APLIKOVANÁ MECHANIKA TEKUTIN
(TURBÍNY, RAKETY, LETADLA)

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Bohumil Vybíral

Obsah

Předmluva **2**

1 Síly při proudění tekutin **3**
1.1 Věta o změně hybnosti proudící tekutiny 3
Příklad 1 – síla při změně směru proudu tekutiny 6
Příklad 2 – působení proudu tekutiny na rovinnou desku 8
1.2 Odporové síly při proudění tekutin 11
1.3 Úlohy ke kapitole 1 12

2 Zařízení založená na změně hybnosti tekutin v příkladech **14**
2.1 Úvod 14
Příklad 3 – Peltonova vodní turbína 14
Příklad 4 – vrtule letadla 18
Příklad 5 – proudový reaktivní motor 19
Příklad 6 – rovnotlaká parní turbína 21
2.2 Úlohy ke kapitole 2 24

3 Pohyb raket **26**
3.1 Pohybová rovnice rakety 26
3.2 Ciolkovského úloha 27
3.3 Vícestupňové rakety 28
Příklad 7 – raketa v gravitačním poli Země 30
3.4 Úlohy ke kapitole 3 31

4 Pohyb letadel **32**
4.1 Letadlo jako těleso o šesti stupních volnosti 32
4.2 Aerodynamické síly působící na křídlo 32
4.3 Let a řízení letadel 35
4.4 Pohon letadel 38

5 Řešení úloh **39**

Literatura **40**

Předmluva

Předložený studijní text *Aplikovaná mechanika tekutin* uzavírá trojici publikací věnovaných tekutinám ([8], [9]). Je zaměřen na silové působení proudících tekutin s aplikacemi na stroje, založené na změně hybnosti tekutin, jakými jsou vodní a tepelné turbíny, proudové motory, vrtule aj. Zvláštní pozornost je věnována raketám a jejich pohybu. Poslední kapitola textu je zaměřena na fyzikální základy letectví.

Výklad je veden s důrazem na fyzikální stránku aplikací, přičemž principy významných strojů jsou vysvětleny formou řešených příkladů, kterých je do textu zařazeno 7. K procvičení je zadáno celkem 7 úloh, přičemž výsledky jejich řešení jsou uvedeny v poslední kapitole publikace. Při výkladu i řešení úloh je v nezbytné míře používán aparát vyšší matematiky – bez něj se při studiu fyziky neobejdete.

Je zajímavé, že v posledním desetiletí se na mezinárodních fyzikálních olympiádách vyskytly dvě úlohy, které patří do tématiky předloženého textu. Jsem přesvědčen, že studium publikace Vám nejen pomůže v soutěži Fyzikální olympiáda, nýbrž poznáte také, že fyzika má nezastupitelnou funkci v moderní společnosti, neboť bez systémů, jejichž principy jsou zde vysvětleny, se neobejde energetika, doprava ani výzkum vesmíru.

1 Síly při proudění tekutin

1.1 Věta o změně hybnosti proudící tekutiny

Tekutinu (tj. kapalinu nebo plyn) lze při zjednodušeném popisu považovat za soustavu velkého počtu hmotných bodů. Při řešení dynamiky tekutin proto vycházíme z druhého Newtonova pohybového zákona pro hmotný bod o hmotnosti m a hybnosti $\boldsymbol{p}$, podle něhož

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F},$$

kde $\boldsymbol{v}$ je okamžitá rychlost bodu a $\boldsymbol{F}$ výslednice sil působících na něj. Budeme-li uvažovat soustavu n hmotných bodů, uplatní se jen vnější síly $\boldsymbol{F}_k$, neboť vnitřní síly mezi jednotlivými body uvnitř soustavy jsou síly vzájemného působení. Pro soustavu jako celek se jejich účinek vyruší. Pohybová rovnice translačního pohybu soustavy, tzv. *první impulsová věta*, má tvar

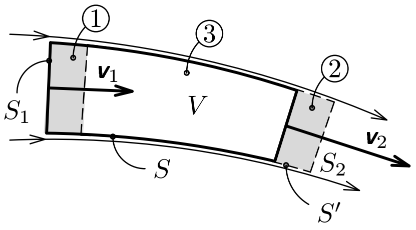
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{v}_k = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k. \tag{1}$$

U tekutiny můžeme zjednodušeně uvažovat, že hmotnost je v objemu V rozložena spojitě s hustotou ϱ. Pak objemový element tekutiny bude mít hmotnost $\mathrm{d}m = \varrho \mathrm{d}V$ a první impulsovou větu (1) lze psát ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V \varrho\boldsymbol{v}\mathrm{d}V = \sum \boldsymbol{F}, \tag{2}$$

kde V je *tekutý objem* (také označovaný jako *kontrolní objem*). Je to určitý objem uvažované tekutiny v čase t. Suma na pravé straně je výslednice vnějších sil působících na tekutinu objemu V.

Pro jednoduchost budeme předpokládat, že pohyb tekutiny je *stacionární* (ustálený). Rychlost proudění bude tedy funkcí pouze místa, tj. v určitém místě prostoru bude stále stejná, i když tímto místem budou procházet různé částice tekutiny. Sledujme nyní stacionární pohyb části tekutiny, která je v daném okamžiku t obsažena v tekutém (kontrolním) objemu V. Tento objem vymezuje *kontrolní plocha* S, která je do sebe uzavřená. Může jít např. o plochu, jejíž rovinný řez je na obr. 1 (obrázek ilustruje případ rovinného proudění, tj. proudění, u něhož je obraz proudění popsaný proudnicemi ve všech rovinách stejný). Na obrázku je kontrolní plocha S vymezena částí proudové trubice se vstupním průřezem o obsahu S_1 a výstupním průřezem o obsahu S_2.



Obr. 1 Část proudící tekutiny omezená uzavřenou plochou S a změna její polohy za dobu $\mathrm{d}t$ omezená uzavřenou plochou S'

V čase $t + \mathrm{d}t$ bude tekutina zaujímat prostor vymezený uzavřenou plochou S'. Je zřejmé, že v prostoru 3 mezi oběma polohami S, S' nenastane žádná změna hybnosti tekutiny, neboť tento prostor obsahuje částice tekutiny, jež mají nezměněnou rychlost, která je funkcí jen polohy (uvažovaný pohyb je stacionární). Částice v elementárních částech prostoru 1 a 2 již k původnímu prostoru nenáležejí. Prostor 1 vyplňují nové částice, které nechť mají rychlost $\boldsymbol{v}_1$ a objemovou hustotu ϱ_1. Prostor 2 vyplňují sice původní částice, které však mají jinou rychlost $\boldsymbol{v}_2$ a objemovou hustotu ϱ_2. Celková změna hybnosti za časový interval $\mathrm{d}t$ bude tedy dána rozdílem hybností částic v elementárních prostorech 2 a 1:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \mathrm{d}\boldsymbol{p}_2 - \mathrm{d}\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{v}_2 \mathrm{d}m_2 - \boldsymbol{v}_1 \mathrm{d}m_1 = \boldsymbol{v}_2 \varrho_2 S_2 v_2 \mathrm{d}t - \boldsymbol{v}_1 \varrho_1 S_1 v_1 \mathrm{d}t.$$

Pak věta (1) o změně hybnosti proudící tekutiny, neboli *pohybová rovnice tekutiny* zní

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_2 \varrho_2 S_2 v_2 - \boldsymbol{v}_1 \varrho_1 S_1 v_1 = Q_{\mathrm{m}2} \boldsymbol{v}_2 - Q_{\mathrm{m}1} \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1 = \sum \boldsymbol{F}, \qquad (3)$$

kde $Q_\mathrm{m} = \varrho S v$ je *hmotnostní tok* v určitém místě proudové trubice a

$$\boxed{\boldsymbol{H} = Q_\mathrm{m} \boldsymbol{v}} \qquad (4)$$

je *tok hybnosti tekutiny*, který má zřejmě rozměr síly.

Výraz na levé straně rovnosti (2) a (3) představuje úhrnný tok $\boldsymbol{H}$ hybnosti tekutiny vymezené kontrolním objemem V.

Kontrolní plochu S, která vymezuje uvažovaný tekutý objem V, považujme v daném okamžiku za nehybnou. Na obr. 2 jsou znázorněny čtyři technicky důležité případy vymezení kontrolní plochy:

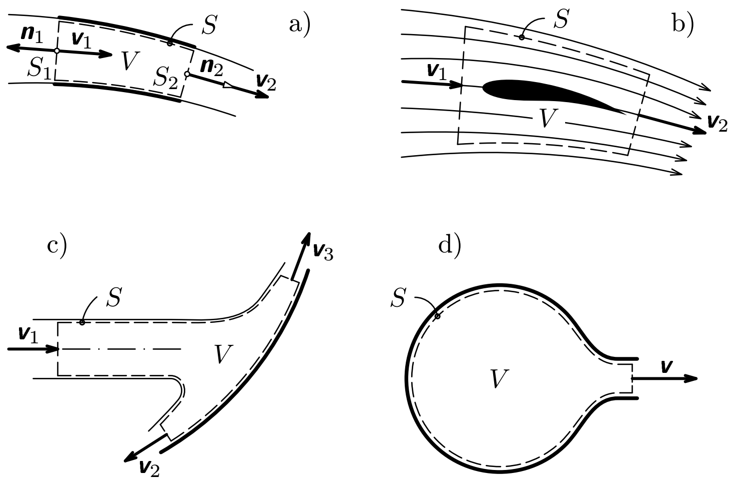
1. Tekutina tělesem (např. potrubím nebo kanálem dýzy v turbíně) protéká (obr. 2a).

2. Uvnitř kontrolní plochy je těleso (např. křídlo letadla) tekutinou obtékáno (obr. 2b).

3. Těleso (např. lopatka turbíny) je obtékáno jen částečně (obr. 2c).

4. Z nádoby vytéká tekutina, aniž do ní vtéká tekutina nová (obr. 2d).

V případech a), c), d) tvoří kontrolní plochu zčásti přímo stěny obtékaného tělesa nebo nádoby. Kontrolní plocha je volena tak, aby umožňovala co nejjednodušší výpočet toku hybnosti, jak si ukážeme na příkladech 1, 2 a 4.



Obr. 2 Různé případy vymezení tekutého objemu V uzavřenou kontrolní plochou S

Vnější síly, které přicházejí v úvahu při použití rovnice (4), můžeme rozdělit do tří skupin:

1. *Tlaková síla*, formálně působící na kontrolní plochu, je určena tlakem ostatní tekutiny a okolního prostředí

$$\boldsymbol{F}_1 = -\oint_S p\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\oint_S p\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S. \tag{5}$$

Záporné znaménko je dáno tím, že tlaková síla působí proti směru vnější normály $\boldsymbol{n}$ k plošce $\mathrm{d}S$.

2. *Objemová síla*, která je dána působením vnějšího pole o intenzitě $\boldsymbol{G}$ na hmotnost tekutiny v kontrolním objemu. Platí pro ni

$$\boldsymbol{F}_2 = \int_V \varrho \boldsymbol{G}\,\mathrm{d}V. \tag{6}$$

Na povrchu Země jde vesměs o působení tíhového pole ($\boldsymbol{G} = \boldsymbol{g}$); ve většině případů ji lze zanedbat.

3. Síly $\boldsymbol{F}_3$, kterými působí *protékaná* nebo *obtékaná tělesa* uvnitř kontrolní plochy (např. stěny trubice, nosné plochy, lopatky turbíny) na tekutinu. Podle principu akce a reakce naopak tekutina působí na tato tělesa silou

$$\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{F}_3. \tag{7}$$

Síla $\boldsymbol{R}$, která popisuje silový účinek tekutiny na protékaná nebo obtékaná tělesa, nás zajímá zpravidla při řešení různých úloh, jak bude zřejmé z následujících příkladů.

V případech, které jsou významné pro technické aplikace (viz např. obr. 2), se pro řešení pro jednoduchost předpokládá, že hustota ϱ tekutiny se mění tak málo, že vliv její změny na tok hybnosti můžeme zanedbat (viz rovněž poznámku 3 na str. 18). Proto uvažujeme, že pro tekutinu (i plyn) v kontrolním objemu je $\varrho = konst.$. V případech znázorněných v obr. 2 neproudí tekutina do kontrolního objemu všemi body kontrolní plochy. Tak např. v příkladu na obr. 2a tekutina vstupuje do kontrolního objemu V částí S_1 kontrolní plochy S a vystupuje částí S_2. Budeme-li předpokládat, že ve všech bodech průřezu S_1 má rychlost opačný směr než normála $\boldsymbol{n}_1$ a je $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{konst}.$ a obdobně ve všech bodech průřezu S_2 má rychlost stejný směr jako normála $\boldsymbol{n}_2$ a je $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{konst}.$, můžeme významně zjednodušit výpočet. Za předpokladu, že se v tekutém objemu hustota nezmění ($\varrho = konst.$), dostaneme $(-\varrho S_1 v_1)\boldsymbol{v}_1 + (\varrho S_2 v_2)\boldsymbol{v}_2$. Protože pro uvažovaný případ platí rovnice kontinuity ve tvaru $S_1 v_1 = S_2 v_2$, bude mít *pohybová rovnice* (3) tvar

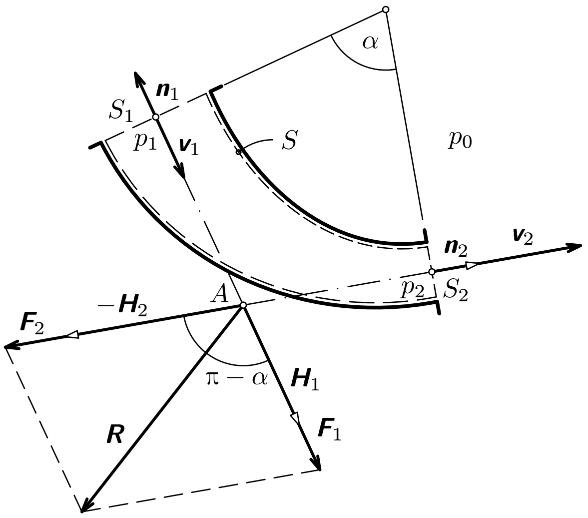
$$\boxed{\varrho S_1 v_1(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) = \sum \boldsymbol{F}}\,, \quad \text{resp.} \quad \boxed{\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1 = \sum \boldsymbol{F}}\,, \tag{8}$$

kde $\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1$ je úhrnný tok hybnosti kontrolní plochou S, přičemž *hmotnostní tok tekutiny kontrolním objemem* je $\varrho S_1 v_1 = \varrho S_2 v_2 = Q_\mathrm{m}$.

Příklad 1 – síla při změně směru proudu tekutiny

Určete sílu $\boldsymbol{R}$, kterou působí proud nestlačitelné tekutiny o hustotě ϱ na nehybné vodorovné koleno potrubí, v němž se směr toku změní o úhel α. Ve vstupním průřezu S_1 nechť je rychlost $\boldsymbol{v}_1$ a tlak p_1, ve výstupním průřezu S_2 je tlak p_2. Vnější tlak vzduchu je p_0.

Vedle obecného zadání řešte pro metan o tlaku $p = 2{,}50 \cdot 10^5$ Pa a teplotě $t = 20{,}0$ °C, jež se dopravuje potrubím o konstantním průměru $d = 200$ mm tak, že objemový tok $Q_\mathrm{V} = 3{,}00\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$. Atmosférický tlak $p_0 = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa. Je známa molární hmotnost metanu $M_\mathrm{m} = 16{,}04 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$. Vypočtěte sílu $\boldsymbol{R}$, kterou působí proudící metan na pravoúhlé koleno potrubí. Jaký je vztah mezi složkou $\boldsymbol{H}$ (danou změnou hybnosti toku) a silou $\boldsymbol{F}$ (danou statickým tlakem)? Metan považujte při proudění za nestlačitelnou tekutinu. Vliv odstředivé síly popisuje právě změna toku hybnosti $\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2$, tření skutečné tekutiny o stěny potrubí zanedbejte.



Obr. 3 K výpočtu síly $\boldsymbol{R}$, kterou působí tekutina na koleno

Řešení

Nejprve vymezíme kontrolní plochu S, kterou tvoří stěny kolena, vstupní a výstupní průřez (obr. 3). Velikost rychlosti ve výstupním průřezu určíme užitím rovnice kontinuity:

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 .$$

Hmotnostní tok ve vstupním průřezu je $Q_{\mathrm{m1}} = \varrho S_1 v_1$, ve výstupním průřezu $Q_{\mathrm{m2}} = \varrho S_2 v_2 = \varrho S_1 v_1 = Q_{\mathrm{m1}}$. Tok hybnosti v průřezech S_1 a S_2 je

$$\boldsymbol{H}_1 = Q_{\mathrm{m1}} \boldsymbol{v}_1 = \varrho S_1 v_1 \boldsymbol{v}_1, \qquad \boldsymbol{H}_2 = Q_{\mathrm{m2}} \boldsymbol{v}_2 = \varrho S_1 v_1 \boldsymbol{v}_2 .$$

Úhrnný tok hybnosti je $\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1$. Na kontrolní objem tekutiny působí tlakové síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, o nichž rozhoduje přetlak tekutiny vzhledem k atmosférickému tlaku p_0 v příslušných průřezech S_1, S_2:

$$\boldsymbol{F}_1 = -(p_1 - p_0) S_1 \boldsymbol{n}_1, \qquad \boldsymbol{F}_2 = -(p_2 - p_0) S_2 \boldsymbol{n}_2, \qquad \boldsymbol{F}_3 = -\boldsymbol{R},$$

kde $\boldsymbol{F}_3$ je síla, kterou působí stěny kolena na tekutinu a $\boldsymbol{R}$ je hledaná síla reakce na sílu $\boldsymbol{F}_3$. Pohybová rovnice (8) bude mít tvar

$$\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3,$$

neboli

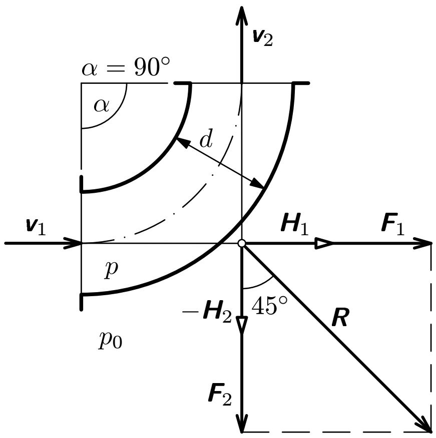
$$\varrho S_1 v_1 (\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) = -(p_1 - p_0) S_1 \boldsymbol{n}_1 - (p_2 - p_0) S_2 \boldsymbol{n}_2 - \boldsymbol{R}.$$

Odtud síla $\boldsymbol{R}$, kterou působí tekutina na koleno

$$\boldsymbol{R} = \varrho S_1 v_1 (\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) - (p_1 - p_0) S_1 \boldsymbol{n}_1 - (p_2 - p_0) S_2 \boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2.$$

Je dána vektorovým součtem vektorů $\boldsymbol{H}_1$, $-\boldsymbol{H}_2$ a vektorů tlakových sil $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, jak je zřejmé z obr. 3.

V zadaném konkrétním případě je



Obr. 4 K výpočtu síly, kterou působí plyn na pravoúhlé koleno

$$|\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_2| = v = \frac{4Q_\mathrm{V}}{\pi d^2}, \quad \varrho = \frac{M_\mathrm{m} p}{RT},$$

$$|\boldsymbol{H}_1| = |\boldsymbol{H}_2| = |\boldsymbol{H}| =$$

$$= \varrho \frac{\pi d^2}{4} v^2 = \frac{M_\mathrm{m} p}{RT} \cdot \frac{4Q_\mathrm{V}^2}{\pi d^2},$$

$$|\boldsymbol{F}_1| = |\boldsymbol{F}_2| = |\boldsymbol{F}| = (p - p_0) \frac{\pi d^2}{4}.$$

Pak (viz obr. 4)

$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{2}(|\boldsymbol{F}| + |\boldsymbol{H}|),$$

$$R = \sqrt{2} \left[(p - p_0) \frac{\pi d^2}{4} + \frac{4 M_\mathrm{m} p\, Q_\mathrm{v}^2}{RT \pi d^2} \right],$$

$R = 7\,330$ N,

$$\frac{|\boldsymbol{H}|}{|\boldsymbol{F}|} = \frac{p M_\mathrm{m}}{(p - p_0) RT} \cdot \left(\frac{4Q_\mathrm{V}}{\pi d^2} \right)^2 = 0{,}100.$$

Příklad 2 – působení proudu tekutiny na rovinnou desku

Určete sílu $\boldsymbol{R}$, kterou působí vodorovný proud tekutiny o rychlosti $\boldsymbol{v}_1$ a o hmotnostním toku Q_m na svislou rovinnou desku, jejíž normála má směr rychlosti $\boldsymbol{v}_1$.

Deska je kruhová a její poloměr je mnohem větší než poloměr proudu tekutiny. Vliv tíhové síly na rychlost tekutiny po jejím dopadu na desku zanedbejte. Řešte tyto případy:

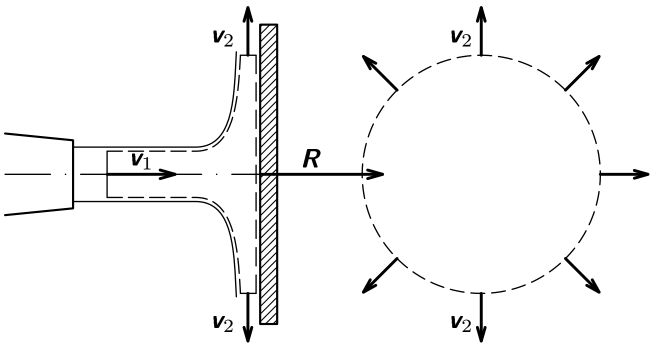
a) Deska je nehybná – síla $\boldsymbol{R}_a$.

b) Deska se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{u}$ ($u < v_1$), jejíž směr je stejný jako směr rychlosti $\boldsymbol{v}_1$ – síla $\boldsymbol{R}_b$.

c) Vypočtěte výkon síly $\boldsymbol{R}_b$ při působení na desku v případě ad b) a stanovte, při jaké rychlosti $\boldsymbol{u}_\mathrm{m}$ desky bude tento výkon největší.

Řešení

a) Vymezení kontrolní plochy je zřejmé z obr. 5, na němž je znázorněn nárys a bokorys situace.



Obr. 5 K výpočtu síly $\boldsymbol{R}$, kterou působí proud tekutiny na desku

Vstupní tok hybnosti je $\boldsymbol{H}_1 = Q_\mathrm{m}\boldsymbol{v}_1$, výstupní tok hybnosti je $\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{0}$, protože zanedbáváme vliv tíhy a předpokládáme, že po dopadu na desku se proud tekutiny rovnoměrně rozptýlí na všechny strany kolmo ke směru vstupní rychlosti $\boldsymbol{v}_1$. Vektorový součet jednotlivých elementů výstupního toku hybnosti tak dá nulovou velikost. Pohybová rovnice (8) se redukuje do tvaru

$$\boldsymbol{R}_a = Q_\mathrm{m}\boldsymbol{v}_1.$$

b) Bude-li se deska pohybovat rychlostí $\boldsymbol{u}$ ve směru dopadu tekutiny, nebude výsledný tok hybnosti na odtoku nulový. Složky toku hybnosti ve směru roviny desky se sice vzájemně ruší, avšak tok hybnosti má ještě složku $\boldsymbol{H}_u = Q_\mathrm{m}\boldsymbol{u}$ ve směru pohybu desky. Pak síla, kterou působí proud tekutiny na desku, je

$$\boldsymbol{R}_b = Q_\mathrm{m}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{u}).$$

c) Výkon síly $\boldsymbol{R}_b$ při působení na pohyblivou desku pro $\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{u}$ zřejmě je

$$P = \boldsymbol{R}_b \cdot \boldsymbol{u} = Q_\mathrm{m}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} = Q_\mathrm{m}(v_1 - u)u.$$

Tento výkon nabude extrémní velikosti pro rychlost $\boldsymbol{u}$, pro niž

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}u} = Q_\mathrm{m}(v_1 - 2u) = 0.$$

Protože $Q_\mathrm{m} \neq 0$, a $\dfrac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}u^2} = -2Q_\mathrm{m} < 0$ nastane lokální maximum pro

$$u_\mathrm{m} = \frac{v_1}{2}, \tag{9}$$

tedy bude-li se deska pohybovat rychlostí, která je polovinou rychlosti tekutiny.

Uvedená úvaha platí přísně vzato *jen pro lopatkové kolo*, u něhož se lopatka nachází v bezprostřední blízkosti trysky a když se oddálí, nahradí ji jiná lopatka (viz příklad 3). U trvale se vzdalující jediné desky, jak vyplývá ze zadání příkladu 2, roste délka sloupce tekutiny tryskající z trubice, takže za jednotku času dopadá na desku menší hmotnost tekutiny, než je uvažovaný hmotnostní tok $Q_\mathrm{m} = \varrho S\ v$. Neuvažujeme-li zakřivení paprsku vlivem tíhy, roste délka paprsku v důsledku ústupové rychlosti $\boldsymbol{u}$, a na desku dopadne za sekundu hmotnost daná rozdílovou rychlostí $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$, tj. $Q'_\mathrm{m} = \varrho S(v - u)$. Pak korigovaná výsledná síla a výkon jsou dány vztahy

$$R'_b = Q'_\mathrm{m}(v - u) = \varrho S\ (v - u)^2,$$
$$P' = R'_b u = \varrho S\ (v - u)^2 u.$$

Pro tento výkon nastává extrém za podmínky

$$\frac{\mathrm{d}P'}{\mathrm{d}u} = \varrho S(3u^2 - 4vu + v^2) = 3\varrho S(u - v)(u - \frac{v}{3}) = 0.$$

Zda je extrém maximem nebo minimem, zjistíme pomocí druhé derivace

$$\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}u^2} = \varrho S\ (6u - 4v).$$

Podmínka nulové první derivace je splněna pro dva kořeny rychlosti u. Je-li $u = v$, je $P' = 0$ a $P'' = 2\varrho S v > 0$, jde o minimum. Pro druhý kořen

$$u'_\mathrm{m} = \frac{v}{3} \tag{10}$$

je $P'' = -\varrho S v < 0$. Druhý kořen tedy dává pro jedinou vzdalující se desku maximální výkon

$$P'_{\mathrm{m}} = \frac{4}{27}\varrho S v^3.$$

1.2 Odporové síly při proudění tekutin

Při relativním pohybu pevného tělesa a reálné tekutiny působí tekutina na těleso *odporovou silou*. Obtékání pevných těles tekutinami je velmi složitý jev, který ovlivňuje především relativní rychlost $\boldsymbol{v}$ tělesa a tekutiny. Podrobně o odporových silách pojednává text [6], proto zde uvedeme jen přehled těchto sil.

a) Při velmi malých rychlostech je obtékání tělesa *laminární*, při němž se tekutina v okolí tělesa nepromíchává – proudnice tekutiny jsou vrstevnatě rozloženy. Pak je odporová síla přímo úměrná první mocnině rychlosti. Platí pro ni

$$\boldsymbol{F}_0 = -A\boldsymbol{v}, \tag{11}$$

kde konstanta A závisí na tvaru tělesa a na vlastnostech (dynamické viskozitě η) tekutiny. Pro kouli o poloměru r je $A = 6\pi\eta r$.

b) Při překročení určité kritické rychlosti se laminární proudění mění na *turbulentní*, při kterém se za tělesem tvoří víry. Pohybující se těleso částečně odstraňuje tekutinu před sebou a tím jí předává část své kinetické energie. Odporová síla je úměrná druhé mocnině rychlosti a vyjadřuje se ve tvaru

$$\boldsymbol{F}_0 = -\frac{1}{2}C\varrho S v^2 \boldsymbol{v}^0, \tag{12}$$

kde ϱ je hustota tekutiny, $\boldsymbol{v}^0$ jednotkový vektor ve směru její rychlosti a S je obsah průřezu tělesa kolmého ke směru rychlosti (označuje se také jako obsah „stínového“ průřezu tělesa). Součinitel odporu C závisí na tvaru tělesa. Pro kouli je $S = \pi r^2$, $C = 0{,}48$.

c) O tom, zda proudění bude laminární či turbulentní (tedy, kdy je použit vzorec (11) a kdy (12)), nás přibližně informuje *Reynoldsovo číslo* (viz např. [6]):

$$Re = \frac{vd}{\nu}, \tag{13}$$

kde d je charakteristický rozměr tělesa (např. průměr koule) a $\nu = \dfrac{\eta}{\varrho}$ kinematická viskozita. Kritická hodnota čísla (13) je $Re_{\mathrm{kr}} \approx 2300$. Pro $Re < Re_{\mathrm{kr}}$

je proudění laminární, pro $Re \geq Re_{\mathrm{kr}}$ turbulentní. Přechod od laminárního proudění k turbulentnímu není zcela jednoznačný. Proto se někdy uvádí přechodová oblast laminárního proudění, která je pro obvyklé případy vymezena intervalem $Re \in (2\,300; 10\,000)$. Pro $Re > 10\,000$ nastává téměř vždy úplné turbulentní proudění v celém objemu tekutiny.

d) Vzrůstá-li rychlost $\boldsymbol{v}$ na hodnoty srovnatelné s rychlostí zvuku c_{z} v tekutině, začíná se uplatňovat vliv tlakových vln v tekutině (viz obr. 17 v [6]). To má za následek vzrůst odporové síly. Součinitel odporu C již není konstanta, nýbrž funkce Machova čísla $M = \dfrac{v}{c_{\mathrm{z}}}$, kde c_{z} je rychlost zvuku v tekutině. Pro $M \leq 0{,}5$ (ve vzduchu za normálních podmínek to odpovídá rychlosti $v \approx 170\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 612\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$) lze vliv tlakových vln zanedbat. Největší hodnota součinitele C je pro $M \approx 1$, pro $M \geq 1$ vzniká při pohybu balistická tlaková vlna, která má tvar kužele o vrcholovém úhlu 2γ, přičemž $\sin\gamma = \dfrac{c_{\mathrm{z}}}{v} = \dfrac{1}{M}$. Balistická tlaková vlna se projevuje třeskem (je slyšitelný např. při průletu nadzvukových letadel). Součinitel C je pak menší než pro $M = 1$.

Vedle odporových sil mohou působit na pevná tělesa při jejich obtékání tekutinami ještě *aerodynamické vztlakové síly*. Pro jejich vznik je rozhodující, aby tělesa měla vhodný aerodynamický tvar a polohu vzhledem ke směru proudění. Protože jejich vznik a účinek je rozhodující pro konstrukci letadel, budou tyto síly podrobně probrány až v čl. 4.2.

1.3 Úlohy ke kapitole 1

1. Reaktivní síla

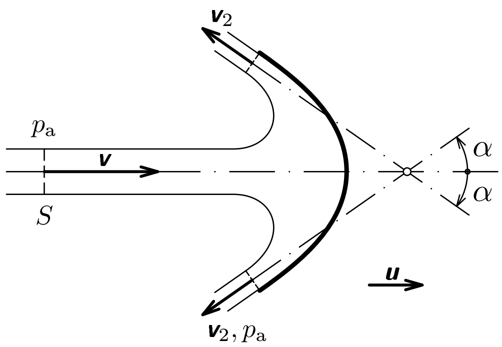
Nádoba s plochým dnem a svislými stěnami je naplněna vodou a postavena na vodorovné podložce. V hloubce $h_0 = 1{,}0$ m pod hladinou je ve svislé stěně kruhový otvor o poloměru $r = 25$ mm. Vypočtěte počáteční reaktivní sílu R_0, kterou působí vytékající voda na nádobu a stanovte funkční závislost její velikosti na výšce h klesající hladiny měřené od středu otvoru. Rychlost klesání hladiny zanedbejte v porovnání s rychlostí kapaliny v otvoru.

2. Síla působící na desku

Vypočtěte sílu, kterou působí vodní paprsek o příčném průřezu S na vydutou desku podle obr. 6. Paprsek se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$ a deska jeho tok symetricky rozdělí na dva paprsky a obrátí je do protisměru. Je dán úhel α. Řešte pro tyto případy:

a) Deska je nehybná ($\boldsymbol{R}_a$), přičemž předpokládejte $|\boldsymbol{v}_2| = |\boldsymbol{v}|$.

b) Deska se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{u}$ ve směru rychlosti vstupujícího paprsku ($\boldsymbol{R}_b$).



Obr. 6 K výpočtu síly $\boldsymbol{R}$, kterou působí proud vody na vydutou desku. Rychlosti paprsků vody jsou vyznačeny pro případ nehybné desky

3. Nosná plocha letadla

Nechť na nosnou plochu křídla letadla působí vztlaková síla připadající na jednotkovou plochu (neboli vztlak) o střední hodnotě $\Delta p = 1{,}00$ kPa. Pro jednoduchost předpokládejte, že vzduch obtéká křídlo laminárně, přičemž hustotu vzduchu považujte za konstantu $\varrho = 1{,}29\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Jaká musí být střední velikost rychlosti v_2 vzduchu obtékající horní plochu křídla, když vzduch, který obtéká jeho spodní plochu má střední rychlost o velikosti $v_1 = 110\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$? Řešte užitím Bernoulliho rovnice pro ideální plyn.

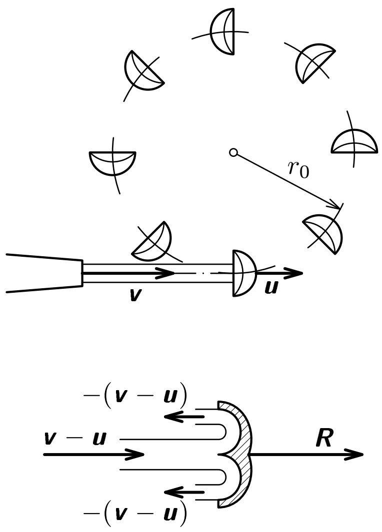
2 Zařízení založená na změně hybnosti tekutin v příkladech

2.1 Úvod

V této kapitole si formou čtyř řešených příkladů vysvětlíme fyzikální principy několika důležitých zařízení, která využívají větu o změně hybnosti tekutin. V technické praxi ji aplikují důležité strojírenské obory, jako je stavba letadel, vodních turbín, tepelných (parních a spalovacích) turbín, proudových a raketových motorů.

Příklad 3 – Peltonova vodní turbína

Vypočtěte největší výkon a optimální otáčky Peltonovy turbíny, ke které přivádíme vodu z přehradní nádrže, jenž je ve výšce $h = 300$ m. Přiváděcí potrubí je zakončeno tryskou, jejíž ústí má poloměr $r = 30$ mm. Lopatkové kolo má střední poloměr $r_0 = 355$ mm a jeho lopatky nechť obracejí směr toku ideálně o 180° (obr. 7). (Ve skutečnosti je z konstrukčních důvodů odklon minimálně o asi 4° menší.) Předpokládejte, že turbína má dostatečný počet lopatek, aby bylo možné uvažovat, že účinek proudu je spojitý.



Obr. 7 K výpočtu Peltonovy turbíny. Na detailu lopatky jsou rychlosti dopadající a odtékající vody vyznačené ve vztažné soustavě spojené s lopatkou pohybující se rychlostí $\boldsymbol{u}$

Řešení

Podle Torriceliho vzorce bude mít výtoková rychlost v ideálním případě velikost $v_0 = \sqrt{2gh}$. Pokud bychom reálně uvažovali vnitřní tření a tření o stěny potrubí, museli bychom od výšky h odečítat ztrátovou výšku h_z (viz příklad 8 v [6]). V konstrukční praxi se zavádí efektivní výška $h_e = kh$, kde ztrátový koeficient

k závisí na tvaru a členitosti přívodního potrubí včetně trysky. Z empirických poznatků se volí $k = 0{,}94$. Tok hmotnosti je

$$Q_\mathrm{m} = \varrho S v = \varrho \pi r^2 \sqrt{2gkh}.$$

Tok hybnosti dopadajícího proudu vody na lopatku, která se pohybuje (ustupuje) rychlostí $\boldsymbol{u}$ je

$$\boldsymbol{H}_1 = Q_\mathrm{m}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}).$$

Lopatka obrací tok vody podle předpokladu do protisměru rychlostí $-(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})$, takže tok hybnosti vystupujícího proudu je

$$\boldsymbol{H}_2 = -Q_\mathrm{m}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}).$$

Úhrnný tok hybnosti je $\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1$ a pohybová rovnice má tvar

$$-2Q_\mathrm{m}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{R},$$

neboli velikost síly, kterou působí proud na lopatku je

$$R = 2Q_\mathrm{m}(v - u) = 2\varrho \pi r^2 \sqrt{2gkh}.$$

Výkon

$$P = Ru = 2Q_\mathrm{m}(v - u)u$$

bude maximální, když $u_\mathrm{m} = \dfrac{v}{2}$ (viz vztah (9) v příkladu 2). Tedy

$$P_\mathrm{max} = \frac{1}{2}\varrho S v^3 = \frac{\varrho}{2}\pi r^2 (2gkh)^{\frac{3}{2}} = 582\ \mathrm{kW}.$$

Otáčky n_0, při kterých dosáhne turbína tohoto výkonu, jsou dány obvodovou rychlostí $u_\mathrm{m} = \dfrac{v}{2}$. Tedy

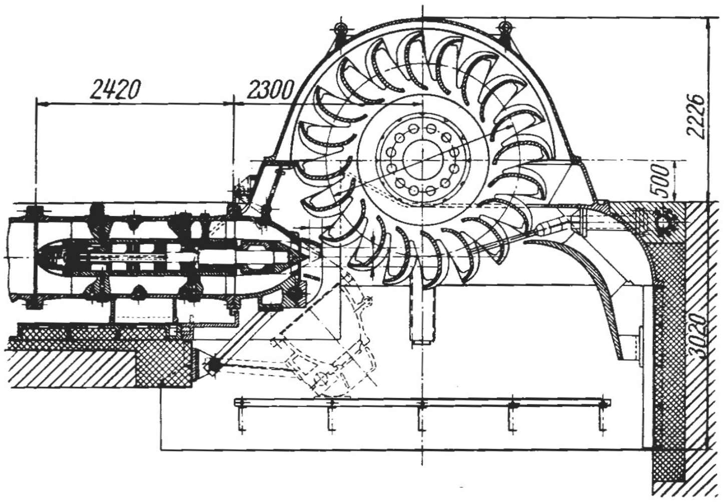
$$\frac{1}{2}\sqrt{2gkh} = \frac{\pi n_0}{30} r_0.$$

Z toho

$$n_0 = \frac{15}{\pi r_0}\sqrt{2gkh} = 1000\ \mathrm{min}^{-1} = 16{,}7\ \mathrm{Hz}.$$

Poznámky

1. *Peltonova turbína* se používá pro velké spády (nad 30 m) a relativně malé objemové průtoky. Je tedy vhodná pro horské podmínky. Turbínu vynalezl r. 1880 L. A. Pelton (USA). Oběžné kolo má zpravidla 18 až 26 lopatek lžicového tvaru. Příklad konstrukce Peltonovy turbíny je na obr. 8.

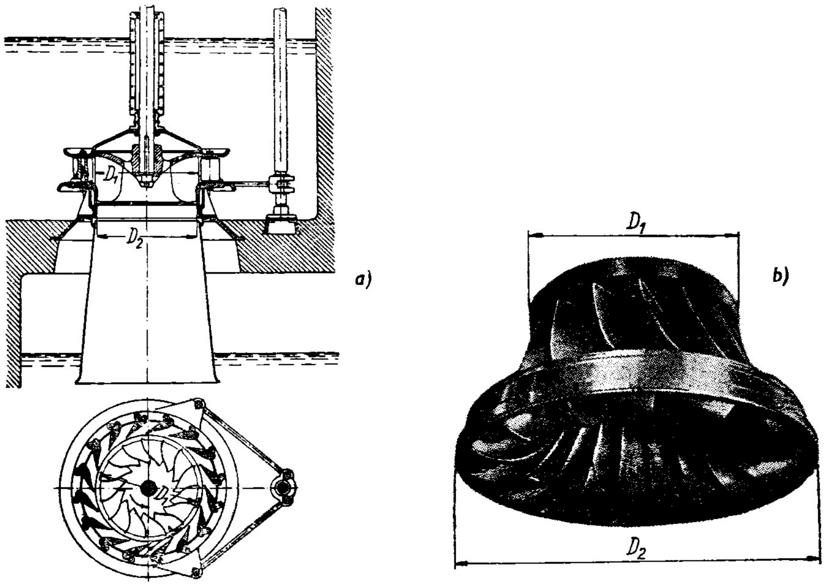


Obr. 8 Peltonova turbína o parametrech: $P = 16{,}6$ MW pro $Q_V = 4{,}05\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$, $h = 477$ m, $n = 375\ \mathrm{min^{-1}}$. Střední poloměr oběžného kola je $r_0 = 1200$ mm

2. Pro spády širokého rozsahu (od 2 m do 400 m) a pro relativně stálé objemové průtoky je vhodná *Francisova turbína* (Francis, USA, 1849), která se staví buď s vertikálním hřídelem (obr. 9a) nebo v horizontálním uspořádání. Rozváděcí kolo má lopatky, které se dají natáčet v závislosti na objemovém průtoku vody. Oběžné kolo (obr. 9b) mívá 12 až 18 pevných lopatek, na něž voda vtéká radiálně a vytéká axiálně, tj. rovnoběžně s osou hřídele. Rozsah výkonů, pro něž se tyto turbíny staví, bývá značný: od malých výkonů řádu desítek kW (pro malé průtočné vodní elektrárny na řekách) až po gigantické stroje výkonů řádu stovek MW. Největší Francisovy turbíny, každá o výkonu 700 MW, jsou v počtu 18 soustrojí instalovány v elektrárně na přehradě Itaipú[1] na řece Paraná na pomezí Brazílie a Paraguae. Turbíny stejného výkonu 700 MW se v počtu 26 v současnosti montují v elektrárně na přehradě Tři soutěsky[2] na řece Jang-c'-ťiang (Dlouhá řeka) v Číně. Nominální spád hladin zde je $h = 113$ m (u hydrocentály v Itaipú 118 m). O velikosti soustrojí 700 MW svědčí údaj o oběžném kole: $D_2 = 16$ m, hmotnost 416 tun.

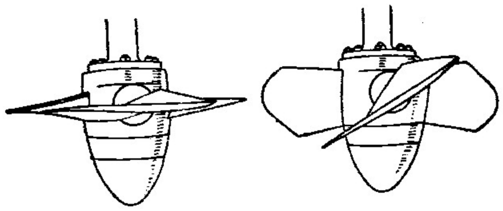
[1] Délka přehradní hráze 1234 m, její výška 196 m, délka přehradního jezera 170 km, objem zadržované vody až $2{,}9 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m^3}$, celkový výkon turbín elektrárny 12 600 MW.
Doba výstavby: 1975 – 1991.

[2] Délka přehradní hráze 2300 m, její výška 185 m, délka přehradního jezera 600 km, objem zadržované vody až $4{,}0 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m^3}$, celkový výkon turbín elektrárny 18 200 MW.
Doba výstavby: 1984 – 2010.



Obr. 9 Francisova turbína: a) celkové uspořádání soustrojí s vertikálním hřídelem, b) oběžné kolo [2]

3. Jsou-li objemové průtoky velmi proměnlivé, má Francisova turbína malou účinnost, protože její oběžné kolo má lopatky o stálém sklonu. Pro tyto případy vynalezl r. 1914 profesor brněnské techniky Viktor Kaplan (1876 – 1934) turbínu, která se od Francisovy turbíny liší tím, že má oběžné kolo vrtulového typu s nastavitelnými lopatkami (obr. 10). Oběžné kolo má zpravidla čtyři lopatky, avšak může jich mít až 12. Sklon se reguluje hydraulicky. Kaplanova turbína se staví pro malé až střední spády (do 60 m).



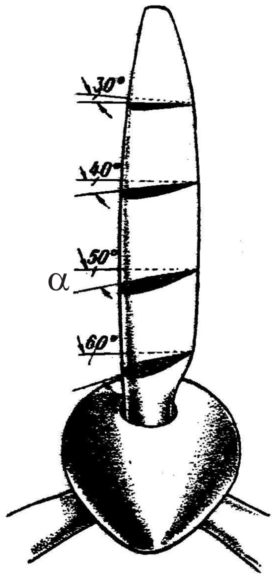
Obr. 10 Oběžné kolo Kaplanovy turbíny. Vlevo jsou lopatky nastaveny pro malý a vpravo pro velký průtokový objem [2]

4. U Francisovy a Kaplanovy turbíny je silové působení způsobeno jednak změnou směru hybnosti vody při jejím průtoku oběžným kolem, jednak působením hydrostatického tlaku na horní stranu ploch lopatek oběžného kola. Proto se tyto turbíny označují jako *přetlakové*. U těchto turbín se potenciální tlaková energie transformuje na kinetickou i mezi lopatkami oběžného kola.

Příklad 4 – vrtule letadla

Důležitou součástí klasických motorových letadel je vrtule, která rotací pomocí motoru (buď pístového nebo turbínového) uvádí do axiálního pohybu vzduch, a tím podle první impulsové věty (2), resp. (3), vzniká hnací síla, která se nazývá *tažná síla vrtule*.

Aby účinnost přenosu kinetické energie z vrtule na vzduch byla co největší, mění se úhel náběhu α (tj. úhel mezi tětivou profilu a obvodovou rychlostí) v závislosti na poloměru rotace (viz obr. 11) – se vzrůstající obvodovou rychlostí $u = \omega r$ se α zmenšuje tak, aby rychlost proudu vzduchu byla přibližně stejná v celém průřezu vrtulového proudu vzduchu. U dokonalejších vrtulí, které mají proměnné nastavení listů (obr. 11), se pro zvýšení účinnosti natáčí list vrtule tak, že se zvětšující se rychlostí letadla se celkově zmenšuje úhel náběhu.



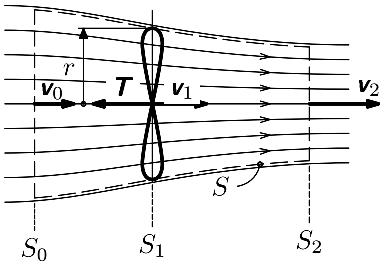
Obr. 11 Třílistá vrtule

Vypočtěte tažnou sílu vrtule letadla letícího rychlostí $v_0 = 60\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Vrtule má poloměr $r = 0{,}75$ m a urychluje vzduch na rychlost, jejíž ustálená axiální velikost (kterou měříme až v určité vzdálenosti od vrtule) je $v_2 = v_0(1 + k)$, kde k je poměrný přírůstek rychlosti, pro který nechť je $k = 0{,}25$ (koeficient k se zjišťuje empiricky). Vzduch považujte za nestlačitelnou tekutinu[3] o hustotě $\varrho = 1{,}3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Předpokládejte, že tlak p před vrtulí a za ní je stejný a že je bezvětří.

[3]Tento předpoklad lze u řešení řady technických problémů (obtékání křídla letadla, lopatky turbíny, vrtule) provést, protože změna hustoty vzduchu je velmi malá. Srovnejte s [9] str. 37 a porovnejte řešení příkladu 10 a úlohy 21 v [9], kde je počítána chyba způsobená předpokladem $\varrho = konst.$. V řešeném problému byla chyba menší než 1%.

Řešení

Zjednodušené schéma toku vzduchu vyvolaného rotací vrtule je na obr. 12, kde S je uzavřená kontrolní plocha vrtule letadla. Předpokládáme, že tok vzduchu je ovlivněn jen v trubici o průřezech S_0, S_1, S_2, přičemž S_0 je plocha vstupního průřezu, kde vzduch má relativní rychlost $\boldsymbol{v}_0$ letadla, $S_1 = \pi r^2$ je plocha kruhu vymezeného rotující vrtulí, kde vzduch má neznámou axiální rychlost $\boldsymbol{v}_1$ a S_2 je plocha výstupního průřezu, kde vzduch má axiální rychlost o velikosti $v_2 = v_0(1+k)$. Podle rovnice kontinuity platí



Obr. 12 Tok vzduchu v okolí rotující vrtule

$$S_0 v_0 = S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

přičemž pro velikost rychlosti $\boldsymbol{v}_1$ budeme zjednodušeně předpokládat, že je střední hodnotou vstupní a výstupní rychlosti:

$$v_1 = \frac{v_0 + v_2}{2}, \text{ neboli } \quad S_0 v_0 = S_2 v_2 = \frac{\pi r^2}{2}(v_0 + v_2).$$

Vzduch vstupující do kontrolní plochy S má tok hybnosti $\boldsymbol{H}_0 = \varrho S_0 v_0 \boldsymbol{v}_0$ a vystupující vzduch $\boldsymbol{H}_2 = \varrho S_2 v_2 \boldsymbol{v}_2$. Vrtule působí na vzduch silou $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{T}$, kde $\boldsymbol{T}$ je tažná síla vrtule, tedy síla, kterou vrtule urychluje letadlo. Pohybová rovnice (8) má tvar $\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{F}$, neboli

$$\varrho(S_2 v_2 \boldsymbol{v}_2 - S_0 v_0 \boldsymbol{v}_0) = -\boldsymbol{T}.$$

Odtud užitím výše uvedené rovnice kontinuity bude tažná síla vrtule dána výrazem

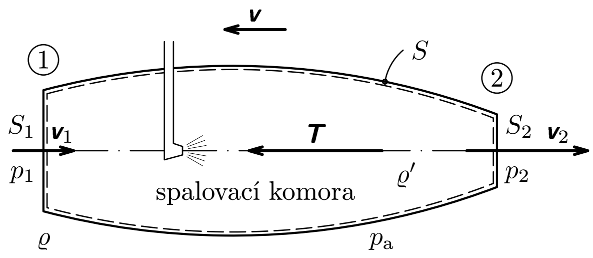
$$\boldsymbol{T} = -\varrho\frac{\pi r^2}{2}(v_0 + v_2)(v_2 - v_0)\boldsymbol{v}_2^0 = -\varrho\frac{\pi r^2}{2}(v_2^2 - v_0^2)\boldsymbol{v}_2^0,$$

$$\boldsymbol{T} = -\varrho\pi r^2 k\ v_0^2\left(1 + \frac{k}{2}\right)\boldsymbol{v}_2^0,$$

kde $\boldsymbol{v}_2^0$ je jednotkový vektor ve směru rychlosti vzduchu za vrtulí. Pro zadané hodnoty má tažná síla velikost $T = 2{,}3$ kN.

Příklad 5 – proudový reaktivní motor

Vypočtěte tažnou sílu proudového náporového reaktivního motoru, jehož schéma je znázorněno na obr. 13. Motor pohání letoun, který se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{v}^0$, kde $v > 0$. Ve spalovací komoře motoru je spalováno palivo, přičemž tok hmotnosti paliva lze zanedbat oproti toku hmotnosti vzduchu vstupujícího průřezem S_1. Výstupním průřezem S_2 proudí spaliny rychlostí $\boldsymbol{v}_2 = -v_2 \boldsymbol{v}^0$, kde $v_2 > v > 0$. Tlak ve vstupním průřezu je $p_1 \approx p_\mathrm{a}$, tlak ve výstupním průřezu je p_2, hustota vzduchu je ϱ.



Obr. 13 Schéma proudového náporového reaktivního motoru (ve vztažné soustavě spojené s motorem pohybujícím se rychlostí $\boldsymbol{v}$)

Řešení

Tekutinu omezíme kontrolní plochou S, kterou tvoří vnitřní stěny motoru a průřezy S_1, S_2. Vzduch vstupuje do motoru rychlostí $\boldsymbol{v}_1 = -v\boldsymbol{v}^0$. Tok hmotnosti vstupujícího vzduchu a tok hmotnosti vystupujících spalin jsou přibližně stejné (hmotnost paliva oproti hmotnosti vzduchu zanedbáváme):

$$Q_\mathrm{m} = \varrho S_1 v = \varrho' S_2 v_2,$$

kde ϱ' je hustota horkých spalin (není nutné ji znát). Pak toky hybnosti jsou

$$\boldsymbol{H}_1 = Q_\mathrm{m} \boldsymbol{v}_1 = -\varrho S_1 v^2 \boldsymbol{v}^0,$$
$$\boldsymbol{H}_2 = Q_\mathrm{m} \boldsymbol{v}_2 = -\varrho S_1 v v_2 \boldsymbol{v}^0.$$

Tlakové síly jsou

$$\boldsymbol{F}_1 = -S_1 p_\mathrm{a} \boldsymbol{v}^0, \quad \boldsymbol{F}_2 = S_2 p_2 \boldsymbol{v}^0,$$

a tažnou sílu motoru v souladu s úmluvou (7) označíme $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{T}$. Pohybová rovnice (8) pak bude mít tvar

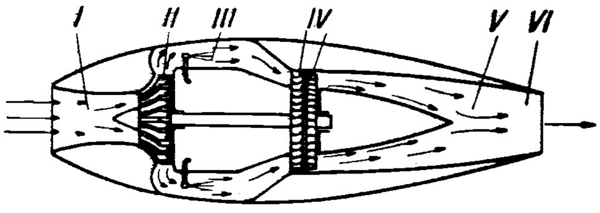
$$\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{T},$$

z toho tažná síla motoru je

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2 + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \varrho S_1 v (v_2 - v) \boldsymbol{v}^0 + (S_2 p_2 - S_1 p_\mathrm{a}) \boldsymbol{v}^0. \tag{14}$$

Poznámka

Princip proudového náporového reaktivního motoru je sice jednoduchý, avšak jeho činnost vyžaduje $v > 0$, aby $T > 0$. Neumožňuje tedy start běžného letounu, protože při startu je $v = 0$ a tudíž by bylo $T = 0$ (tlakové síly se v tomto stavu také kompenzují a navíc jsou malé). Tento motor byl použit např. u letadlových řízených (bezpilotních) střel, které jsou zavěšeny na bombardovacím letadle a startují za letu. Významná je závislost tažné síly motoru na rychlosti, která se technicky označuje jako propulzní účinnost (tah roste s rychlostí). U proudových letadel je proto nutné proudový reaktivní motor vybavit turbokompresorem, který se umístí do osy motoru a vhání vzduch do vstupního motoru spalovací komory. Činnost tohoto motoru je pak nezávislá na rychlosti $\boldsymbol{v}$ letadla a motor vyvíjí dostatečný tah potřebný pro starty z klidového stavu. Při startu je ovšem nutné rotor proudového motoru roztočit pomocným motorem (starterem). Tah motoru se opět řeší podle vztahu (14), v němž však rychlost v nahradíme rychlostí v_1, kterou vstupuje vzduch do spalovací komory po urychlení turbokompresorem. Schéma takového motoru s radiálním kompresorem je na obr. 14.



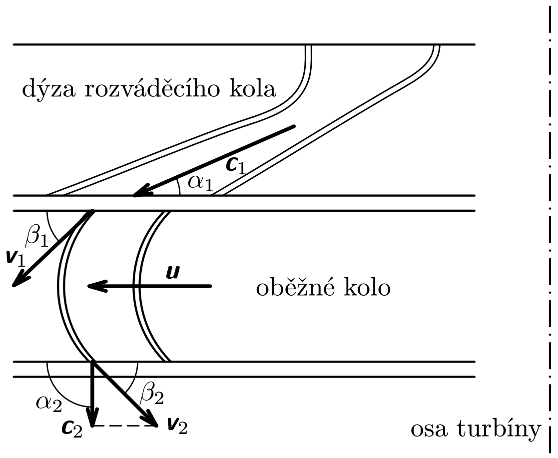
Obr. 14 Schéma turbokompresorového proudového reaktivního motoru, kde je I – vstupní dýza, II – radiální kompresor, III – spalovací komora, IV – plynová jednostupňová turbína, V – výstupní dýza, VI – hnací tryska [3]

Příklad 6 – rovnotlaká parní turbína

Parní turbína je tepelný lopatkový stroj, který využívá vnitřní energii páry zahřáté v kotli na vysokou teplotu. Pára se přivede z parního kotle do rozváděcího lopakového ústrojí turbíny, v němž expanduje z vysokého tlaku a teploty na tlak a teplotu nižší, přičemž se její vnitřní energie projeví jako kinetická energie proudící páry. Působením páry na lopatky oběžného kola na rotoru koná pára mechanickou práci, která se spotřebuje např. k pohonu generátoru elektrického proudu. Aby přeměna vnitřní energie páry na mechanickou práci probíhala s velkou účinností, musí pára v turbíně expandovat postupně. U velkých strojů se tak zpravidla děje ve velkém počtu stupňů (bývá jich desítky), přičemž každý stupeň sestává z jednoho rozváděcího (statorového) lopatkového kola a jednoho oběžného lopatkového kola na rotoru.

Pokud expanze páry probíhá jen v kanálech rozváděcího kola, hovoříme o *turbíně rovnotlaké* (v kanálech vytvořených mezi lopatkami oběžného kola se u ní tlak páry nemění). U *přetlakové turbíny* probíhá expanze (tj. pokles tlaku a zvětšování rychlosti páry) i v kanálech mezi lopatkami oběžného kola. O tom, o jaký typ turbíny půjde, rozhoduje tvar kanálu mezi lopatkami oběžného kola (pokud se zde průřez kanálu zúžuje, jde o přetlakovou turbínu). U velkých turbín se oba typy expanzí zpravidla kombinují, přičemž vstupní část bývá rovnotlaká, kterým lze dosáhnout i jedinou expanzí velkého snížení tlaku páry. Vyžaduje však, aby kanály rozváděcího kola měly tvar Lavalovy dýzy (viz např. [2], [9]), neboť rychlost expandované páry překračuje rychlost zvuku v daném prostředí.

Naším úkolem bude vyřešit základní charakteristiky vstupního jednostupňového rovnotlakého dílu (je to tzv. Lavalova turbína) parní elektrárenské kondenzační turbíny o výkonu 50,0 MW. Do turbíny se přivádí pára o teplotě 560 °C a tlaku 12,0 MPa o hmotnostním toku $Q_\mathrm{m} = 38{,}3\ \mathrm{kg \cdot s^{-1}}$. V dýzách rozváděcího kola pára expanduje na tlak 8,80 MPa a teplotu 515 °C, přičemž na výstupu dosáhne rychlost velikosti $c_1 = 450\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (tato velikost byla určena tepelným výpočtem včetně započtení ztrát). Turbína se otáčí frekvencí $f = 50{,}0$ Hz, střední rotační poloměr kanálu v oběžném kole je $r = 650$ mm.



Obr. 15 Schéma toku páry rozváděcím a oběžným kolem turbíny

a) Určete základní úhly lopatek, tj. α_1, β_1, β_2 (obr. 15) tak, aby výstupní rychlost $\boldsymbol{c}_2$ páry v soustavě spojené s rozváděcím kolem měla axiální směr (tj. $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{2}$) a úhly $\beta_1 = \beta_2$ v soustavě spojené s rotorem otáčejícím se obvodovou rychlostí $\boldsymbol{u}$ měly směr tečen ve vstupní a výstupní části lopatky oběžného kola. Vypočtěte velikost rychlostí $|\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_2|$ a $|\boldsymbol{c}_2|$.

b) Určete velikost reakční síly $\boldsymbol{R}$, kterou pára působí na oběžné kolo, příslušný moment síly $\boldsymbol{M}$ a výkon P.

Řešení

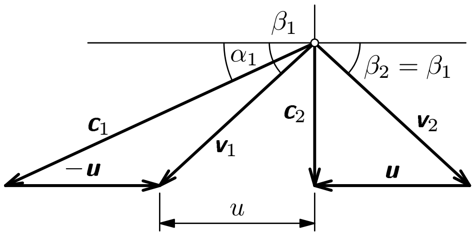
a) Při přechodu do vztažné soustavy spojené s rotorem musíme od rychlosti $\boldsymbol{c}_1$ odečítat obvodovou rychlost $\boldsymbol{u}$ a dostaneme $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{c}_1 - \boldsymbol{u}$. Na výstupu – po zpětném přechodu do původní statorové soustavy – musíme k rychlosti $\boldsymbol{v}_2$ naopak rychlost $\boldsymbol{u}$ připočítat a dostaneme $\boldsymbol{c}_2 = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{u}$, přičemž $\boldsymbol{c}_2$ má axiální směr (viz obr. 16).
Pro rychlosti zřejmě platí

$$|\boldsymbol{u}| = \omega r = 2\pi f r = 204\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$|\boldsymbol{c}_2| = \sqrt{c_1^2 - 4u^2} = 190\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},$$

$$|\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_2| = \sqrt{c_2^2 + u^2} =$$

$$= \sqrt{c_1^2 - 3u^2} = 279\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$



Obr. 16 Rychlostní trojúhelníky

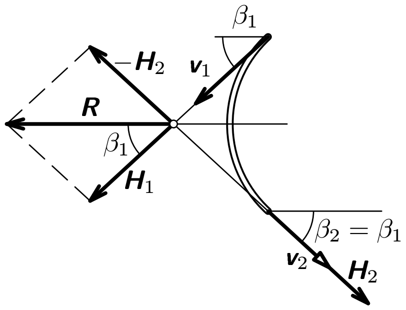
Úhly: $\alpha_1 = \arccos\dfrac{2u}{c_1} = 24{,}8°$, $\qquad \beta_1 = \beta_2 = \arccos\dfrac{u}{v_1} = 42{,}7°$.

b) Pohybová rovnice (8) je $\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1 = -\boldsymbol{R}$, kde $\boldsymbol{R}$ je reakční síla, kterou pára působí na lopatky a toky hybnosti páry jsou

$$\boldsymbol{H}_1 = Q_\mathrm{m}\boldsymbol{v}_1, \quad \boldsymbol{H}_2 = Q_\mathrm{m}\boldsymbol{v}_2.$$

Pak (obr. 17)

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2 = Q_\mathrm{m}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2).$$



Obr. 17 Silové trojúhelníky

Velikost síly (viz obr. 17)

$$|\boldsymbol{R}| = 2H_1\cos\beta_1 = 2Q_\mathrm{m}u = 4\pi Q_\mathrm{m} f r = 1{,}56\cdot 10^4\ \mathrm{N}.$$

Velikost momentu síly

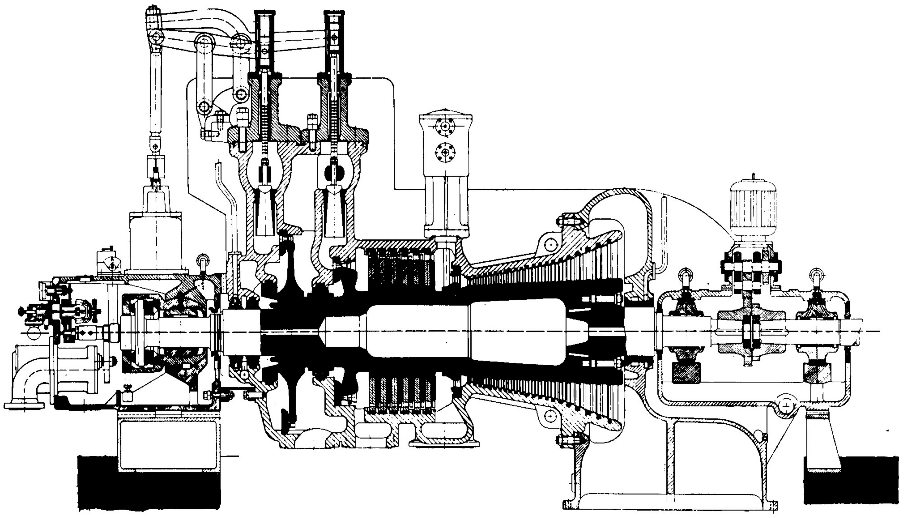
$$|\boldsymbol{M}| = Rr = 4\pi Q_\mathrm{m} f r^2 = 1{,}02\cdot 10^4\ \mathrm{N\cdot m}.$$

Výkon vstupního dílu turbíny

$$P = M\omega = 8\pi^2 Q_\mathrm{m} f^2 r^2 = 3{,}19\ \mathrm{MW}.$$

Poznámka

Parní turbíny jsou zpravidla velmi složité a členité (často několikatělesové) stroje. Jejich konstrukce závisí nejen na celkovém výkonu, ale i na tom, zda jde o turbínu elektrárenskou (kondenzační), u níž pára expanduje až do stavu podtlaku anebo o turbínu teplárenskou (protitlakou), která zásobuje např. město párou pro vytápění. Konstrukce závisí také na tom, zda jde o turbínu stejnotlakou anebo přetlakovou. Často se setkáváme s kombinacemi všech uvedených možností. Na obr. 18 je příklad relativně jednoduché turbíny malého výkonu pro výtopnu průmyslového závodu. Má rovnotlakou část (vlevo) i přetlakovou (vpravo). Lavalovo oběžné kolo je na rotoru zcela vlevo. O rozvoj konstrukce parních turbín se zasloužil zejména Aurel Stodola (1859 – 1942), slovenský technik, který působil na curyšské technice ve Švýcarsku.



Obr. 18 Kondenzační parní turbína 5 MW se dvěma regulovanými odběry. Vstupní pára má tlak 3,3 MPa a teplotu 400 °C. Výrobek První brněnské strojírny

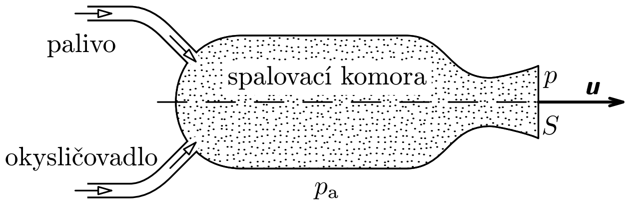
2.2 Úlohy ke kapitole 2

4. Vodní pohon obojživelníku

K pohonu obojživelného obrněného transportéru na vodě se užívá čerpadlo, které čerpá vodu z vodní hladiny, po níž se pohybuje, do dvou výstupních dýz na zádi transportéru. Dýzy mají průměr $d = 210$ mm, jsou nad hladinou a voda z nich vystupuje rychlostí $u = 5{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Vypočtěte tažnou sílu transportéru na vodě a jeho výkon při pohybu rychlostí $v = 15\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

5. Tažná síla raketového motoru

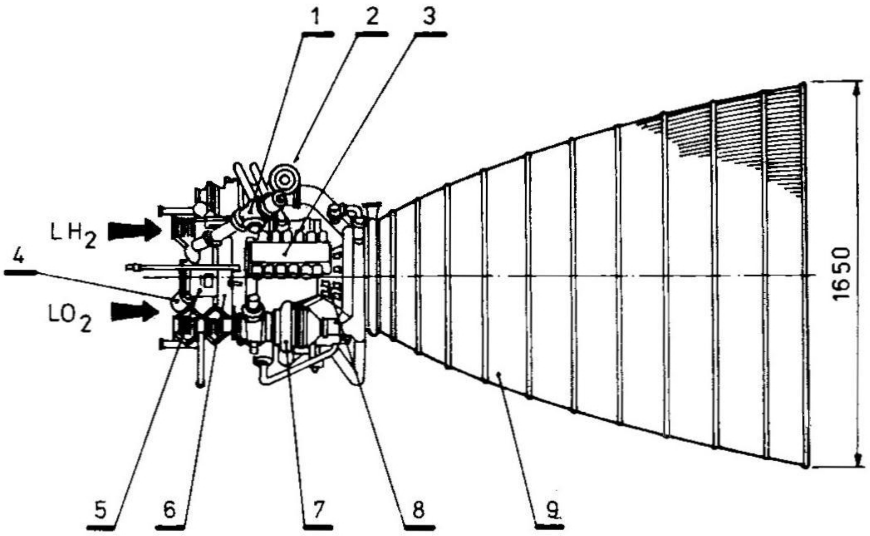
Vypočtěte tažnou sílu raketového motoru, jehož základní schéma je na obr. 19. Z trysky motoru o příčném průřezu S vystupují plyny o hustotě ϱ relativní rychlostí $\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{u}^0$, kde $u > 0$. Ve výstupním průřezu je tlak $p > p_\mathrm{a}$.



Obr. 19 Schéma raketového motoru

Poznámka

Příklad konstrukce reálného raketového motoru je na obr. 20.



Obr. 20 Kyslíkovodíkový raketový motor LE-5 japonské konstrukce [4]
1 – hlavní ventil okysličovadla; 2 – spouštěcí ventil; 3 – pneumatická ovládací skříň; 4 – zážehová svíčka; 5 – řídící elektronika; 6 – vstřikovač; 7 – turbočerpadlo okysličovadla; 8 – spalovací komora; 9 – tryska; LH_2/LO_2 – přívod kapalného vodíku a kyslíku

3 Pohyb raket

Rakety jsou tělesa, která ke své činnosti musí dopravovat nejen palivo, nýbrž i okysličovadlo. Za pohybu se tedy jejich hmotnost značně mění, což je nutné respektovat v pohybové rovnici. Řešení pohybu těles s proměnnou hmotností je spojeno se jmény dvou Rusů: I. V. Meščerského (1859 – 1935) a K. E. Ciolkovského (1857 – 1935).

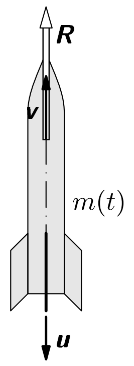
3.1 Pohybová rovnice rakety

Nechť se v inerciální vztažné soustavě pohybuje raketa jako těleso, které má okamžitou hmotnost popsanou funkcí $m = m(t)$ a okamžitou rychlost $\boldsymbol{v}$. Má tedy hybnost $\boldsymbol{p}(t) = m\boldsymbol{v}$. Z motoru rakety vystupují relativní rychlostí $\boldsymbol{u}$ plyny, které vznikly hořením paliva s okysličovadlem. Uvažujme, že se od rakety v průběhu elementu času $\mathrm{d}t$ odpojí element plynu o hmotnosti $\mathrm{d}m$ [4], jehož absolutní rychlost v pozorovací soustavě bude $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Tím se zmenší hmotnost rakety na $m - |\mathrm{d}m|$ a zvětší její rychlost na $\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}$. V čase $t + \mathrm{d}t$ bude mít soustava tvořená raketou a odpojeným elementem plynu hybnost

$$\boldsymbol{p}(t + \mathrm{d}t) = (m - |\mathrm{d}m|)(\boldsymbol{v} + \mathrm{d}\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{v}_1|\mathrm{d}m|.$$

Za dobu $\mathrm{d}t$ se tedy hybnost soustavy změní o

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t + \mathrm{d}t) - \boldsymbol{p}(t) = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\,|\mathrm{d}m| - |\mathrm{d}m|\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_1|\mathrm{d}m| = m\,\mathrm{d}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\,|\mathrm{d}m|,$$



Obr. 21 Reaktivní síla u rakety

když jsme zanedbali nekonečně malý člen druhého řádu $|\mathrm{d}m|\mathrm{d}\boldsymbol{v}$ a zavedli relativní rychlost $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}$, tedy výtokovou rychlost plynů. Podle druhého Newtonova pohybového zákona je rychlost změny hybnosti tělesa konajícího translační pohyb rovna výslednici vnějších sil $\boldsymbol{F}$, neboli

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{u}\left|\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right| = \boldsymbol{F}.$$

Pohybová rovnice rakety tedy je

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{u}\left|\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right| = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{R}}, \qquad (15)$$

kde $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ je okamžité zrychlení rakety a

$$\boxed{\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{u}\left|\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right| = -Q_{\mathrm{m}}\boldsymbol{u}}, \qquad (16)$$

[4] Protože u rakety jde o úbytek hmotnosti, je $\mathrm{d}m < 0$. Podle zvyklostí budeme tento úbytek brát kladně, proto budeme psát $|\mathrm{d}m|$.

je reaktivní síla. Veličina $Q_\mathrm{m} = \left|\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right|$ v rovnici (16) je *hmotnostní tok* vystupujících plynů, neboli sekundový úbytek hmotnosti rakety (protože je kladný, bereme absolutní hodnotu z derivace okamžité hmotnosti). Je zřejmé, že reaktivní síla $\boldsymbol{R}$ má opačný směr než rychlost $\boldsymbol{u}$ vystupujících plynů (obr. 21). Pohybová rovnice (15) tělesa s proměnnou hmotností se nazývá *Meščerského rovnice*.

Pokud by se hmotnost tělesa při pohybu zvětšovala (tedy k tělesu s relativní rychlostí $\boldsymbol{u}$ připojovaly částečky $\mathrm{d}m$), bude v našem výpočtu $Q_\mathrm{m} < 0$ a reaktivní síla bude mít stejný směr jako $\boldsymbol{u}$, a síla (16) bude brzdit pohyb tělesa. To je např. v případě letadla, na němž se usazuje námraza anebo u padající ledové kroupy vlhkým vzduchem, resp. mlhou.

3.2 Ciolkovského úloha

Jde o řešení pohybu rakety jen za působení reaktivní síly, tedy bez působení vnějších sil ($\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$). U reaktivní síly (16) se předpokládá ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{konst}$). Tento předpoklad je u reálných raket splněn konstrukcí motoru.

Budeme-li předpokládat počáteční rychlost rakety nulovou, ($\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$), bude se raketa pohybovat přímočaře v opačném směru než je výtoková rychlost $\boldsymbol{u}$. Můžeme proto pohybovou rovnici (15) v našem případě psát ve skalárním tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -u\left|\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right|,$$

neboli

$$\mathrm{d}v = -u\frac{|\mathrm{d}m|}{m}.$$

Označíme-li m_0 počáteční hmotnost rakety, dostaneme pro velikost její rychlosti

$$v = -u\int_{m_0}^{m}\frac{|\mathrm{d}m|}{m} = u\ln\frac{m_0}{m}. \tag{17}$$

Při konstantní rychlosti $\boldsymbol{u}$ výtokových plynů se hmotnost rakety mění v závislosti na velikosti rychlosti v podle vztahu, který vypočteme ze (17). Tedy

$$m = m_0\mathrm{e}^{-\frac{v}{u}}. \tag{18}$$

Raketa dosáhne rychlost $\boldsymbol{v}$ maximální velikosti v okamžiku, kdy se spotřebuje veškeré palivo a okysličovadlo. Označíme-li konečnou hmotnost rakety m_k, bude

$$v_\mathrm{max} = u\ln\frac{m_0}{m_\mathrm{k}} = u\ln C, \tag{19}$$

kde bylo zavedeno *Ciolkovského číslo*

$$C = \frac{m_0}{m_\mathrm{k}} = 1 + \frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{k}}. \tag{20}$$

Zde $m_\mathrm{p} = m_0 - m_\mathrm{k}$ je hmotnost paliva a okysličovadla. S ohledem na dosažení co největší rychlosti rakety je snahou konstruktérů raket dosáhnout co největšího Ciolkovského čísla.

Rakety mohou být na tuhá paliva nebo na kapalná paliva. Z tuhých paliv se užívá bezdýmný prach na bázi dusičnanu celulózy, nitroglycerin nebo diglykol. U raket na tuhá paliva lze dosáhnout velkého Ciolkovského čísla ($C_\mathrm{max} \approx 10$), avšak výtoková rychlost plynů bývá menší než u kapalných paliv. Např. při použití černého prachu je $u_\mathrm{max} = 2\,300\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. U raket na kapalná paliva lze použít např. benzin a je-li okysličovadlo tekutý kyslík, je $u_\mathrm{max} = 4\,400\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, je-li jím peroxid vodíku, je $u_\mathrm{max} = 3\,600\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Je-li palivem vodík a okysličovadlem kyslík, je $u_\mathrm{max} = 5\,200\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Ciolkovského číslo u raket na kapalná paliva bývá menší ($C_\mathrm{max} \approx 6$). Maximální rychlost jednostupňové rakety pro $u = 5\,200\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a $C = 6{,}0$ podle (19) je $v_\mathrm{max} = 9\,300\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Postavit jednostupňovou kosmickou raketu by bylo technicky i ekonomicky velmi náročné.

3.3 Vícestupňové rakety

Problém při dalším zvětšování velikosti rychlosti jednostupňové rakety je v tom, že raketa sebou nese postupně stále více neužitečné hmoty ve formě prázdných zásobníků po vyhořelém palivu a okysličovadle (ideální by bylo, kdyby s palivem mohly odhořívat i zásobníky). Proto již Ciolkovskij navrhl konstrukci *vícestupňových raket*. Řešení spočívá v tom, že po spotřebování pohonných hmot jednoho stupně, se zbytek tohoto stupně (zásobníky a raketový motor) odpojí. Zbývající část rakety má již rychlost udělenou při funkci prvního stupně. Funkcí druhého stupně rakety se tato rychlost již jen zvyšuje. Tedy rychlosti, jichž dosáhnou jednotlivé stupně samostatně, se sčítají ve výslednou rychlost.

Uvažujme obecně, že velikosti výtokové rychlosti plynů i Ciolkovského čísla jednotlivých stupňů budou různé. Pro j-tý stupeň je označíme u_j, C_j. Pak pro konečnou rychlost po skončení činnosti jednotlivých stupňů n-stupňové rakety, pohybující se v prostředí bez působení vnějších sil, s využitím (19) dostaneme

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 \ln C_1, \\ v_2 &= v_1 + u_2 \ln C_2 = u_1 \ln C_1 + u_2 \ln C_2, \\ &\vdots \\ v_n &= \sum_{j=1}^{n} u_j \ln C_j. \end{aligned} \tag{21}$$

V důležitém zvláštním případě, kdy výtokové rychlosti plynů budou mít v jednotlivých stupních stejnou velikost $|\boldsymbol{u}| = u$, bude mít rychlost n-tého stupně velikost

$$v_n = u \sum_{j=1}^{n} \ln C_j = u \ln \prod_{j=1}^{n} C_j = u \ln C_j, \tag{22}$$

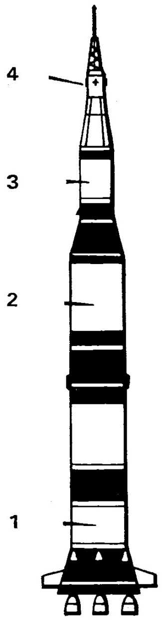
kde

$$C = \prod_{j=1}^{n} \ln C, \tag{23}$$

je výsledné Ciolkovského číslo rakety, přičemž $\prod$ je symbol pro násobení.

Ve srovnání s jednostupňovou raketou můžeme u vícestupňové rakety dosáhnout výrazně větších rychlostí i při menších Ciolkovského číslech jednotlivých stupňů. Budeme-li mít např. třístupňovou raketu o $C_1 = C_2 = C_3 = 6$, bude její maximální rychlost ve srovnání s jednostupňovou raketou o $C = 8$ a stejnou výtokovou rychlostí plynů celkem

$$\frac{\ln(6 \cdot 6 \cdot 6)}{\ln 8} = 2{,}6 \text{ krát větší.}$$



Obr. 22 Raketa Saturn 5 s kosmickou lodí Apollo (1, 2, 3 – stupně rakety, 4 – kompletní loď Apollo) [4]

Teoreticky je výhodné volit n co největší, avšak oddělování každého stupně je spojeno s určitými technologickými a ekonomickými problémy. Proto byly konstruovány a zkoušeny rakety s $n_{\max} = 4$ a prakticky se zpravidla používají rakety jen nejvýše třístupňové.

Příkladem velmi úspěšné čtyřstupňové kosmické rakety USA je *Scout*. Má raketové motory na tuhá paliva a užívá se k dopravě družic Země o hmotnosti 90 až 220 kilogramů.

K největším a nejúspěšnějším raketám, které kdy člověk zhotovil, patří třístupňová kosmická raketa *Saturn 5*, která sloužila v 60. a 70. letech mj. k měsíčnímu programu USA (obr. 22).

Parametry této soustavy jsou obdivuhodné: výška 113 m, startovní hmotnost 2 928 tun, nosnost 140 tun pro dopravu na oběžnou dráhu kolem Země, 45 tun na dráhu k Měsíci.

Příklad 7 – raketa v gravitačním poli Země

Máme jednostupňovou raketu o počáteční hmotnosti m_0, s Ciolkovského číslem C a s výtokovou rychlostí plynů $\boldsymbol{u}$. Předpokládejte, že hmotnost rakety se s časem mění podle vztahu

$$m = m_0 \mathrm{e}^{-kt}, \tag{24}$$

kde $k > 0$ je konstanta. Raketa se pohybuje svisle vzhůru v gravitačním poli Země. Vypočtěte, jaké velikosti rychlosti raketa dosáhne a do jaké výšky vystoupí za dobu t_a aktivní činnosti raketového motoru. Předpokládejte, že na aktivní dráze rakety bude neproměnná intenzita gravitačního pole (resp. $\boldsymbol{a}_\mathrm{g} = \boldsymbol{g} = \boldsymbol{konst}$.) a odpor prostředí bude zanedbatelný.

Řešení

Sekundový úbytek hmotnosti rakety dostaneme derivací funkce (24):

$$Q_\mathrm{m} = \left|\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right| = km_0 \mathrm{e}^{-kt} = km.$$

Na konci doby t_a aktivní činnosti motoru se hmotnost rakety zmenší na $m_\mathrm{k} = \dfrac{m_0}{C}$ a podle (24) bude platit

$$m_\mathrm{k} = m_0 \mathrm{e}^{-kt_\mathrm{a}},$$

neboli doba aktivní činnosti je

$$t_\mathrm{a} = \frac{1}{k} \ln C. \tag{25}$$

Pro pohyb rakety platí Meščerského rovnice (15), ve které $\boldsymbol{F} = -m\boldsymbol{g}$. Pro reaktivní sílu (16) vzhledem k (24) bude

$$\boldsymbol{R} = -Q_\mathrm{m}\boldsymbol{u} = -km\boldsymbol{u}.$$

Protože pohyb rakety je svislý a síly $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{R}$ mají navzájem opačný směr, můžeme pohybovou rovnici (15) psát skalárně:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg + muk,$$

neboli zrychlení rakety je

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = uk - g = konst.$$

Protože u, k jsou konstanty, je zrychlení rakety konstantní. Můžeme proto další výpočet omezit na aplikaci vztahů pro rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb. Můžeme však výraz i jednoduše integrovat:

$$v = \int_0^t (uk - g)\mathrm{d}t = [(uk - g)t]_0^t,$$

$$v = (uk - g)t. \tag{26}$$

Po dosazení za t z (25) obdržíme pro rychlost rakety na konci aktivní dráhy vztah

$$v_{\max} = \left(u - \frac{g}{k}\right)\ln C. \tag{27}$$

Protože $v = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$, dostaneme další integrací (26) v intervalu $\langle R, r\rangle$, kde R je poloměr Země, výraz

$$r - R = \frac{1}{2}(uk - g)t^2,$$

neboli výška výstupu na aktivní dráze, tj. pro dobu $t = t_\mathrm{a}$ podle (25) bude

$$h_\mathrm{a} = (r_\mathrm{a} - R) = \frac{1}{2k^2}(uk - g)\ln^2 C.$$

Od bodu daného polohou h_a, se raketa pohybuje jako při svislém vrhu vzhůru s počáteční rychlostí (27).

3.4 Úlohy ke kapitole 3

6. Kosmická loď

Kosmická loď o hmotnosti m_0 se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{konst}$. vzhledem k lokální inerciální soustavě, ve velké vzdálenosti od místních gravitačních polí. Od okamžiku $t_0 = 0$ je brzděna raketovým motorem, z jehož trysek vyproudí za jednotku času Q_m spalin rychlostí $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{konst}$.. Vypočtěte velikost rychlosti rakety po uplynutí doby t od okamžiku brzdění, je-li $Q_\mathrm{m} = konst$.

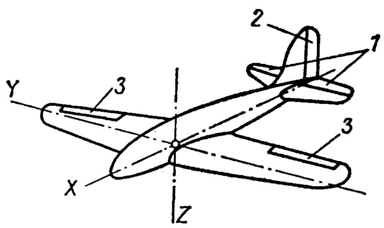
7. Raketa v gravitačním poli s proměnnou intenzitou

Raketa o počáteční hmotnosti m_0 a o nulové počáteční rychlosti se pohybuje svisle vzhůru v gravitačním poli Země. Vypočtěte velikost její rychlosti v obecné vzdálenosti r od středu Země po dobu činnosti motoru při respektování závislosti intenzity gravitačního pole na vzdálenosti r v bodech nad povrchem Země podle vztahu $g_\mathrm{r} = g\dfrac{R^2}{r^2}$. Změnu hmotnosti rakety s časem uvažujte podle vztahu (24) a závislost na odporu prostředí neuvažujte.

4 Pohyb letadel

4.1 Letadlo jako těleso o šesti stupních volnosti

Letadla jsou dopravní stroje, které mají šest stupňů volnosti, tj. při jejich pohybu se mění šest nezávislých souřadnic. Jednak jejich těžiště může ve vzduchovém obalu Země zaujímat libovolnou polohu popsanou třemi souřadnicemi (např. x, y, z), jednak jejich orientace v prostoru se může měnit natáčením kolem podélné osy X (obr. 23), příčné osy Y a svislé osy Z.



Obr. 23 Osy a kormidla letadla (1 – výškovka, 2 – směrovka, 3 – křidélka

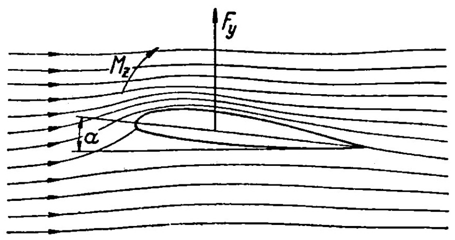
Tím se podstatně liší od pozemních dopravních strojů jako jsou kolejová vozidla (např. vlaky), které mají jen jeden stupeň volnosti, protože jejich pohyb je vázán na křivku kolejnice. Liší se i od kolových vozidel (např. automobily), které mají tři stupně volnosti, protože jejich pohyb je vázán na plochu povrchu Země vymezenou povrchem silnice. Na ní se (ovšem omezeně, v rámci dopravních předpisů) může přemísťovat – změna polohy těžiště je popsána dvěma souřadnicemi – a otáčet kolem svislé osy.

Při pohybu letadla musí mít pilot bezpečný vliv na všech šest uvedených souřadnic. Základní omezující sílu ve svislém směru vytváří gravitace. Tíhovou sílu letadla kompenzujeme vhodně vytvořenou vztlakovou silou. Při pohybu letadla vzniká odporová síla, kterou u motorového letadla překonáváme tažnou silou (vyvolanou vrtulí otáčenou motorem nebo reaktivní silou proudového motoru). Ke změně souřadnic letadla při pohybu slouží tři kormidla, která jsou založena na aerodynamickém principu (viz obr. 23): výškovka – 1, směrovka – 2 a křidélka – 3.

Další úvahy omezíme na letadla pohybující se podzvukovou rychlostí, aby nebylo nutné uvažovat vliv balistických tlakových vln.

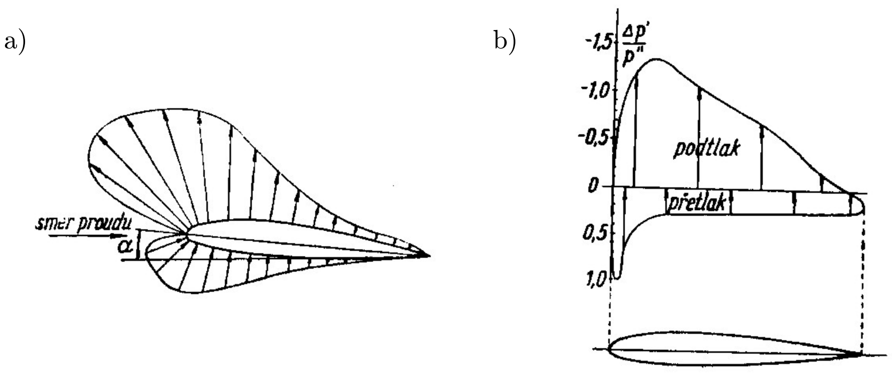
4.2 Aerodynamické síly působící na křídlo

Aby vznikla žádoucí aerodynamická vztlaková síla, musí mít letoun křídla vhodného profilu. Důležitý je tvar profilu, jehož obrysová čára v horní části musí být delší než je spodní obrysová čára (obr. 24). Druhým důležitým faktorem je sklon profilu vůči vodorovnému směru, popsaný úhlem α, který se nazývá *úhel náběhu*.



Obr. 24 Obtékání profilu křídla ideálním plynem

Uvažujme nejprve obtékání profilu vzduchem jako *ideálním plynem* s nulovou viskozitou. Pak nepůsobí odpor prostředí a jedinou složkou aerodynamické síly je vztlaková síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}} = \boldsymbol{F}_y$, která vzniká tím, že obtékání horní části profilu se děje větší rychlostí (zde v souladu s Bernoulliho rovnicí vzniká podtlak vzhledem k okolnímu tlaku), kdežto ve spodní části profilu je rychlost obtékání menší, což se zde projeví určitým přetlakem.



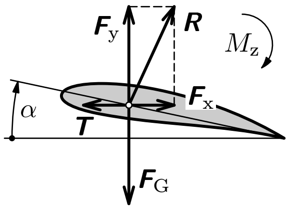
Obr. 25 Rozdělení tlaku po obvodu profilu křídla. a) Tlakové síly mají směr normály. b) Relativní velikost tlakových sil ve svislém směru, [2]

Rozložení tlakových sil po obvodu profilu křídla je na obr. 25a. Tlakové síly mají směr normály ke každému elementu plochy křídla. Z funkčního hlediska křídla je rozhodující průmět těchto sil do svislého směru. Vztáhneme-li velikost těchto sil na jednotku plochy křídla, dostaneme tlak. Na grafu v obr. 25b je tento tlak $\Delta p'$ dělen aerodynamickým tlakem

$$p_{\mathrm{d}} = p'' = \frac{\varrho v^2}{2}. \tag{28}$$

Výslednicí tlakových sil ve svislém směru je vztlaková síla $\boldsymbol{F}_y$ (obr. 24). Protože tato výslednice neprochází těžištěm profilu, působí na křídlo ještě klopný moment síly o velikosti M_z.

Nyní naše úvahy o aerodynamických silách rozšíříme na případ proudění *skutečného* vazkého plynu. V důsledku nenulové viskozity se bude plyn (vzduch) v tenké mezní vrstvě u povrchu křídla přibrzďovat. To způsobí jednak odporovou sílu $\boldsymbol{F}_x$ působící proti směru pohybu, jednak to ovlivní i velikost vztlakové síly $\boldsymbol{F}_y$ a velikost klopného momentu síly $\boldsymbol{M}_z$ (obr. 26). Při rovnoměrném přímočarém vodorovném pohybu letadla je odporová síla vyrovnávána tažnou silou $\boldsymbol{T}$ motoru, tíhová síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ letounu vztlakovou silou a klopný moment $\boldsymbol{M}_z$ se vnitřními silami přenáší na ocasní stabilizační plochy, které jej aerodynamicky kompenzují.



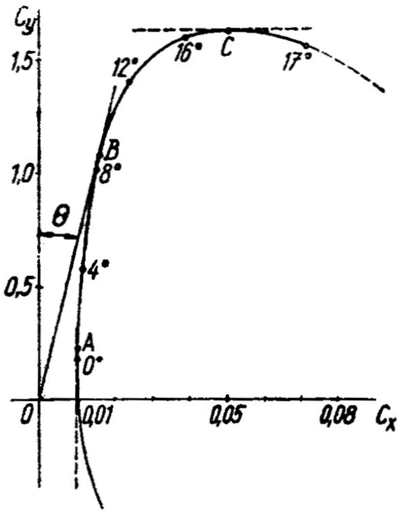
Obr. 26 Síly působící na křídlo: $\boldsymbol{F}_x$ – odporová síla, $\boldsymbol{F}_y$ – vztlaková síla, $\boldsymbol{T}$ – tažná síla, $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ – tíhová síla, M_z – klopný moment síly, $\boldsymbol{R}$ – výsledná aerodynamická síla

Odporová síla a vztlaková síla se v letecké aerodynamice vyjadřují způsobem analogickým výrazu (12). Velikost těchto sil se uvádí ve tvaru

$$F_x = \frac{1}{2} C_x \varrho S v^2, \tag{29}$$

$$F_y = \frac{1}{2} C_y \varrho S v^2, \tag{30}$$

kde za S se bere pro obě síly stejný plošný obsah průmětu křídla do vodorovné roviny, C_x je součinitel odporu a C_y součinitel vztlaku. Vztah mezi C_y a C_x udává graf *polára profilu* (obr. 27). Údaj ve stupních na křivce je úhel náběhu α, pro nějž vztah mezi C_y, C_x platí. Je zřejmé, že v bodě A (0°) je součinitel odporu nejmenší, v bodě C je největší vztlak. Křivka končí v případě daného profilu u hodnoty $\alpha = 17°$, kdy dojde k odtržení proudění od profilu provázené intenzivním vířením vzduchu. To se projeví ztrátou vztlaku a vzrůstem odporu – je to zcela nežádoucí stav při letu, protože vede ke ztrátě stability pohybu letadla.

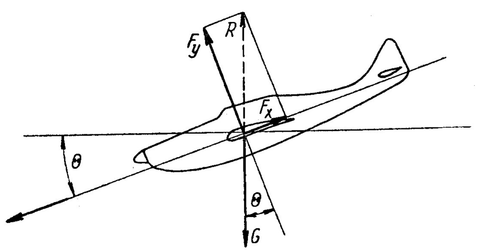


Obr. 27 Polární diagram součinitelů vztlaku (C_y) a odporu (C_x) při různých úhlech náběhu (tzv. *polára profilu*)

4.3 Let a řízení letadel

K posouzení letových vlastností má význam polára celého letadla. Ta má tvar velmi podobný poláře křídla, avšak vzhledem ke zvětšené velikosti odporové síly způsobené trupem letadla, je tato polára posunutá doprava vzhledem k poláře samotného křídla.

Významným bodem na poláře sestrojené pro celé letadlo, je bod B, který je dotykovým bodem tečny vedené k poláře z počátku – pólu 0. Pro něj je poměr $\dfrac{C_x}{C_y}$ nejmenší. Je to bod *nejdelšího klouzání* letadla. Při klouzavém letu nepůsobí na letadlo tažná síla motoru. Odporová síla se kompenzuje složkou tíhové síly – situace je analogická jako při klouzání tělesa po nakloněné rovině za působení tření. Nechť je letadlo při pohybu odkloněno od vodorovné roviny o úhel Θ (obr. 28). Při rovnoměrném přímočarém pohybu musí být výsledná síla nulová a platí tedy složkové rovnice



Obr. 28 Letadlo při rovnoměrném klouzavém letu

$$F_\mathrm{G} \sin \Theta - F_x = 0, \quad -F_\mathrm{G} \cos \Theta + F_y = 0,$$

neboli

$$\mathrm{tg}\, \Theta = \frac{F_x}{F_y} = \frac{C_x}{C_y}.$$

Úhel Θ udává tedy směr, při němž letoun z dané výšky za bezvětří nejdále doletí klouzavým letem. Tento úhel odečteme z poláry celého letadla, což je křivka analogická křivce v obr. 27.

Můžeme také určit rychlost rovnoměrného pohybu klouzavého letu. V rovnováze musí podle obr. 26 být $F_\mathrm{G} = R$, a tedy vzhledem k výrazům (29), (30) dostaneme

$$F_\mathrm{G} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{\varrho S v^2}{2} \sqrt{C_x^2 + C_y^2}.$$

Odtud rychlost letadla

$$v = \sqrt{\frac{2F_\mathrm{G}}{\varrho S \sqrt{C_x^2 + C_y^2}}}.$$

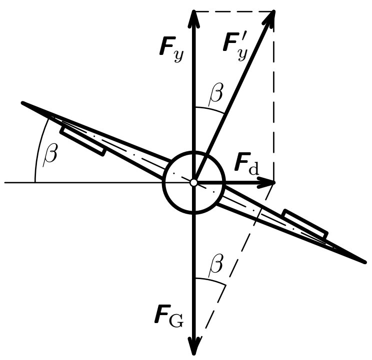
Mezi režimem nejdelšího klouzání letadla a jeho rychlostí je tedy jednoznačná souvislost – pilot může kontrolovat nejvýhodnější úhel Θ pomocí rychloměru.

Významným manévrem letadla je *průlet zatáčkou*. Má-li letadlo vykonat tento manévr, musí se naklonit ke středu zatáčky. Nechť pro jednoduchost je trajektorií letadla oblouk kružnice o poloměru r, ležící ve vodorovné rovině a letadlo nechť letí rychlostí o konstantní velikosti v. Pak se musí naklonit vzhledem k vodorovné rovině o takový úhel β, aby vztlaková síla $\boldsymbol{F}'_y$ a tíhová síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{G} = m\boldsymbol{g}$ po složení daly příslušnou dostředivou sílu $\boldsymbol{F}_\mathrm{d}$ o velikosti

$$F_\mathrm{d} = \frac{mv^2}{r}.$$

Ze silového trojúhelníku (obr. 29) platí $F_\mathrm{d} = F_\mathrm{G} \operatorname{tg} \beta$ a tudíž úhel náklonu musí být

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{v^2}{rg}. \qquad (31)$$



Obr. 29 Letadlo v zatáčce

Pilot naklonění letadla dosáhne vhodným vyklopením křidélek na křídle (viz obr. 30c). Bude-li úhel náklonu menší než úhel daný vztahem (31), vynese to letadlo ze zatáčky (poloměr trajektorie bude větší než r). Bude-li naopak úhel náklonu větší než úhel daný vztahem (31), vtáhne to letadlo do zatáčky (poloměr bude menší než r).

Jak můžeme snadno pozorovat zejména u klouzavého letu velkých ptáků (např. dravců), pták se při letu do zatáčky instinktivně naklání stejně, jak jsme popisovali u letadla. Způsob, kterým toho dosahuje je ovšem jiný – pomocí svalů vhodně protilehle naklápí křídla anebo jejich části.

Vraťme se ještě k obr. 29. Z rovnováhy sil ve svislém směru je zřejmé, že musí být $\boldsymbol{F}_y = \boldsymbol{F}_\mathrm{G}$ a tudíž pro vztlakovou sílu $\boldsymbol{F}'_y$ letadla v zatáčce platí

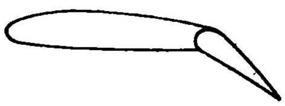
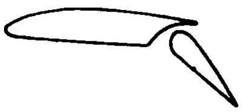
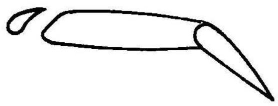
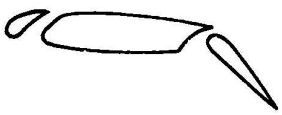
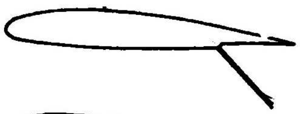
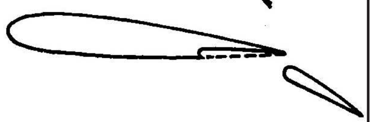
$$F'_y = \frac{F_y}{\cos\beta} = \frac{mg}{\cos\beta} > F_y.$$

Vlétne-li tedy letadlo určitou rychlostí $\boldsymbol{v}$ do zatáčky, musí pilot zajistit, aby na letadlo působila větší vztlaková síla než při letu přímým směrem. Toho lze dosáhnout vhodným zvětšeným úhlu náběhu α u křídel. Pilot tedy při průletu zatáčkou musí manipulovat nejen směrovkou a křidélky, nýbrž i s výškovkou – jinak letadlo ztrácí při průletu zatáčkou výšku. Proto se manévr zatáčky s ohledem na možnou havárii nedoporučuje bezprostředně po startu, kdy má letadlo malou výšku i rychlost.

Významnými fázemi letu jsou *start* a *přistání*. Při startu musí letadlo rozjezdem po zemi dosáhnout takové rychlosti, při níž vztlaková síla překoná tíhovou sílu. Při přistávání se naopak musí zmenšit rychlost tak, aby dojezd na zemi nebyl dlouhý (a aby na druhé straně nedošlo při zmenšování rychlosti ke ztrátě vztlaku a zřícení letadla).

Startovací a přistávací manévr usnadňují různé klapky a štěrbiny (sloty) na křídlech. Pro určitou rychlost zvětšují vztlak. Při jejich aplikaci lze pak stejný vztlak dosáhnout při menší rychlosti. Jejich přehled je v tab. 1.

Tab. 1 Klapky a sloty na křídlech ke zvětšení vztlaku (podle [3])

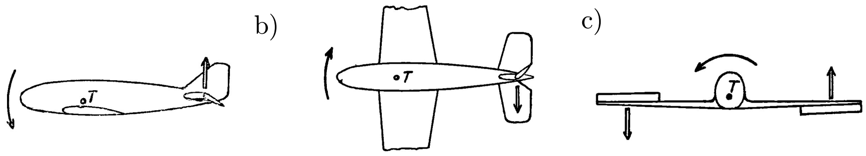
	Název	**Relativní změna vztlaku**
	Základní profil	1
	Jednoduchá klapka	1,51
	Štěrbinová klapka	1,53
	Pevná ploška při náběžné hraně (slot)	1,37
	Pevný slot a jednoduchá klapka	1,69
	Pevný slot a štěrbinová klapka	1,75
	Odklápěcí klapka	1,67
	Fowlerova klapka	1,88

Pomocí klapky se změní aerodynamické poměry tím, že se změní zakřivení profilu, event. i jeho plošný obsah (v případě Fowlerovy klapky). Pomocí štěrbiny (sloty), která se vysouvá na náběžné hraně, se zabraňuje předčasnému odtržení proudnic od profilu a zvětšuje se tak hodnota kritického úhlu náběhu. Činnost těchto různých úprav na křídlech můžeme sledovat zejména u velkých dopravních letadel. K nim přistupují i brzdné klapky, které se po dosednutí letadla vysunou ve směru kolmém k rychlosti, zvětší odporovou sílu letadla, a tím přispívají k brzdění dojíždějícího stroje.

Podobně probíhá přistávací manévr ptáků, jak můžeme snadno sledovat zejména u velkých ptáků, např. při přistávání labutě nebo pelikána na vodní hladině. Pták však ovlivňuje odporovou sílu tím, že čelní plochu zvětšuje natáčením celých křídel. Elegantní brzdný manévr po přistání provádí labuť při dotyku ploutví na nohách s vodní hladinou.

Řízení letadla, tedy možnost změny šesti souřadnic udávajících jeho polohu, se uskutečňuje koordinací tří kormidel (obr. 30) a tahu motoru. Působení kormidel je aerodynamické a jejich činnost je zřejmá z obr. 30.

a) b) c)



Obr. 30 Činnost kormidel a) výškovky, b) směrovky, c) křidélek

4.4 Pohon letadel

K vytvoření tažné síly u motorového letadla slouží buď vrtule (obr. 11) anebo reaktivní síla proudového motoru (obr. 13, 14). Vrtule se roztáčí buď zážehovým pístovým motorem (u malých sportovních letadel) anebo spalovací turbínou (u malých dopravních letadel). Proudové reaktivní motory se užívají u velkých dopravních letadel anebo u rychlých vojenských letadel (u stíhaček).

U bezmotorových letadel (kluzáků, větroňů) slouží k vytvoření hnací tažné síly výhradně složka tíhové síly (přesněji průmět tíhové síly letadla do tečny v příslušném bodě trajektorie). K dosažení potřebné výšky ke klouzavému letu je vhodné využívat různých teplých stoupavých proudů vzduchu (tzv. „termiku“). Počáteční výšky při startu se dosahuje vytažením letadla na laně – buď navijákem s podporou protivětru anebo tažným motorovým letadlem.

5 Řešení úloh

1. $R_0 = 2\pi r^2 g h_0 \varrho = 39$ N, $R = 2\pi r^2 g \varrho h$.

2. a) $\boldsymbol{R}_\mathrm{a} = \varrho S\ v^2(1+\cos\alpha)\boldsymbol{v}^\circ$,

b) Uplatní se rozdílová rychlost $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$. Hmotnostní tok se zmenší na $Q'_\mathrm{m} = \varrho S\ (v-u)$. Síla $\boldsymbol{R}_\mathrm{b} = \varrho S\ (v-u)^2(1+\cos\alpha)\boldsymbol{v}^\circ$.

3. $v_2 = \sqrt{v_1^2 + \dfrac{2\Delta p}{\varrho}} = 117\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

4. $T = \dfrac{\pi d^2}{2}\varrho u^2 = 2{,}2$ kN, $P = Fv = 9{,}1$ kW.

5. Tažná síla raketového motoru $\boldsymbol{T} = -S[\varrho u^2 + (p - p_\mathrm{a})]\boldsymbol{u}^\circ$.

6. Pohybová rovnice $(m_0 - Q_\mathrm{m} t)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -Q_\mathrm{m} u$.

Rychlost $v = v_0 + u \ln \dfrac{m_0}{m_0 - Q_\mathrm{m} t}$.

7. Meščerského rovnice má tvar $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g\dfrac{R^2}{r^2} + uk$. Po násobení rovnice $\mathrm{d}r = v\mathrm{d}t$ bude na levé straně výraz $v\mathrm{d}v$ a na pravé straně $\mathrm{d}r$, tedy diferenciál proměnné r. Rovnice má tedy separované proměnné a můžeme ji pro dané meze integrovat: rychlost v mezích $[0, v]$, polohu v mezích $[R, r]$. Pak rychlost v obecné poloze je

$$v = \sqrt{2uk(r-R) + 2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)}.$$

Literatura

[1] Bauer, F. – Brůha, O. – Jaňour, Z.: *Základy proudění.* Technický průvodce 18. Vědecko-technické nakladatelství, Praha, 1950.

[2] Horák, Z. – Krupka, F. – Šindelář, V.: *Technická fyzika.* SNTL, Praha, 1960 a 1961.

[3] Krýzl, V. – Buňata, O.: *Letadla.* SNTL, Praha, 1954.

[4] Růžička, B. – Popelínský, L.: *Rakety a kosmodromy.* Naše vojsko, Praha, 1986.

[5] Vybíral, B.: *Mechanika tekutin.* GAUDEAMUS, Hradec Králové, 1999.

[6] Vybíral, B. – Zdeborová, L.: *Odporové síly.* Knihovnička FO č. 48, MAFY, Hradec Králové, 2001.

[7] Vybíral, B. – Zdeborová, L.: *Pohyb těles s vlivem odporových sil.* Knihovnička FO č. 55, MAFY, Hradec Králové, 2002.

[8] Vybíral, B.: *Mechanika ideálních kapalin.* Knihovnička FO č. 62, MAFY, Hradec Králové, 2003.

[9] Vybíral, B.: *Mechanika ideálních plynů.* Knihovnička FO č. 67, MAFY, Hradec Králové, 2004.

[10] Budlovský, J.: *Motory.* Polytechnická knižnice, 96. sv. I. řady, SNTL, Praha 1967.