kdy konec tyče začne klouzat po podložce, změříme jeho vzdálenost x od stěny (obr. 5).



Obr. 5

Úkoly:

1) Úhly α a β vyznačené v obrázku vyjádřete obecně pomocí h a x.

2) Dokažte, že součinitel f smykového tření mezi koncem tyče a podložkou můžeme vypočítat pomocí vztahu

$$f = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\sin 2\beta - \sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{3\sin 2\beta - \sin 2\alpha}.$$

3) Proveďte měření a výpočty pro různé podložky a pro různé výšky bodu upevnění v intervalu $l < h < 2l$. Získané výsledky posuďte.

7. Zahřívání vodiče

Elektrické vodiče (dráty), z nichž se vyrábějí transformátory, venkovní vedení i domovní rozvody, se dimenzují s ohledem na jejich zahřívání při průchodu elektrického proudu. Při výrazném překročení dovolené teploty může dojít k roztavení izolace, ke zkratu mezi sousedními vodiči, případně i k požáru.

a) Stručně uveďte, které fyzikální faktory ovlivňují teplotu elektrického vodiče, kterým prochází elektrický proud. Uveďte alespoň pět faktorů. Jak můžeme tyto faktory ovlivňovat, aby byla teplota vodiče, kterým prochází elektrický proud, co nejnižší? Uvažujte dva přímé homogenní válcové měděné vodiče se stejnou hmotností, jeden o délce $l_1 = 2{,}5$ m a průměru $d_1 = 0{,}50$ mm, druhý o průměru $d_2 = 1{,}0$ mm.

b) Určete poměr

$$p_1 = \frac{S_1}{S_2}$$

obsahů válcových povrchů vodičů.

c) Určete poměr

$$p_2 = \frac{P_1}{P_2}$$

tepelných výkonů, které se ve vodičích uvolňují, prochází-li jimi stejný elektrický proud $I = 2{,}0$ A.

d) Určete poměr

$$p_3 = \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}$$

přírůstků teploty $\Delta t = t - t_0$ povrchu vodičů v ustáleném stavu, prochází-li jimi elektrický proud $I = 2{,}0$ A a nacházejí-li se ve vzduchu o pokojové teplotě $t_0 = 20\,^{\circ}\mathrm{C}$.

Určete poměr

$$p_4 = \frac{q_K}{q_S}$$

plošných hustot výkonu odváděného konvekcí (přestupem tepla) q_K a sáláním q_S. Uvažujte součinitel přestupu tepla mezi vodičem a okolním vzduchem $\alpha_T = 7{,}0\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ a odrazivost povrchu $\alpha_r = 0{,}80$. Předpokládejte, že pro rozdíl $\Delta T = T - T_0$ termodynamické teploty povrchu vodiče T a okolního vzduchu T_0 platí $\Delta T \ll T_0$.

Stefanova–Boltzmannova konstanta je $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$.