Aproximace ve fyzikálních úlohách

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Martin Kapoun

Obsah

Úvod

Při kvantitativním popisu přírodních dějů se často setkáváme s mnoha vlivy a různou šířkou škály jejich závažnosti. Chceme-li se dopracovat k výsledku, jsme nuceni některé jevy zanedbat a vliv jiných zahrnout do úvah jen ve zjednodušené, modelové podobě. Tuto skutečnost si někdy ani neuvědomujeme, viz. lineární vztah

$$l(t) = l_0[1 + \alpha(t - t_0)]$$

pro délku tyče v závislosti na její teplotě. Zde totiž mlčky předpokládáme, že součinitel teplotní délkové roztažnosti α se s teplotou nemění, což je však pravda jen pro „menší“ teplotní intervaly. Při větším rozdílu teplot už tato závislost lineární není.

Je však třeba zároveň podotknout, že lineární přiblížení, se kterým běžně pracujeme, je pro naše úvahy na úrovni středoškolské fyziky většinou postačující.

Jindy o použitém přiblížení víme a rádi je přijímáme. Například trojrozměrné těleso mění své rozměry podle vztahu

$$V(t) \approx V_0[1 + 3\alpha(t - t_0)] = V_0[1 + \beta(t - t_0)].$$

Ukazuje se totiž, že vyčíslovat součin[1]

$$a_0[1 + \alpha(t - t_0)] \cdot b_0[1 + \alpha(t - t_0)] \cdot c_0[1 + \alpha(t - t_0)] = a_0 b_0 c_0[1 + \alpha(t - t_0)]^3$$

je zbytečně zdlouhavé a vede prakticky ke stejnému výsledku.

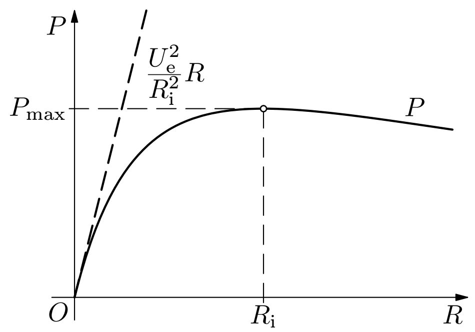
Nakonec si ještě ukažme, jak se přiblížení může stát pomůckou nejen rutinní, ale i objevnou. Když ke zdroji o elektromotorickém napětí U_e a vnitřním odporu R_i připojíme spotřebič o odporu R, projde obvodem proud $I = \dfrac{U_\mathrm{e}}{R + R_\mathrm{i}}$ a výkon na spotřebiči bude roven

$$P = RI^2 = U_\mathrm{e}^2 \frac{R}{(R + R_\mathrm{i})^2}.$$

Ne vždy nás však zajímá celý rozsah funkční závislosti $P = P(R)$ (výkon na spotřebiči jako funkce odporu spotřebiče); často se omezujeme jen na konkrétní obor hodnot R.

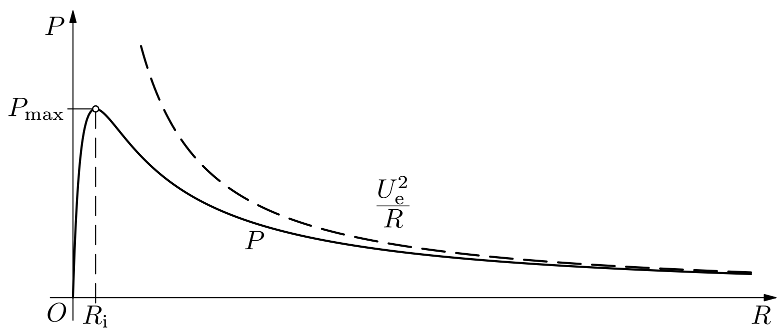
[1] Výše uvedené přiblížení je opět možno použít v situacích, kdy teplotní rozdíly nejsou příliš velké. Toto přiblížení se opírá o aproximaci, že $(1 + x)^3 \approx 1 + 3x$ pro $x \ll 1$, a to je splněno právě pro malé teplotní rozdíly, jak si ještě dále ukážeme.

1. Ve zkratovém režimu, tj. pro velmi malé hodnoty odporu spotřebiče vzhledem k vnitřnímu odporu zdroje $R \ll R_\mathrm{i}$, zůstane ve jmenovateli přibližně jen výraz R_i^2, spotřebičem bude procházet proud nakrátko $I_\mathrm{k} = \dfrac{U_\mathrm{e}}{R_\mathrm{i}}$ a výkon pak bude přímo úměrný odporu spotřebiče, tj. $P = \dfrac{U_\mathrm{e}^2}{R_\mathrm{i}^2} R$ (viz přímková část začínající v bodě O na obr. 1a). Tuto aproximaci běžně používáme ve tvaru $P \approx R I_\mathrm{k}^2$.



Obr. 1a) Závislost výkonu na spotřebiči na odporu R spotřebiče pro $R \ll R_\mathrm{i}$

2. Naopak při velké zátěži $R \gg R_\mathrm{i}$ lze zanedbat R_i vzhledem k R. Výkon na spotřebiči pak bude dán přibližným vztahem $P \approx \dfrac{U_\mathrm{e}^2}{R}$. V tomto případě pak můžeme říci, že výkon na spotřebiči je od jisté hodnoty odporu R nepřímo úměrný odporu R spotřebiče (viz obr. 1b).



Obr. 1b) Závislost výkonu na spotřebiči na odporu R spotřebiče pro $R \gg R_\mathrm{i}$

Toto jsou však pouze vztahy získané na základě aproximací. Ty nám dovolují přibližně odhadnout tvary křivek vybraných částí v obr. 1a a obr. 1b, a tím nám pomohou odůvodnit, že původní vztah pro výpočet výkonu P má také nějaké maximum a popř. určit jeho přibližnou polohu. Pomocí odhadů však nezjistíme, kde přesně se toto maximum nachází. Odvozené vztahy nám nicméně umožňují provádět různé odhady, které v praxi v řadě situací nejvíce potřebujeme.

Aproximace jsou nedílnou součástí našeho života, a tedy i fyziky. Aby však splnily svůj účel, je třeba vědět, v jakých situacích je možno je použít. To bude cílem tohoto textu – naučit se vytvářet fyzikální modely situací za použití vhodných aproximací. Nejčastěji používané aproximace a jejich užití probereme nyní podrobněji na příkladech.

1 Aproximace mocninné funkce

Velmi často se setkáváme s potřebou zjednodušit výraz $(1+x)^n$, v němž jednička odpovídá základní hodnotě fyzikální veličiny a velmi malé x představuje slabý vliv či opravu, n je přirozené číslo. Pokud tedy $|x| \ll 1$, lze v rozvoji podle binomické věty

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2 + \ldots + nx^{n-1} + x^n$$

ponechat jen základ 1 a první opravný člen nx, neboť vyšší mocniny činí již tak malé x zanedbatelnými. Platí tedy

$$\boxed{(1+x)^n \approx 1 + nx.} \tag{1}$$

Ukažme si použití tohoto vztahu na několika příkladech.

Příklad 1 – teplotní objemová roztažnost

Odvoďte vztah pro teplotní objemovou roztažnost ve tvaru, jak ho znáte z učiva molekulové fyziky:

$$V = V_0(1 + \beta\Delta t),$$

kde $\beta = 3\alpha$, pomocí vztahu pro teplotní délkovou roztažnost $l = l_0(1 + \alpha\Delta t)$, který platí pro nepříliš velké teplotní rozdíly.

Řešení

Budeme uvažovat, že máme těleso tvaru kvádru o rozměrech a_0, b_0, c_0 při teplotě t_0. Po zahřátí kvádru na teplotu t se jeho rozměry změní na a, b, c. Každý z rozměrů kvádru změní svou hodnotu podle vztahu pro teplotní délkovou roztažnost, tedy platí

$$a = a_0(1 + \alpha\Delta t), \qquad b = b_0(1 + \alpha\Delta t), \qquad c = c_0(1 + \alpha\Delta t).$$

Označme $V_0 = a_0b_0c_0$, $\Delta t = t - t_0$. Pro objem V kvádru při teplotě t pak platí

$$V = abc = a_0b_0c_0(1 + \alpha\Delta t)^3 = V_0[1 + 3 \cdot 1^2 \cdot \alpha\Delta t + 3 \cdot 1 \cdot (\alpha\Delta t)^2 + (\alpha\Delta t)^3].$$

V tomto vztahu můžeme členy s vyššími mocninami zanedbat, pak dostaneme

$$V = V_0(1 + 3\alpha\Delta t) \approx V_0(1 + \beta\Delta t).$$

Ke stejnému výsledku bychom dospěli přímým užitím vztahu (1).

Na velmi podobné úvaze je také založeno pravidlo o velikosti maximální relativní chyby[2] součinu dvou měřených veličin. Ukažme si to na dalších příkladech.

[2] Odchylky charakterizující nepřesnost měžení nazýváme *chyby měření*.

Příklad 2 – chyba měření

Uvažujme, že máme válcový vzorek o průměru d a výšce h. Průměr d válce naměříme s absolutní chybou Δd, výšku válce s absolutní chybou Δh. Odhadněte maximální relativní chybu měření objemu.

Řešení

Pro objem válce platí vztah

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h.$$

V nejméně příznivém případě platí

$$V' = \frac{\pi}{4}(d + \Delta d)^2 \cdot (h + \Delta h) = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h \left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right).$$

Potom

$$V' \approx V\left(1 + 2\frac{\Delta d}{d}\right) \cdot \left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right) \approx V\left(1 + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h}\right),$$

kde člen $\frac{\Delta d}{d} \cdot \frac{\Delta h}{h}$ jako člen druhého řádu malosti již zanedbáváme.

Vidíme, že relativní chyba objemu $\frac{V' - V}{V}$ bude rovna součtu $2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h}$, což potvrzuje poučku, že maximální relativní chyba součinu několika veličin je rovna součtu jejich relativních chyb.

Opačný případ, že totiž válec může mít rozměry $d - \Delta d$, $h - \Delta h$, dá stejný výsledek.

Příklad 3 – tolerance výrobku

Uvažujme kulovou nádobu o průměru d. Budeme hledat maximální chybu Δd, které se při konstrukci nádoby můžeme dopustit, nemá-li se její objem lišit od plánovaného objemu o více než ΔV.

Řešení

Při řešení budeme uvažovat, že pokud v důsledku chyby Δd sestrojíme nádobu o průměru $d - \Delta d$, bude mít nádoba objem

$$\frac{\pi}{6}(d - \Delta d)^3 = \frac{\pi}{6} d^3 \left(1 - \frac{\Delta d}{d}\right)^3 \approx \frac{\pi}{6} d^3 \left(1 - \frac{3\Delta d}{d}\right),$$

tj. menší o $\frac{\pi}{2} d^2 \Delta d$. Tento rozdíl nesmí přesáhnout mez ΔV, odkud vychází

$$\Delta d \leq \frac{2\Delta V}{\pi d^2}.$$

Číselně vychází například pro $d = 1{,}0$ m a $\Delta V = 10$ litrů tolerance $\Delta d \leq 7$ mm, tedy necelý centimetr.

Stejné řešení by měla i situace, pokud bychom uvažovali nádobu o průměru $d + \Delta d$.

Příklad 4 – objem kulové slupky

Vypočtěte objem tenké kulové slupky mezi vnější koulí o poloměru r a vnitřní soustřednou koulí o poloměru $(r - \Delta r)$.

Řešení

Objem prostoru mezi vnější koulí o poloměru r a vnitřní soustřednou koulí o poloměru $r - \Delta r$ lze počítat přímo jako rozdíl

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi[r^3 - (r - \Delta r)^3].$$

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi[3r^2\Delta r - 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3] = 4\pi r^2 \Delta r \left[1 - \frac{\Delta r}{r} + \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2\right],$$

Je-li však slupka tenká, tj. je-li $\Delta r \ll r$, pak

$$\Delta V \approx 4\pi r^2 \Delta r.$$

Vidíme, že objem slupky lze pohodlně vyjádřit jako součin povrchu $4\pi r^2$ slupky a její tloušťky Δr.

–

Platnost vztahu (1) nyní rozšíříme na celá čísla. Vzhledem k tomu, že pro malá x zanedbáváme členy x^2 a vyšší, lze psát

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1-x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1-x}{1-x^2} \approx 1 - x,$$

tedy

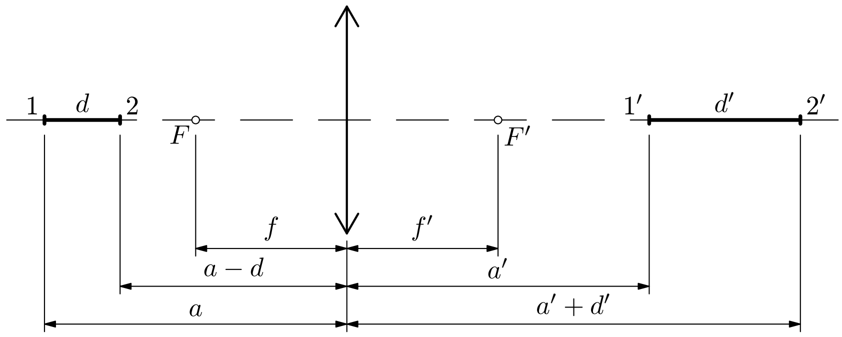
$$\boxed{\frac{1}{1+x} \approx 1 - x.} \tag{2}$$

Toto je ovšem vztah (1) pro $n = -1$. Stejně užitečný je i odhad převrácený, tj.

$$\boxed{\frac{1}{1-x} \approx 1 + x.} \tag{3}$$

Příklad 5 – podélné zvětšení tenké čočky

Mějme tenkou spojku o ohniskové vzdálenosti f. Ve vzdálenosti a od tenké čočky umístíme podél optické osy předmět malé délky d, označíme d' délku obrazu předmětu (obr. 2). Odvoďte vztah pro podélné zvětšení $L = \frac{d'}{d}$ za předpokladu, že $d \ll a$.



Obr. 2 Zobrazení tenkou spojkou

Řešení

Napíšeme zobrazovací rovnici tenké čočky pro body 1 a 2 na obr. 2. Platí

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{a-d} + \frac{1}{a'+d'} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{a\left(1 - \frac{d}{a}\right)} + \frac{1}{a'\left(1 + \frac{d'}{a'}\right)} \approx \frac{1}{a}\left(1 + \frac{d}{a}\right) + \frac{1}{a'}\left(1 - \frac{d'}{a'}\right).$$

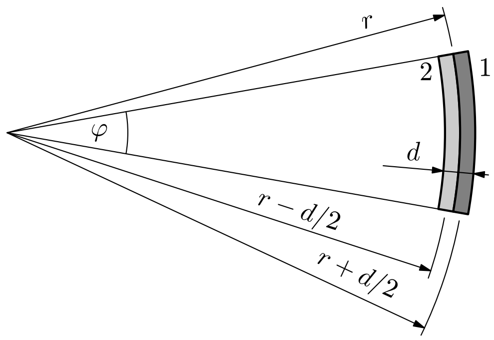
Porovnáním získáme

$$\frac{d}{a^2} - \frac{d'}{a'^2} = 0, \text{ a tedy } L = \frac{d'}{d} = \frac{a'^2}{a^2} = Z^2,$$

kde $Z = -\frac{a'}{a}$ je příčné zvětšení, jak je známe z odvození u tenké čočky, ať už spojky či rozptylky.

Příklad 6 – bimetalový teploměr

Uvažujme dva tenké pásky stejné tloušťky d z různých kovů pevně spojené po celé ploše, v níž se dotýkají. Při teplotě t_0 mají oba pásky stejnou délku l_0 a jsou rovné. Teplotní součinitele délkové roztažnosti materiálů jsou α_1, α_2, $\alpha_1 > \alpha_2$. Nestejná teplotní roztažnost obou materiálů způsobí, že se pásky budou se změnou teploty deformovat (obr. 3). Odvoďte závislost poloměru křivosti bimetalového pásku r na teplotě t vzorku.



Obr. 3 Bimetalový pásek

Řešení

Pro délky l_1, l_2 os pásků po zahřátí na teplotu t platí

$$l_1 = l_0(1 + \alpha_1 \Delta t), \qquad l_2 = l_0(1 + \alpha_2 \Delta t),$$

kde $\Delta t = t - t_0$. Zároveň také z obr. 3 vidíme, že

$$l_1 = \left(r + \frac{d}{2}\right)\varphi, \qquad l_2 = \left(r - \frac{d}{2}\right)\varphi.$$

Porovnáním vztahů pro l_1, l_2 dostaneme

$$\frac{1 + \alpha_1 \Delta t}{1 + \alpha_2 \Delta t} = \frac{r + \dfrac{d}{2}}{r - \dfrac{d}{2}}. \tag{4}$$

S ohledem na hodnotu členů $\alpha \Delta t$ vzhledem k jedničce lze levou stranu upravit na tvar $(1 + \alpha_1 \Delta t)(1 - \alpha_2 \Delta t) \approx 1 + (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t$. Podobně dovoluje srovnání $d \ll r$ upravit pravou stranu na tvar $\left(1 + \dfrac{d}{2r}\right)^2 \approx 1 + \dfrac{d}{r}$.

Po dosazení do rovnice (4) dostaneme

$$1 + (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t \approx 1 + \frac{d}{r},$$

z čehož

$$r \approx \frac{d}{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t} = \frac{d}{(\alpha_1 - \alpha_2)(t - t_0)}.$$

Poznámka:

V tomto případě lze úlohu řešit také bez použití aproximací. Pokud bychom neprováděli žádnou aproximaci a vyjádřili r přímo ze vztahu (4), dostaneme pro r vztah

$$r = \frac{d}{(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t} + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \frac{d}{2}.$$

V tomto vztahu je druhý člen teplotně nezávislý a určuje chybu aproximace. Pak se nabízí otázka o oprávněnosti použít odhad (abychom si ušetřili práci s úpravami), zda vzniklá chyba nebude příliš veliká.

Pokud bychom uvažovali např. tepelnou bimetalovou pojistku o tloušťce $d = 1{,}0$ mm, složenou ze zinkového pásku $\alpha_2 = 0{,}029 \cdot 10^{-3}$ K^{-1} a měděného pásku $\alpha_1 = 0{,}017 \cdot 10^{-3}$ K^{-1}, a zahřáli ji z teploty 20 °C na 400 °C, dostaneme

$$r = 219{,}3 \text{ mm} + 1{,}9 \text{ mm},$$

což potvrzuje oprávněnost odhadu pro tuto situaci.

Příklad 7 – gravitační pole Země

Odvoďte pomocí Newtonova gravitačního zákona vztah pro výpočet intenzity gravitačního pole[3] Země ve výškách $h \ll R_Z$ nad povrchem Země.

Řešení

Označme M_Z hmotnost Země, R_Z její poloměr, a_g gravitační zrychlení nad povrchem Země. Pokles intenzity gravitačního pole s rostoucí výškou h nad povrchem Země lze vyjádřit z Newtonova gravitačního zákona:

$$F_g = \varkappa \frac{m M_Z}{(R_Z + h)^2} = m a_g,$$

z čehož

$$a_g = \varkappa \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}.$$

Tento vztah můžeme upravit na tvar

$$a_g = \varkappa \frac{M_Z}{R_Z^2} \cdot \frac{R_Z^2}{(R_Z + h)^2} = a_{g0} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{h}{R_Z}\right)^2} = a_{g0} \left(1 + \frac{h}{R_Z}\right)^{-2}.$$

Pokud bychom uvažovali výšky v atmosféře, kdy je $h \ll R_Z$, pak můžeme psát

$$a_g \approx a_{g0} \left(1 - 2\frac{h}{R_Z}\right).$$

[3] Z definice intenzity gravitačního pole $\boldsymbol{K} = \frac{F_g}{m}$ plyne rovnost $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a}_g$.

Z tohoto vztahu vidíme, že pokles intenzity gravitačního pole Země lze v relativně malých výškách nad povrchem Země považovat za lineární.[4]

Toto by pro nás bylo zajímavé např. při studiu dějů, které s velikostí intenzity gravitačního pole souvisejí, např. kmitů těles. Ve vztazích pro periodu kmitavých pohybů se však g vyskytuje pod odmocninou. Musíme proto přibližné vztahy (1), (2) a (3) rozšířit i na racionální mocnitele.

Nechť tedy je opět $|x| \ll 1$ a zkoumejme, jak lze upravit např. výraz $\sqrt{1+x}$. Budeme uvažovat, že podle předchozího textu platí

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \alpha x,$$

kde α bude hledaný koeficient. Po umocnění dostaneme

$$1 + x = 1 + 2\alpha x + \alpha^2 x^2.$$

Vzhledem k tomu, že $|x| \ll 1$, zanedbáme vyšší mocniny x a porovnáme koeficienty v rovnosti $1 + x \approx 1 + 2\alpha x$, z čehož dostaneme $\alpha = \dfrac{1}{2}$. Pak můžeme psát

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}. \tag{5}$$

Tento postup lze zobecnit i pro libovolnou n-tou odmocninu. Pak tedy bychom pro α odvodili $\alpha = \dfrac{1}{n}$. Obecně platí

$$\boxed{\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}.} \tag{6}$$

Vzhledem k tomu, že pro m-tou mocninu platí obdobný vztah

$$(1+x)^m \approx 1 + mx,$$

lze psát

$$\boxed{(1+x)^{\frac{m}{n}} \approx \left(\sqrt[n]{1+x}\right)^m \approx \left(1 + \frac{x}{n}\right)^m \approx 1 + \frac{m}{n}x.} \tag{7}$$

Proces, při němž obecné iracionální číslo vyjádříme jako limitu posloupnosti čísel racionálních, pak dovoluje rozšíření přibližného vztahu (7), resp. úvodního vztahu (1) i na všechna čísla reálná:

$$\boxed{(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x,} \tag{8}$$

pro libovolné α reálné, pokud $|x| \ll 1$.

[4] V dalším textu při studiu kmitavých pohybů budeme považovat veličinu $a_\mathrm{g} \doteq g$, což prakticky bude znamenat, že nebudeme uvažovat rotaci Země.

Příklad 8 – matematické kyvadlo

Odvoďte vztah pro výpočet periody matematického kyvadla délky l, bude-li se kyvadlo nacházet ve výšce $h \ll R_Z$ nad hladinou moře. Odvozený vztah pak použijte k výpočtu relativní chyby periody kmitu ve Vysokých Tatrách na Lomnickém štítu. O kolik sekund se zpozdí pohyb matematického kyvadla a) za každou hodinu, b) za jeden den?

Řešení

Pro periodu matematického kyvadla umístěného na povrchu Země platí vztah $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$. Ve výšce h nad povrchem Země se perioda prodlouží na

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0\left(1 - 2\dfrac{h}{R_Z}\right)}} \approx T_0\left(1 + \frac{h}{R_Z}\right).$$

Relativní chyba $\dfrac{\Delta T}{T_0}$ periody kmitu pak bude činit

$$\frac{\Delta T}{T_0} \approx \frac{h}{R_Z} = \frac{2\,632}{6\,371 \cdot 10^3} = 4{,}1 \cdot 10^{-4}.$$

Stejná relativní chyba vznikne i v delším časovém intervalu.

a) Každou hodinu se tedy kyvadlo zpozdí o $\Delta t_1 = 4{,}1 \cdot 10^{-4} \cdot 3\,600\ \mathrm{s} = 1{,}5\ \mathrm{s}$.

b) Za jeden den by tato chyba činila $\Delta t_2 = 4{,}1 \cdot 10^{-4} \cdot 86\,400\ \mathrm{s} = 35{,}4\ \mathrm{s}$, tedy již více než půl minuty.

–

Velmi často se aproximace používají ve speciální teorii relativity. Zde vystupuje známý člen $\beta = \dfrac{v}{c}$ jako podíl rychlosti předmětu vzhledem k pozorovateli a rychlosti světla ve vakuu. Známý vztah pro výpočet kinetické energie tělesa jako rozdílu celkové energie $E = mc^2$ a klidové energie $E_0 = m_0c^2$ lze při znalosti závislosti hmotnosti tělesa na jeho rychlosti $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ přepsat do tvaru

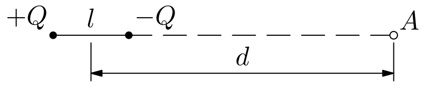
$$E_\mathrm{k} = E - E_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}c^2 - m_0c^2.$$

Pro $v \ll c$ bude

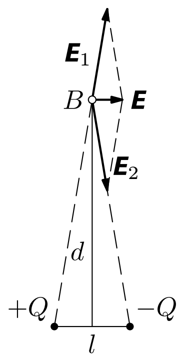
$$E_\mathrm{k} \approx m_0c^2\left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1\right) = \frac{1}{2}m_0v^2.$$

Příklad 9 – elektrické pole dipólu

Elektrickým dipólem rozumíme soustavu dvou nábojů $+Q$ a $-Q$ umístěných ve vzdálenosti l od sebe. Odvoďte přibližný vztah pro výpočet a) intenzity elektrického pole v bodě A na spojnici obou nábojů (obr. 4 a)), b) intenzity elektrického pole v bodě B v rovině souměrnosti dipólu ve vzdálenosti d od středu dipólu (obr. 4 b)), přičemž $d \gg l$.



Obr. 4 a) Elektrický dipól



Obr. 4 b) Elektrický dipól

Řešení

a) Jak vidíme z obr. 4 a), platí pro velikost intenzity elektrického pole od náboje $+Q$ vztah $E_1 = \dfrac{kQ}{\left(d + \dfrac{l}{2}\right)^2}$, a od náboje $-Q$ vztah $E_2 = \dfrac{kQ}{\left(d - \dfrac{l}{2}\right)^2}$, kde $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$. Náboje mají opačná znaménka, vektory intenzity leží v téže přímce, ale mají opačný směr, a proto můžeme pro velikost výsledné intenzity psát $E = E_2 - E_1$. Po dosazení dostaneme

$$E = kQ\left[\frac{1}{\left(d - \dfrac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(d + \dfrac{l}{2}\right)^2}\right] = \frac{kQ}{d^2}\left[\frac{1}{\left(1 - \dfrac{l}{2d}\right)^2} - \frac{1}{\left(1 + \dfrac{l}{2d}\right)^2}\right].$$

Vzhledem k tomu, že $l \ll d$, lze výše uvedený výraz pomocí aproximací upravit na tvar

$$E \approx \frac{kQ}{d^2}\left[\left(1 + \frac{2l}{2d}\right) - \left(1 - \frac{2l}{2d}\right)\right] = \frac{2kQl}{d^3}.$$

Součin Ql se nazývá *dipólový moment* a je charakteristikou daného dipólu. Výsledek říká, že intenzita elektrického pole dipólu klesá v dostatečných vzdálenostech od dipólu se třetí mocninou vzdálenosti.

b) Podle obr. 4 b) platí $\dfrac{E}{E_1} = \dfrac{l}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + d^2}}$, z čehož

$$E = \frac{l}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + d^2}} E_1 = \frac{l}{\sqrt{d^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}} \frac{kQ}{d^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{kQl}{\left[d^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

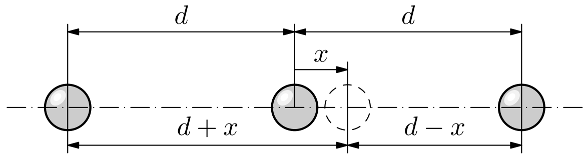
Pro $d \gg l$ můžeme psát

$$E = \frac{kQl}{d^3\left[1 + \left(\frac{l}{2d}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{kQl}{d^3}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{l}{2d}\right)^2\right] \approx \frac{kQl}{d^3}.$$

Velikost intenzity je v tomto případě dvakrát menší než v případě a).

Příklad 10 – kmity mřížky

Kmity krystalové mřížky a studium vlastností pevných látek obecně představují složitou a přitažlivou problematiku. Určitou představu o povaze těchto kmitů si ovšem lze udělat i na podkladě studia velmi hrubého modelu např. kovové mřížky. Při zkoumání pohybu iontu se z trojrozměrné struktury nejprve omezíme na tzv. *lineární řetízek* a posléze si z této soustavy na přímce a ve stejných vzdálenostech od sebe ležících iontů vybereme jen nejbližší sousedy zkoumaného iontu (obr. 5). Odvoďte vzorec pro výpočet frekvence kmitů iontu v krystalové mřížce.



Obr. 5 Kmity v atomu

Řešení

Je-li iont vychýlen z rovnovážné polohy o x směrem, např. k pravému sousedovi, změní se velikosti odpudivých elektrostatických sil od každého souseda tak, že výsledná síla bude mít velikost

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Q^2 \left[\frac{1}{(d-x)^2} - \frac{1}{(d+x)^2}\right]$$

a bude iont vracet zpět do rovnovážné polohy.[5]

Pokud se omezíme na malé výchylky x, což prakticky znamená snížit teplotu krystalu, tj. $x \ll d$, pak můžeme uplatnit přibližné vzorce jako v příkladu 9. Po úpravách vyjde

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4Q^2}{d^3} x = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 d^3} x,$$

což je vynikající závěr: síla vrací iont proti směru výchylky a je přímo úměrná velikosti výchylky, což znamená, že iont v krystalu koná harmonický kmitavý pohyb.

Jenom pro představu se nyní pokusme vyčíslit tuhost této „krystalové pružiny“. Pro jednomocné ionty je $Q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $d = 3{,}0 \cdot 10^{-10}$ m. Pak dostaneme pro tuhost krystalové pružiny k hodnotu

$$k = \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 d^3},$$

$$k = \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \cdot (3{,}0 \cdot 10^{-10})^3} \ \mathrm{N \cdot m^{-1}} = 34 \ \mathrm{N \cdot m^{-1}}.\ )^6$$

Frekvenci kmitů pak určíme ze známého vztahu

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{34}{9{,}3 \cdot 10^{-26}}} \ \mathrm{Hz} = 3 \cdot 10^{12} \ \mathrm{Hz},$$

[5] V našich úvahách budeme předpokládat, že elektrostatické síly jsou mnohem větší než síly gravitačního působení mezi ionty, což pro nás znamená, že gravitační sílu nebudeme v našich výpočtech uvažovat.

[6] Takový výsledek ovšem problematizuje naši každodenní zkušenost s kovy jako pevnými, nesnadno deformovatelnými materiály. Náš model proto stojí za chvilku pozornosti a za pokus hledat cestu od poddajné makroskopické pružinky k tvrdému makroskopickému kusu železa.

Představme si blok oceli o průřezu S a délce l, vnitřně složený ze sério – paralelní kombinace pružinek o tuhosti k. Těch je po délce vzorku sériově (za sebou) zapojeno řádově $\frac{l}{d}$, což ve výsledku představuje jednu dlouhou podélnou pružinu tuhosti $\frac{kd}{l}$. Vedle sebe (paralelně) je ovšem v průřezu S takových pružin řádově $\frac{S}{d^2}$, takže výsledná tuhost soustavy pružinek činí $B = \frac{kd}{l} \cdot \frac{S}{d^2} = \frac{kS}{dl}$. Pokud tuto makropružinu namáháme vnější silou o velikosti F, prodlouží se o $\Delta l = \frac{1}{B} \cdot F = \frac{Fdl}{kS}$. Toto však je Hookův zákon, v němž zavedeme-li poměrné prodloužení $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ a napětí vyvozené ze vzorku namáháním $\sigma = \frac{F}{S}$, dostaneme srovnáním s makroskopickým zněním zákona $\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$ pro hodnotu Youngova modulu pružnosti v tahu E vztah $E = \frac{1}{\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{d^4}$. Číselně pro $d = 2{,}87 \cdot 10^{-10}$ m vychází $E \doteq 140$ GPa. To se sice od hodnoty 220 GPa dost liší, ale řádová shoda je i tak pro náš jednoduchý model spíše úspěchem.

kde za m jsme dosadili hmotnost atomu železa, tj. $m = 56 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg $=$ $= 9{,}3 \cdot 10^{-26}$ kg. Kmity mříže tedy například probíhají hluboko (2 řády) pod frekvenčním oborem viditelného světla. Nečekejme proto, že kov bude citlivý „na barvu", jak je tomu např. u molekul organických barviv, která vykazují krásné, pestré, syté barvy. Nezapomínejme však na použitou aproximaci. Toto je modelový příklad, jak lze soustavu, jejíž kmity jistě nejsou harmonické, studovat v sice zjednodušujícím, ale užitečném přiblížení.

Poznámka

Úloha řešící problém podélných kmitů řetězce molekul byla zadána jako jedna ze soutěžních úloh (2. úloha) na XXIII. MFO (1992) ve Finsku. Na zadání a řešení je možno nahlédnout na stránkách

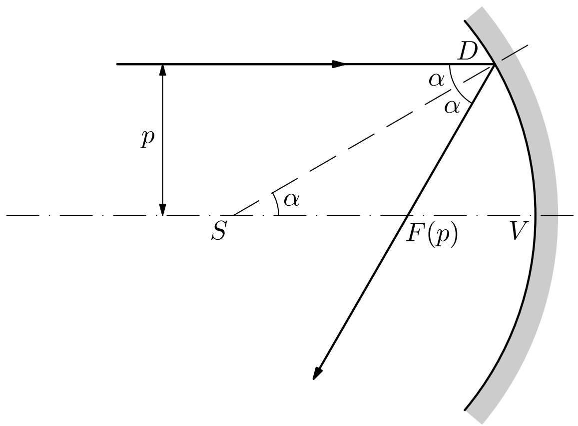
`http://www.jyu.fi/tdk/kastdk/olympiads/`

Příklad 11 – duté zrcadlo

O dutém zrcadle víme, že pokud se omezíme na paprsky rovnoběžné s optickou osou v blízkosti optické osy, tzv. *paraxiální paprsky*, odrážejí se na kulové ploše zrcadla do jednoho bodu, tzv. *ohniska*, jež leží v polovině vzdálenosti mezi středem křivosti S a vrcholem V kulové plochy. Prozkoumejte chod paprsků rovnoběžných s optickou osou mimo paraxiální prostor.

Řešení

Nechť paprsek rovnoběžný s optickou osou ve vzdálenosti p dopadá na kulovou plochu v bodě D a odráží se od ní do „ohniska", které označíme $F(p)$ (obr. 6).



Obr. 6 Duté zrcadlo

Z rovnoběžnosti paprsku s optickou osou a ze zákona odrazu plyne, že trojúhelník SFD je rovnoramenný, tj. že $|SF| = |FD|$. Přitom délku $|FD|$ určíme snadno z pravoúhlého trojúhelníku: $|FD| = \dfrac{p}{\sin 2\alpha}$. Dále platí, že $\sin\alpha = \dfrac{p}{r}$, takže nakonec dostaneme s použitím součtového vzorce $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ vztah

$$|SF| = \frac{p}{2 \cdot \frac{p}{r}\sqrt{1 - \frac{p^2}{r^2}}} = \frac{r}{2}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{r^2}}}.$$

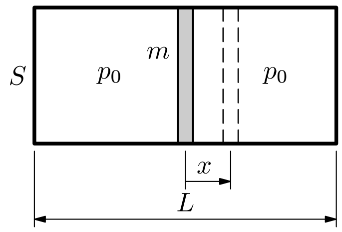
Výsledek jednak potvrzuje, že v přiblížení $p \to 0$ činí ohnisková vzdálenost zrcadla skutečně $f = \dfrac{r}{2}$, a také je dobře vidět, že korekce není řádu $\dfrac{p}{r}$, ale až kvadratická, tedy slabší, tj. že také pro neparaxiální paprsky je bod $F(0)$ „dobrým" ohniskem. Úpravou vychází

$$|SF| \approx \frac{r}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{r^2}\right).$$

Příklad 12 – adiabatické kmity

Uvažujme komoru tvaru válce o příčném průřezu S a délce L na obou koncích uzavřenou. Uprostřed komory je vzduchotěsný píst o hmotnosti m, který rozděluje válec na dvě části o stejném objemu. Na počátku je v obou částech komory stejný tlak o velikosti p_0.

Píst mírně vychýlíme z rovnovážné polohy o $x \ll L$ a uvolníme tak, že začne konat kmitavý pohyb. Při řešení úlohy předpokládejte, že nedochází k tepelné výměně mezi plynem a okolím, tj. že děj je adiabatický. Odvoďte vztah pro výpočet periody T kmitavého pohybu. Tření mezi pístem a válcem neuvažujte. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $m = 0{,}50$ kg, $L = 0{,}50$ m, $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa, $S = 1{,}0\ \mathrm{dm}^2$, $\varkappa = 1{,}40$.



Obr. 7 Adiabatické kmity

Řešení

Stlačením pístu o x vzroste tlak plynu v pravé části komory z hodnoty p_0 na hodnotu p_1 dle rovnice

$$p_0\left(S\frac{L}{2}\right)^{\varkappa} = p_1\left[S\left(\frac{L}{2} - x\right)\right]^{\varkappa},$$

z čehož
$$p_1 = p_0 \left(\frac{\frac{L}{2}}{\frac{L}{2} - x} \right)^{\varkappa}.$$
Pro $x \ll L$ můžeme psát
$$p_1 \approx p_0 \left(1 + \frac{2x}{L}\right)^{\varkappa} \approx p_0 \left(1 + \frac{2\varkappa x}{L}\right).$$
Obdobnou úvahou bychom zjistili, že tlak v levé komoře bude mít hodnotu
$$p_2 \approx p_0 \left(1 - \frac{2\varkappa x}{L}\right).$$
Proto síla vracející přepážku zpět do rovnovážné polohy bude dána vztahem
$$F = S(p_2 - p_1) = -\frac{4p_0 S\varkappa}{L}x,$$
což dokazuje, že malé kmity pístu jsou harmonické. Opět nás tedy vhodná aproximace přivedla k harmonickým kmitům. „Plynová pružina“ má tuhost $k = \frac{4p_0 S\varkappa}{L}$. Perioda kmitů je pak dána vztahem
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{\frac{mL}{\varkappa p_0 S}} = 0{,}042 \text{ s}.$$

–

Typickou oblastí technické praxe, v níž se běžně uchylujeme k aproximacím, je pružná deformace vzorků při silovém namáhání. Lineární vztah mezi poměrnou deformací (zkrácením či prodloužením) ε drátu a vyvolaným napětím σ popisuje velmi dobře Hookův zákon:
$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma,$$
kde E je tzv. *Youngův modul pružnosti v tahu a tlaku*. Pro ocelový drát například činí mez jeho platnosti, tzv. *mez úměrnosti* $\sigma_\mathrm{u} = 600$ MPa, což při hodnotě $E = 220$ GPa odpovídá nepatrnému poměrnému prodloužení $\varepsilon = 2{,}7 \cdot 10^{-3} \ll 1$.

Příklad 13 – protažení drátu

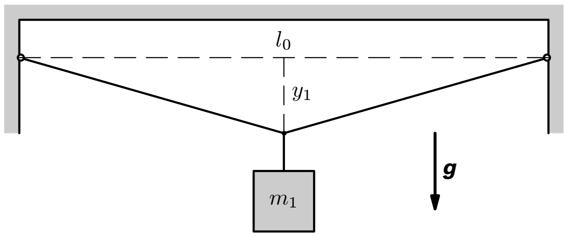
(úloha z FO46B1)

Ocelový drát s obsahem S příčného řezu je vodorovně upevněn mezi dvěma svorkami tuhého rámu, jejichž vzdálenost je l_0. Počáteční normálové napětí drátu je zanedbatelné.

a) Jakou hmotnost m_1 musí mít závaží, které zavěsíme uprostřed drátu (obr. 8), aby normálové napětí v drátu dosáhlo meze úměrnosti σ_u? Jaká bude v tomto případě výchylka y_1 středu drátu? Modul pružnosti v tahu pro daný drát je E.

b) Jak se bude měnit výchylka y středu drátu v závislosti na hmotnosti závaží v intervalu $0 < m < m_1$? Sestrojte graf této závislosti.
Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $S = 1{,}00\ \mathrm{mm}^2$, $E = 2{,}2 \cdot 10^{11}$ Pa, $\sigma_\mathrm{u} = 6{,}0 \cdot 10^8$ Pa, $l_0 = 2{,}0$ m.

Při řešení můžete použít přibližný vztah $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2}$ pro $x \ll 1$.



Obr. 8 Protažení drátu

Řešení

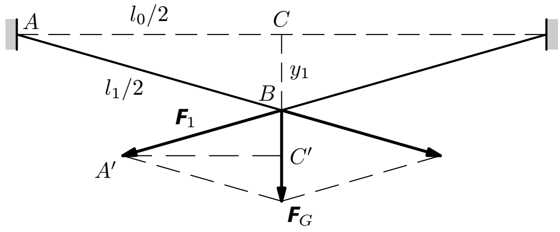
a) Z Hookova zákona a z Pythagorovy věty pro ΔABC (obr. 9) plyne

$$l_1 - l_0 = \frac{\sigma_\mathrm{u}}{E} l_0 = 2\left(\sqrt{\left(\frac{l_0}{2}\right)^2 + y_1^2} - \frac{l_0}{2}\right) = l_0\sqrt{1 + \left(\frac{2y_1}{l_0}\right)^2} - l_0 \approx$$

$$\approx l_0\left(1 + \frac{2y_1^2}{l_0^2} - 1\right) = \frac{2y_1^2}{l_0}\,.$$

Z toho

$$y_1 \approx l_0\sqrt{\frac{\sigma_1}{2E}} = 7{,}4\ \mathrm{cm}\,.$$



Obr. 9 Síly působící na drát

Z podobnosti trojúhelníků ABC a $A'BC'$ dostaneme

$$\frac{F_G}{2F_1} = \frac{y_1}{\frac{l_1}{2}} \approx \frac{y_1}{\frac{l_0}{2}}\,, \qquad F_G = m_1 g \approx \frac{4F_1}{l_0} y_1 \approx \frac{4\sigma_\mathrm{u} S}{l_0} \cdot l_0 \sqrt{\frac{\sigma_\mathrm{u}}{2E}}\,,$$

$$m_1 \approx \frac{S}{g}\sqrt{\frac{8\sigma_\mathrm{u}^3}{E}} = 9{,}03\ \mathrm{kg}\,.$$

b) Obdobně jako v části a) dostaneme

$$F_G = mg \approx \frac{4F}{l_0} y \quad \text{pro každé} \quad 0 < y < y_1$$

a také

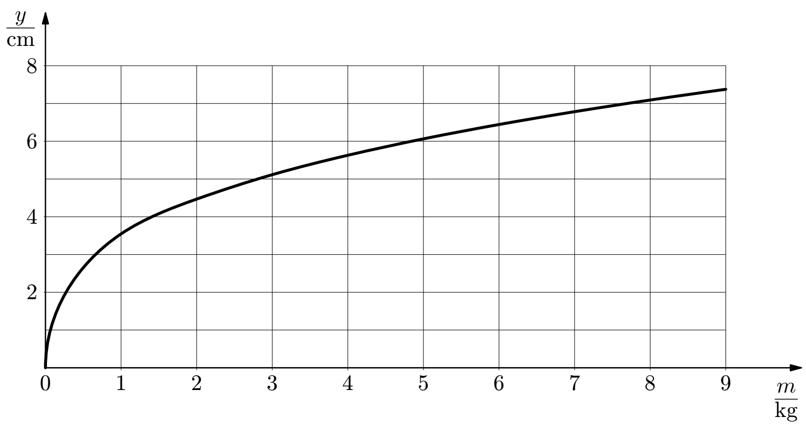
$$\frac{2y^2}{l_0} \approx \frac{Fl_0}{ES}\,, \quad \text{tj.} \quad F \approx \frac{2y^2 ES}{l_0^2}\,.$$

Proto

$$mg \approx \frac{4 \cdot 2y^2 ES}{l_0^3} y\,, \qquad y^3 \approx \frac{mgl_0^3}{8ES}\,, \qquad y \approx l_0 \sqrt[3]{\frac{g}{8ES}} \cdot \sqrt[3]{m}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot

$$\{y\} \approx 0{,}0355 \sqrt[3]{\{m\}} \quad \text{(viz graf na obr. 10).}$$



Obr. 10 Graf závislosti $y = f(m)$

Cvičení 1

1. Uvažujme, že máme tenkou homogenní tyč o hmotnosti m, která má při teplotě t_0 délku l_0. Během dne se změní teplota okolí, a tím vzroste také teplota tyče na hodnotu t, tyč pak bude mít délku l. Tuto tyč zavěsíme na jednom jejím konci a nepatrně vychýlíme. Při teplotě t_0 kmitá tyč s dobou kmitu T_0, po zahřátí na teplotu t se doba kmitu tyče změní na T. Odvoďte přibližný vztah pro změnu doby kmitu tyče ΔT v závislosti na změně teploty Δt. Tyč považujte za fyzické kyvadlo, pro jehož dobu kmitu platí vztah

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ml^2}{mg\frac{l}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}.$$

Odvozený vztah použijte pro případ ocelové tyče o délce 10 metrů, $\alpha = 1{,}1 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$ při odchylce teploty o 10 °C. Odhadněte, jak se změní počet kmitů při této změně teploty za jeden den.

2. Těleso padá volným pádem z výšky h. Odvoďte vztah pro změnu doby pádu, pokud výšku pádu nepatrně zkrátíme o $\Delta h \ll h$.

3. Odhadněte, o jakou délku Δd je v heliocentrické soustavě zkrácen průměr Marsu rovnoběžný s vektorem okamžité rychlosti této planety v důsledku relativistické kontrakce délky. Mars považujte v jeho klidové soustavě za kouli o průměru 6 790 km. K tomu, abyste úlohu vyřešili, je třeba nejprve vypočítat rychlost Marsu v heliocentrické soustavě. Potřebné údaje vyhledejte v tabulkách. Pak použijte vztah pro kontrakci délek $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ a proveďte aproximaci tohoto vztahu pro $v \ll c$.

4. Umělá družice Země s oběžnou dobou T_0 se pohybuje kolem Země po eliptické trajektorii s hlavní poloosou o délce a. Odhadněte, jak vzroste oběžná doba družice, pokud se energie družice zvětší (např. pomocí přídavného pohonu), a tedy družice bude kolem Země obíhat ve větší vzdálenosti $(a + \Delta a)$, bude-li $\Delta a \ll a$.

5. Jakou tloušťku stěny by musela mít dutá krychle o hraně a vyrobená z materiálu o hustotě ϱ, aby se v kapalině o hustotě $\varrho_0 \ll \varrho$ nepotopila?

6. Určete, při jaké rychlosti v tělesa vede klasický vztah pro kinetickou energii, $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}m_0v^2$ k chybě 1 % oproti vztahu relativistickému.

7. Jednou z omezujících podmínek klasického urychlovače – cyklotronu – je relativistický nárůst hmotnosti částic, v jehož důsledku dochází k jejich zaostávání za fází střídavého urychlujícího napětí.

Jakou nejvyšší rychlost může získat částice v cyklotronu, nemá-li relativní přírůstek hmotnosti překročit hodnotu $\delta m = 1{,}00$ %?

2 Aproximace exponenciální a logaritmické funkce

2.1 Aproximace exponenciální funkce

Hodnota exponenciální funkce e^x se pro x v okolí nuly blíží k 1. Jestliže chceme, podobně jako u funkcí mocninných, zachytit i její průběh, je třeba nahlédnout do této problemtiky hlouběji. Eulerovo číslo e lze napsat jako limitu posloupnosti čísel $\mathrm{e}_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; základ se pro $n \to \infty$ blíží k 1, ale o to častěji je opakován. Posloupnost je rostoucí a omezená, její limita $\mathrm{e} = 2{,}718\,28\ldots$.

Když nyní místo samotné limity e budeme pro x v okolí nuly zkoumat chování „náhradníka“ čísla e, pak výraz $\mathrm{e}_n^x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$ lze aproximovat vztahem (8) a dostáváme přibližný vztah

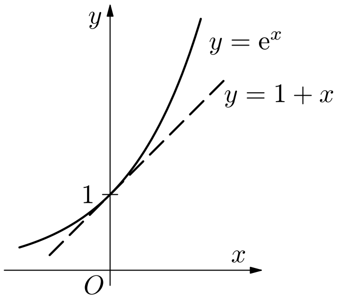
$$\boxed{\mathrm{e}^x \approx \mathrm{e}_n^x \approx 1 + x,} \tag{9}$$

což je velmi významný výsledek: graf exponenciální funkce $y = \mathrm{e}^x$ se v okolí $x = 0$ chová jako přímka se směrnicí jedna, viz obr. 11.

To nám dovoluje – pokud nejsme daleko od počátku – zjednodušit obtížnější výrazy tím, že exponeciální funkci linearizujeme. Tuto myšlenku lze použít např. u populačního růstu, který se ve svých počátcích, kdy byl dostatek obživy a nízká vnitrodruhová kompetice, řídil tzv. *Malthusovou rovnicí*

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{rt},$$

kde N_0 je počáteční počet jedinců a r tzv. *rychlost reprodukce*.



Obr. 11 Exponenciální funkce

Pro malé hodnoty rt, $|rt| \ll 1$, lze rovnici linearizovat, tj.

$$N(t) \approx N_0(1 + rt)$$

a přírůstek populace ΔN za dobu Δt počítat obyčejně jako $\Delta N = N_0 r \Delta t$.

–

Jednoduchou úvahou odvodíme také přibližný vztah

$$\boxed{\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \approx \frac{1}{1+x} \approx 1 - x.} \tag{10}$$

Radioaktivní přeměna

Další situací, kdy je možno se ve fyzice setkat s exponenciální funkcí, je použití tzv. *radiouhlíkové metody* při zjišťování stáří objektů. Tato metoda byla úspěšně použita např. při datování dřevěných předmětů ze staroegyptských hrobů.

Metoda je založena na tom, že uhlík v přírodě je směsí tří izotopů. Dva z nich jsou stabilní: ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ a ${}^{13}_{6}\mathrm{C}$ a ten, který je pro nás důležitý, je radioaktivní izotop ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$. Poměr těchto tří izotopů se nemění, pokud je organismus naživu, protože ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ je v atmosféře stále doplňován srážkami neutronů kosmického záření s atmosférickým dusíkem. Během života organismu je přijímán izotop ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ do organismu dýcháním, potravou a jinou formou. Když organismus odumře, přísun tohoto izotopu ustává. Původní poměr mezi třemi izotopy uhlíku v organických zbytcích se začíná měnit a během času dochází k přeměně uhlíku ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$. Radioaktivní uhlík má poločas přeměny 5 730 let (doba, za kterou se rozpadne právě polovina jader). Měření radioaktivity uhlíku je vhodné pro určování doby vzniku nálezů starých stovky až desetitisíce let.

Za dobu $T = 5\,730$ let poklesne relativní obsah ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ ve vzorku na polovinu. Zjištěním jeho obsahu v poměru k obsahu stabilního ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ je pak možné vypočítat dobu, kdy byl vzorek vyřazen z koloběhu v přírodě.

Z fyziky víme, že množství přeměňujícího se radioaktivního nuklidu klesá exponenciálně s časem podle vztahu

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

kde N je počet nuklidů (nerozpadlých jader), $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T}$ je tzv. *přeměnová konstanta*, N_0 je počet jader na počátku. Za krátkou dobu t, tj. když bude splněna podmínka $\lambda t \ll 1$ (což lze upravit na podmínku $\dfrac{\ln 2}{T} t \ll 1$, z čehož $t \ll T$) lze zákon radioaktivní přeměny převést na tvar

$$N(t) = N_0(1 - \lambda t).$$

Příklad 14 – Tutanchamónova hrobka

Při zjišťování stáří Tutanchamónovy hrobky zjistili archeologové, že koncentrace ${}^{14}_{6}\mathrm{C}$ v předmětech ze dřeva je 0,67 N_0. Odhadněte stáří dřevěných předmětů a tím i dobu, před kterou Tutanchamón zemřel. Při řešení použijte vztah pro výpočet radioaktivní přeměny a) v původním tvaru, b) po aproximaci. Rozhodněte, zda je v tomto případě vhodné aproximaci použít.

Řešení

a) Ze vztahu $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}$, vyjádříme t:

$$t = -\frac{\ln \frac{N(t)}{N_0}}{\lambda} = \frac{\ln \frac{N(t)}{N_0}}{\ln 2} T = -\frac{\ln 0{,}67}{\ln 2} \cdot 5\,730\ \text{let} = 3\,300\ \text{let}.$$

V tomto případě neplatí, že $t \ll T$, a proto není vhodné tuto úlohu řešit pomocí aproximace. Pokud bychom to přesto udělali a z rovnice $N(t) = N_0(1 - \lambda t)$ bychom vyjádřili t, dostali bychom

$$t = \frac{1 - \frac{N(t)}{N_0}}{\lambda} = \frac{1 - \frac{N(t)}{N_0}}{\ln 2} T = \frac{1 - 0{,}67}{\ln 2} \cdot 5\,730\ \text{let} = 2\,700\ \text{let},$$

což potvrzuje náš odhad, že se použití aproximace v tomto případě skutečně nehodí.

Poznámka

Radiouhlíková metoda určování stáří byla objevena roku 1940 a vycházela z předpokladu, že se koncentrace $^{14}_{6}\mathrm{C}$ nemění. Ve skutečnosti však jeho koncentrace kolísá, proto byla tato metoda s využitím datování letokruhů stromů upravena, nicméně stále zůstává jen metodou přibližnou.

Vybíjení kondenzátoru

Strukturálně shodné rovnice, mají také tvarově shodná řešení. Necháme-li kondenzátor o kapacitě C, původně nabitý na napětí U_0, vybíjet přes rezistor o odporu R (viz obr. 12), bude napětí na kondenzátoru klesat podle vztahu

$$U(t) = U_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}.$$

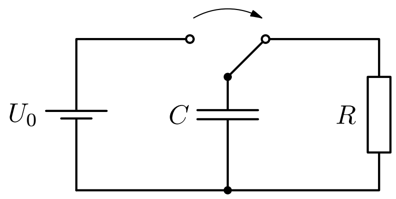
Za krátkou dobu $t \ll RC$ na počátku děje ($t \doteq 0$) lze opět přibližně psát

$$U(t) \approx U_0 \left(1 - \frac{t}{RC}\right).$$

Změna napětí na kondenzátoru bude

$$\Delta U = U - U_0 \approx -U_0 \frac{t}{RC}$$

a náboj na kondenzátoru se změní



Obr. 12 Vybíjení kondenzátoru

o $\Delta Q = C\Delta U = -CU_0 \frac{t}{RC} = -\frac{U_0}{R} t$, což je v souladu s úvahou, že $\frac{U_0}{R}$ je proud I, který prochází obvodem na počátku. Součin It představuje náboj, který prošel za dobu t rezistorem.

Příklad 15 – balón

Balón o hmotnosti $M = 3\,400$ kg a objemu $V = 2\,800$ m^3 naplněný vodíkem je vypuštěn ve vzduchu hustoty ϱ tak, že vystoupá atmosférou až do výšky h, kde se jeho tíha vyrovnává se vztlakovou silou, protože hustota vzduchu s výškou klesá. Tento pokles hustoty vzduchu s výškou lze dostatečně přesně popsat tzv. *barometrickou formulí*

$$\varrho(h) = \varrho_0 \mathrm{e}^{-\frac{M_\mathrm{m} g h}{RT}},$$

kde M_m je molární hmotnost vzduchu, R je molární plynová konstanta, g je tíhové zrychlení a T je teplota vzduchu. Uvažujme přitom jednoduchý model atmosféry, v němž se s výškou nemění ani teplota vzduchu 290 K ani tíhové zrychlení. Balón nezaujme rovnovážnou polohu okamžitě, ale bude kolem ní nějakou dobu kmitat.

Řešení

Ve výšce h je vztlaková síla $F_\mathrm{vz0} = \varrho_0 \mathrm{e}^{-\frac{M_\mathrm{m} g h}{RT}} V g = \varrho(h) V g$ v rovnováze s tíhovou silou $F_\mathrm{G} = Mg$, tj. platí

$$V \varrho(h) g = Mg,$$

z čehož hustota vzduchu ve výšce h je

$$\varrho(h) = 1{,}21 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}. \tag{11}$$

Uvažujme, že balón vychýlíme směrem dolů, do výšky $h - y$, kde $y \ll h$. V menší výšce však bude vzduch hustší a vztlaková síla bude mít velikost

$$F_\mathrm{vz} = \varrho_0 \mathrm{e}^{-\frac{M_\mathrm{m} g (h-y)}{RT}} V g = \varrho(h) \mathrm{e}^{\frac{M_\mathrm{m} g (y)}{RT}} V g.$$

Tím dojde k porušení rovnováhy. Výsledná síla působící na balón bude mít velikost

$$F(h-y) = F_\mathrm{vz} - F_\mathrm{G} = \varrho(h) \mathrm{e}^{-\frac{M_\mathrm{m} g (-y)}{RT}} V g - \varrho(h) V g = Mg \left(\mathrm{e}^{\frac{M_\mathrm{m} g y}{RT}} - 1 \right)$$

a bude směřovat svisle vzhůru. Vzhledem k tomu, že y je velmi malé, bude $\dfrac{M_\mathrm{m} g y}{RT} \ll 1$ a můžeme provést aproximaci vztahu pro výslednici sil. Dostaneme

$$F(h-y) \approx M \frac{M_\mathrm{m} g^2}{RT} y \approx ky. \tag{12}$$

Pro dané hodnoty vychází $k \doteq 3{,}9$ N $\cdot$ m^{-1}. Z toho můžeme hned určit úhlovou frekvenci a periodu kmitů balónu τ před ustálením ve výšce h, ovšem za předpokladu malého tlumení:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{M_\mathrm{m} g^2}{RT}} \doteq 0{,}034 \text{ s}^{-1}, \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega} \doteq 185 \text{ s}.$$

Pokud chceme posoudit tlumení kmitů při reálném ději, použijeme numerický model. Předpokládáme, že odpor vzduchu vzniká vírovým obtékáním a platí Newtonův vzorec

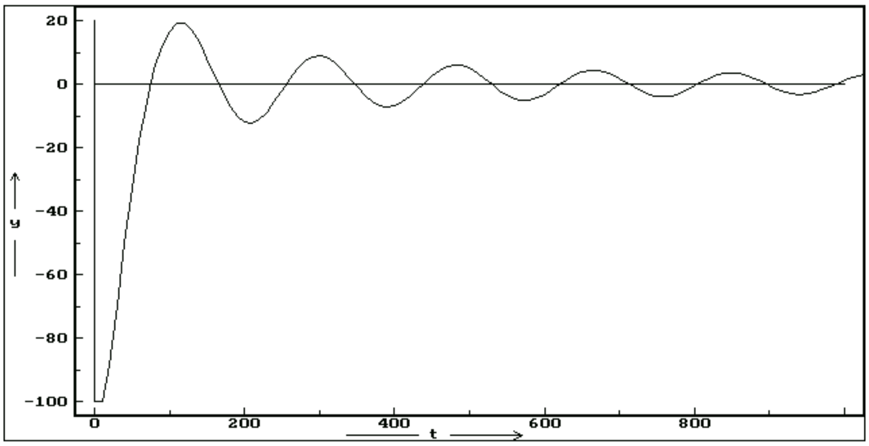
$$F_\mathrm{o} = \frac{1}{2} C S \varrho v^2 = b v^2.$$

Pro dané hodnoty je $b = 0{,}5 \cdot 0{,}48 \cdot 240 \cdot 1{,}21\ \mathrm{N \cdot s^2 \cdot m^{-2}} \doteq 70\ \mathrm{N \cdot s^2 \cdot m^{-2}}$. Kmity popisuje pohybová rovnice

$$a = -\frac{k}{M} y - \frac{b}{M} \sqrt{v^2} \cdot v.$$

Použijeme jednoduchý numerický model ve Famulu, kde předpokládáme, že rovnovážná poloha je ve výšce 100 m:

```
                   Kmity balonu
- - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce - - - -
 m=3400; k=3.9; b=70; h=10;
- - - - - - - -  počáteční hodnoty  - - - - - - - - - -
 y=-100; v=0; t=0
 DISP
- - - - - - - - - - -  model  - - - - - - - - - - - - -
 y=y+v*h
 a=-k*y/m-b*sqrt(v*v)*v/m
 v=v+a*h
 t=t+h
```



Z modelu je patrné, že kmity jsou, zvláště při menších rychlostech, tlumené málo a mají výše stanovenou periodu.

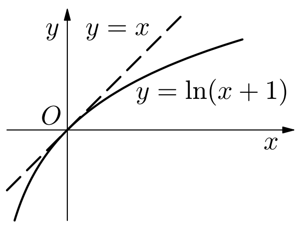
2.2 Aproximace logaritmické funkce

Stejně užitečnou aproximací jako (9) je také aproximace funkce inverzní k funkci exponenciální. Zlogaritmováním vztahu

$$1 + x \approx \mathrm{e}^x,$$

dostaneme aproximaci

$$\boxed{\ln(1 + x) \approx x.} \tag{13}$$



Obr. 13 Logaritmická funkce

Použití aproximace logaritmické funkce si můžeme ukázat např. při výpočtu práce vykonané plynem při izotermickém ději, pokud je změna objemu jen velmi malá. Práce se stanoví dle vztahu

$$W' = nRT \cdot \ln \frac{V_2}{V_1},$$

kde V_1 je počáteční objem plynu, V_2 je konečný objem plynu, n látkové množství, T je teplota a R je molární plynová konstanta. Označíme $\Delta V = V_2 - V_1$, kde $\Delta V \ll V_1$. Po dosazení do vztahu pro práci dostaneme

$$W' = nRT \cdot \ln \frac{V_1 + \Delta V}{V_1} = nRT \ln \left(1 + \frac{\Delta V}{V_1}\right) \approx nRT \cdot \frac{\Delta V}{V_1}.$$

Výsledek můžeme dále upravit užitím stavové rovnice, odkud $p_1 = \dfrac{nRT}{V_1}$. Vztah pro práci pak přejde na očekávaný tvar

$$W' \approx p_1 \Delta V.$$

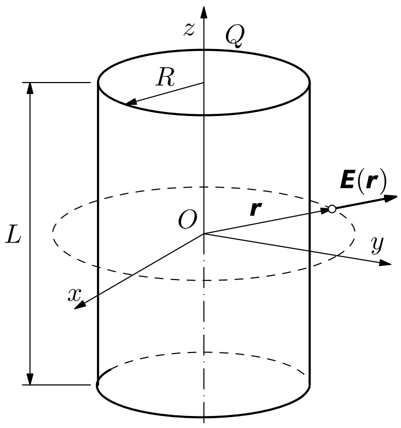
Válcový kondenzátor

Než napíšeme vztah pro výpočet napětí mezi deskami válcového kondenzátoru, řekněmě si několik informací o elektrickém poli válce.[7] Mějme válcovou plochu o poloměru R a délce L, na jejímž povrchu je rovnoměrně rozložen náboj Q. V okolí válce vznikne radiální elektrické pole (obr. 14). Velikost vektoru intenzity elektrického pole vně této válcové plochy klesá s radiální vzdáleností r podle vztahu

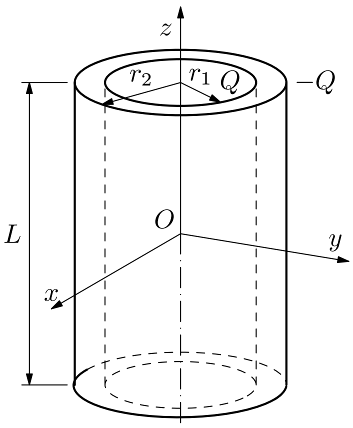
$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L} \cdot \frac{1}{r},$$

kde $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_\mathrm{r}$ je permitivita prostředí.

[7] Podrobnější informace k tomuto problému lze nalézt např. v publikaci *Vybíral, B.: Elektrostatika*, str. 25. Tento text je možno stáhnout na internetu ze stránek fyzikální olympiády *http://fyzikalniolympiada.cz*.



Obr. 14 Elektrické pole válce



Obr. 15 Válcový kondenzátor

Zkonstruujeme-li elektrický válcový kondenzátor ze dvou souosých válcových ploch o poloměrech r_1 a r_2 (obr. 15), vznikne mezi deskami kondenzátoru napětí, které je rovno rozdílu elektrických potenciálů na deskách. Tedy platí

$$U = \frac{Q}{2\pi\varepsilon L} \cdot \ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Příklad 16 – kondenzátor

Uvažujte situaci, že oba válce výše popsaného kondenzátoru budou velmi blízko sebe. Pomocí aproximace ukažte, že vztah pro výpočet napětí mezi deskami válcového kondenzátoru přejde ve vztah pro výpočet napětí mezi deskami deskového kondenzátoru.

Řešení

Označme $d = r_2 - r_1$ vzdálenost mezi válcovými plochami kondenzátoru. Podle zadání by mělo být $d \ll r_1$, takže výraz

$$\ln\frac{r_2}{r_1} = \ln\frac{r_1 + d}{r_1} = \ln\left(1 + \frac{d}{r_1}\right)$$

nahradíme níže uvedenou aproximací

$$\ln\left(1 + \frac{d}{r_1}\right) \approx \frac{d}{r_1}.$$

Dále položíme $r_1 \approx r_2 \approx r$. Vztah pro napětí pak přejde na tvar

$$U \approx \frac{Qd}{2\pi r L\varepsilon} = \frac{Qd}{S\varepsilon}, \tag{14}$$

protože $S = 2\pi rL$ je obsah válcové plochy kondenzátoru. Pokud bychom dále užili základní definiční vztah pro kapacitu $C = \dfrac{Q}{U}$, dostaneme pro kapacitu tohoto kondenzátoru vztah $C = \varepsilon\dfrac{S}{d}$, což je nám již dobře známý vztah pro výpočet kapacity deskového kondenzátoru. Vztah (14), ke kterému jsme dospěli pomocí aproximace, je formálně stejný jako vztah pro výpočet napětí na deskovém kondenzátoru.

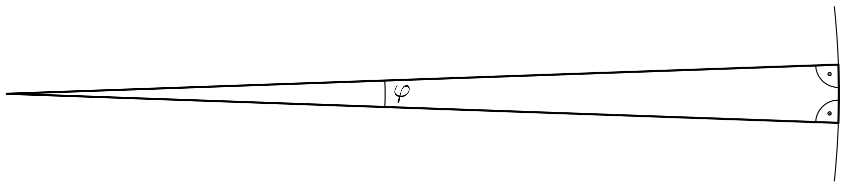
Cvičení 2

8. Uvažujme jednoduchý model atmosféry Země, podle něhož se s výškou nebude měnit ani teplota ani tíhové zrychlení. Za těchto podmínek je tlak vzduchu určen rovnicí $p = p_0\mathrm{e}^{-\frac{M_\mathrm{m}}{RT}gh}$, kde význam veličin jsme si již popsali v příkladu 15. Proveďte aproximaci barometrické formule z příkladu 15 pro malé výškové rozdíly h (h je řádově 10 m) při teplotě 20 °C. Dokažte, že pro malé výšky h lze pokles atmosférického tlaku s výškou počítat stejně jako v homogenním tíhovém poli.

9. V termistoru NTC vyjadřujeme závislost odporu na teplotě vztahem $R = R_{25}\mathrm{e}^{\left(\frac{B}{T}-\frac{B}{298{,}15\ \mathrm{K}}\right)}$, kde R_{25}, B jsou konstanty ($R_{25} = 220\ \Omega$ je odpor termistoru při teplotě 25 °C, tj. při absolutní teplotě $T_{25} = 298{,}15$ K). Odhadněte relativní změnu odporu $\dfrac{\Delta R}{R_{25}}$ pro velmi malou odchylku od teploty 25 °C. Změnu vyjádřete nejdříve obecně a potom pro hodnoty $R_{25} = 220\ \Omega$, $B = 2\,700$ K při zahřátí z 25 °C na 26 °C. Dále pak určete, jak se změní původní odpor termistoru R_{25} po zahřátí na teplotu 26 °C.

3 Aproximace goniometrických funkcí

S aproximacemi goniometrických funkcí se můžeme setkat v geometrické optice, kde při se studiu zobrazovacích soustav s dostatečnou přesností omezujeme na rovnoběžné paprsky v blízkosti optické osy, tzv. *paraxiální paprsky*, ale i v astronomii, kde pozorované objekty vidíme pod malým zorným úhlem vzhledem k jejich velké vzdálenosti, a obecně všude tam, kde pracujeme s malými úhly. Tuto situaci popisuje obr. 16.

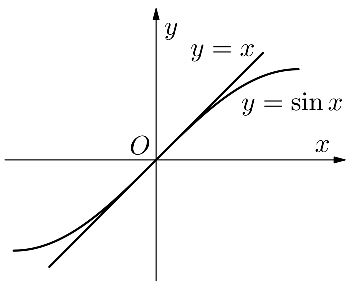


Obr. 16 Aproximace úhlu

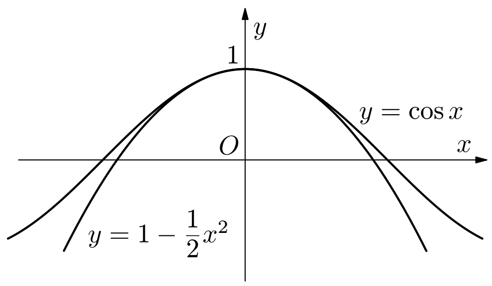
Pro velmi malé úhly $\varphi \to 0$ pracujeme s trojúhelníky, v nichž jeden úhel je téměř nulový a zbylé dva téměř pravé. Tehdy protilehlá odvěsna téměř splývá s částí opsaného oblouku a lze velmi dobře psát

$$\sin\varphi \approx \varphi,$$

což je také pěkně vidět v grafu funkce sinus (obr. 17), kdy pro velmi malé úhly x (v radiánech)[8] graf funkce $y = \sin x$ splývá s grafem funkce $y = x$.



Obr. 17 Funkce sinus



Obr. 18 Funkce kosinus

Uvědomme si přitom, že požadavek $\varphi \approx 0$ nemusí být splněn nijak drasticky. Ještě pro třicet stupňů, tedy pro $\varphi = \dfrac{\pi}{6} = 0{,}524$ činí $\sin\varphi = 0{,}500$, tj. odchylka přibližného výsledku nepřesahuje 5 %.

[8]Pokud bychom úhel v radiánech převedli na stupně, zpravidla uvažujeme platnost našich úvah pro $-5^\circ \leq x \leq 5^\circ$.

Při malých úhlech φ také splývá přilehlá odvěsna s přeponou, takže $\cos\varphi \approx 1$. Chceme-li vliv φ na hodnotu kosinu v okolí nuly započítat, stačí zvážit, že

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \approx \sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2.$$

Obrázek 18 parabolickou povahu kosinového oblouku dokládá. Nakonec lze také z obr. 16 vyčíst a z přibližných vztahů vyvodit, že pro malé úhly je také $\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi$.

Použití výše zmíněných aproximací lze nejlépe ukázat na odvození vztahu pro periodu matematického kyvadla. Jak vidíme z obr. 19, lze pro nevelké výchylky φ psát:

$$x_\mathrm{m} = l\sin\varphi \approx l\varphi, \quad h = l(1 - \cos\varphi) \approx \frac{1}{2}l\varphi^2, \qquad v_\mathrm{m} = \omega x_\mathrm{m} \approx \omega l\varphi,$$

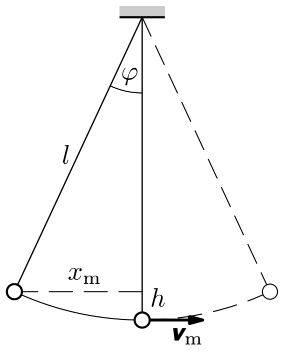
kde x_m je vodorovně měřená amplituda výchylky kyvadla, l délka kyvadla, h svisle měřená amplituda výchylky, v_m maximální rychlost kyvadla, ω kruhová frekvence kmitů. V krajní poloze $E_\mathrm{p} = mgh \approx \frac{1}{2}mgl\varphi^2$, při průchodu rovnovážnou polohou $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{m}^2 \approx \frac{1}{2}m\omega^2 l^2\varphi^2$.

Využitím zákona zachování mechanické energie, tj. z rovnosti

$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k}$$

dostaneme pro kruhovou frekvenci ω vztah $\omega^2 \approx \frac{g}{l}$, odkud

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Obr. 19 Matematické kyvadlo

Dosavadní poznatky si shrneme do tří vztahů, se kterými budeme pracovat. Goniometrickou funkci sinus lze v okolí nuly aproximovat jako

$$\boxed{\sin\varphi \approx \varphi,} \tag{15}$$

zatímco funkci kosinus pomocí vztahu

$$\boxed{\cos\varphi \approx 1 - \frac{1}{2}\varphi^2} \tag{16}$$

a funkci tangens podobně jako funkci sinus

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi \approx \varphi.} \tag{17}$$

Příklad 17 – mince ve vodě

Na dně nádoby leží mince. Odvoďte vztah pro zdánlivou hloubku v níž se pozorovateli nad vodní hladinou obraz mince jeví.

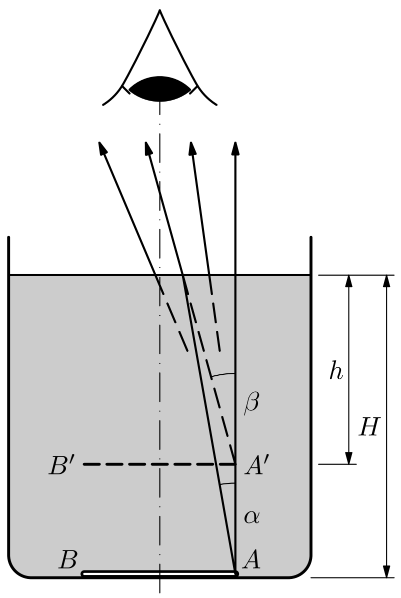
Řešení

Z obr. 20 vidíme, že pro hloubku h, v níž bude pod hladinou ležet obraz mince, platí $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{H\operatorname{tg}\alpha}{h}$, kde α je úhel dopadu, β je úhel lomu námi zvoleného paprsku (vybrali jsme pro zjednodušení obrázku ten, který opouští prostředí vody přesně nad středem mince).

Uvážíme-li, že oko vnímá jen paprsky, pro něž je α (a tím i β) malé, lze s dobrou přesností použít přibližné vztahy (15), (17). Předchozí vztah se zjednoduší na $\beta = \dfrac{H}{h}\alpha$. Dále použijeme zákon lomu $n\sin\alpha = \sin\beta$, který opět můžeme zjednodušit na tvar $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{1}{n}$. Odtud nalezneme polohu obrazu

$$h = \frac{H}{n},$$

např. pro vodu $h = 0{,}65\,H$.



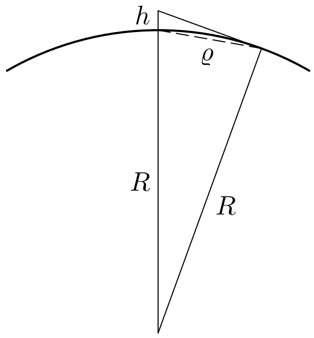
Obr. 20 Mince ve vodě

Příklad 18 – rozloha území

Určete rozlohu území, které člověk obhlédne z místa o výšce h, kde stojí, až po obzor. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $R = 6\,371$ km, $h = 170$ cm.

Řešení

Vzhledem k tomu, že $h \ll R$ můžeme oblouk na obr. 21 nahradit sečnou a provést níže uvedené výpočty.
Přibližně platí
$$(R+h)^2 - R^2 \approx h^2 + \varrho^2,$$
z čehož $\varrho^2 = 2Rh$. Hledaná plocha pak má obsah
$$S = \pi\varrho^2 = 2\pi Rh = 68\ \mathrm{km}^2.$$



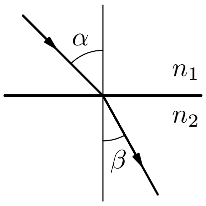
Obr. 21 Území

Poznámka

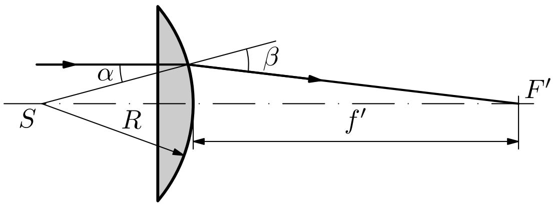
Pokud bychom provedli přesný výpočet pomocí vzorce pro kulový vrchlík a použili Euklidovu větu o výšce, dostali bychom vztah $S = 2\pi Rh\dfrac{R}{R+h}$. Pro $h \ll R$ platí $\dfrac{R}{R+h} \approx 1$, pak bychom dostali opět již dříve uvedený vztah $S = 2\pi Rh$.

Cvičení 3

10. Odvoďte vztah pro výpočet ohniskové vzdálenosti tenké ploskovypuklé čočky o poloměru R vyrobené ze skla o indexu lomu n. Odvození proveďte pro situaci, že na čočku dopadá laserový paprsek rovnoběžný s optickou osou v blízkosti optické osy (obr. 23). Zvolte vhodnou aproximaci. Při odvození použijte Snellův zákon lomu ve tvaru $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{n_2}{n_1}$ (obr. 22).

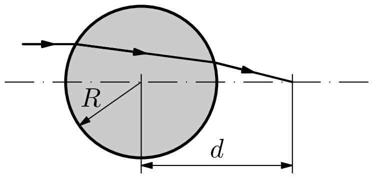


Obr. 22 Zákon lomu



Obr. 23 Ploskovypuklá čočka

11. Odvoďte vztah pro výpočet vzdálenosti d ohniska od středu válcové čočky o poloměru R a indexu lomu n. Odvození proveďte pro paprsky v blízkosti optické osy za pomoci vhodných aproximací (obr. 24).



Obr. 24 Válcová čočka

4 Další aproximace

V této části se podíváme na další aproximace v situacích, kdy již nevystačíme s aproximacemi dříve uvedenými. Začneme jednoduchým příkladem.

Příklad 19 – štola

Do hluboké štoly necháme padat volným pádem kámen (odpor vzduchu zanedbáme). Zvuk k nám ode dna štoly dorazí za dobu t od vypuštění kamene. Rychlost zvuku ve vzduchu je v. Určete hloubku h štoly.

Řešení

Kámen padá volným pádem po dobu $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, kde g je tíhové zrychlení, zvuk se šíří po dobu $t_2 = \frac{h}{v}$. Pro dobu t tedy platí

$$t = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v}.$$

Tuto rovnici umocníme a vyřešíme jako kvadratickou v proměnné h. Dostaneme

$$\frac{2h}{g} = \left(t - \frac{h}{v}\right)^2,$$

$$gh^2 - 2hv(gt + v) + v^2gt^2 = 0.$$

Fyzikální smysl má pouze jeden kořen (sami zvažte proč), který napíšeme ve tvaru

$$h = \frac{v^2}{g}\left(1 + \frac{gt}{v} - \sqrt{\frac{2gt}{v} + 1}\right).$$

Zavedením substituce $\tau = \frac{gt}{v}$ můžeme vztah pro h napsat ve tvaru

$$h = \frac{v^2}{g}\left(1 + \tau - \sqrt{1 + 2\tau}\right).$$

Jak samotný postup řešení ukazuje, jedná se o úlohu, která je obecně složená z části akustické a gravitační, přičemž pro extrémní hodnoty τ se pak projeví buď akustická nebo gravitační část.

Dosadíme-li přímo $\tau \doteq 0$, vychází $h \doteq 0$, což je pravda, ale ne užitečná – výška je malá. Zkusíme tedy problém vyřešit pomocí aproximace (5). Avšak při tomto přiblížení bude $\sqrt{1 + 2\tau} \approx 1 + \tau$ a závorka se znovu anuluje.

Dostali jsme se do situace, kdy ani přiblížení (5) nestačí a budeme muset najít zpřesňující odhad, který by vzal v úvahu i kvadratické členy řádu τ^2.

Uvažujme přiblížení ve tvaru

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \beta x^2,$$

přičemž hledáme takové β, aby přiblížení platilo až do kvadratických členů včetně. Po umocnění dostaneme

$$1 + x \approx 1 + x + \left(\frac{1}{4} + 2\beta\right) x^2 + \beta x^3 + \beta^2 x^4.$$

Zanedbáme-li vyšší mocniny x, musí být $\frac{1}{4} + 2\beta = 0$, z čehož $\beta = -\frac{1}{8}$. Pak můžeme provést zpřesnění již dříve používané aproximace, tj.

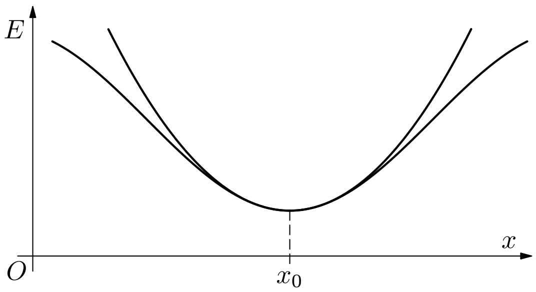
$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2. \tag{18}$$

Když se s tímto odhadem vrátíme ke stole, vyjde

$$h \approx \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{8}4\tau^2 = \frac{1}{2}gt^2$$

a vše je v pořádku.

Selhání lineární aproximace je nicméně varovné: zkoumaná závislost může být komplikovanější a ne vždy si můžeme poradit tak snadno jako u mocniny, kde stačí přibrat další, zprvu zanedbaný, ale známý člen, nebo u odmocniny, kde další člen šikovně dopočteme. Kromě toho, viz obr. 18, vidíme, že v některých případech, např. u sudých funkcí, lineární člen chybět musí.



Obr. 25 Potenciální energie

Z předchozích úvah je zřejmé, že lineární člen bude chybět v bodech minima či maxima funkce, viz např. obr. 25. Bude-li E potenciální energie soustavy (např. pružné konstrukce, interagujících atomů, molekul apod.) jako funkce její konfigurace (např. vzdálenosti x atomů) mít v bodě x_0 minimum, lze v okolí bodu x_0 očekávat platnost přiblížení

$$E(x) \approx E(x_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(x - x_0)^2,$$

další členy prozatím zanedbáváme. Přitom zřejmě $\alpha = 0$ a konstantu β zapišme ve tvaru $\beta = \frac{k}{2}$.

Přibližný vztah pro energii soustavy vychýlenou z rovnovážného stavu v bodě x_0 s nejmenší energií, o nevelkou výchylku $x - x_0$ pak vypadá

$$E(x) \approx E(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2,$$

což je vztah pro potenciální energii napjaté pružiny. Budeme-li tedy znát konstantu β v rozvoji energie v blízkosti rovnovážného stavu, zjistíme „tuhost pružiny k" a můžeme počítat frekvenci harmonických (přesněji spíše kvaziharmonických) kmitů soustavy tohoto stavu.

Pokusíme se tedy pokročit a do rozvojů, které jsme dosud vyvodili, započítat další člen, tj. rozšířit je o další, „vyšší řád malosti".

To jde celkem snadno u rozvoje mocninné funkce s přirozeným mocnitelem – jednoduše přidáme kvadratický člen:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx + \frac{1}{2}n(n-1)x^2, \tag{19}$$

kde stále platí $|x| \ll 1$.

V příkladu 19 jsme si ukázali, jak postupovat u odmocniny; tuto myšlenku nyní zobecníme.

Buď $\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n} + \alpha x^2$, kde α hledáme. Po umocnění (užitím vztahu (19)) dostaneme

$$\begin{aligned} 1+x &\approx 1 + n\left(\frac{x}{n} + \alpha x^2\right) + \frac{1}{2}n(n-1)\left(\frac{x}{n} + \alpha x^2\right)^2 \\ &\approx 1 + x + \alpha n x^2 + \frac{1}{2}\frac{n-1}{n}x^2. \end{aligned}$$

Porovnáním s levou stranou vyjde $\alpha n + \frac{1}{2}\frac{n-1}{n} = 0$, odkud $\alpha = -\frac{n-1}{2n^2}$, neboli

$$\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{n}x - \frac{n-1}{2n^2}x^2. \tag{20}$$

Spojením obou předchozích závěrů získáme vztah pro rozvoj do 2. řádu i pro racionální mocninu $\frac{m}{n}$ (viz úloha 12). K zobecnění pro libovolné β přejdeme podobně jako u (8) limitním procesem posloupností mocnin racionálních:

$$\boxed{(1+x)^\beta \approx 1 + \beta x + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)x^2.} \tag{21}$$

Při rozvoji funkce $\sin x$ využijeme goniometrickou identitu

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

Předpokládejme, že $\sin x \approx x + \alpha x^3$ (kvadratické a obecně sudé členy musí v rozvoji chybět – sinus je lichá funkce). Pak zřejmě

$$x + \alpha x^3 \approx 2\left(\frac{x}{2} + \frac{\alpha x^3}{8}\right)\left(1 - \frac{x^2}{8}\right) \approx x + \frac{\alpha x^3}{4} - \frac{x^3}{8},$$

přičemž členy s vyšší mocninou jsme zanedbali. Porovnáním máme

$$\alpha = \frac{\alpha}{4} - \frac{1}{8}, \qquad \text{tj. } \alpha = -\frac{1}{6}, \qquad \text{potom } \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}.$$

Zápornou hodnotu α jsme čekali – funkce sinus se pro x vzdálenější od nuly zakřivuje od přímky $y = x$ směrem „dolů“ (viz obr. 17), $\sin x < x$.
Výsledek ihned použijeme pro rozvoj funkce $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \approx \frac{x - \frac{1}{6}x^3}{1 - \frac{1}{2}x^2} \approx \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \approx x + \frac{1}{3}x^3.$$

V rozvoji funkce $\cos x$ stačí počítat s kvadratickým členem – další člen by byl s ohledem na sudost funkce až bikvadratický (viz úlohu 13) a k relevantním hodnotám řádu 3 by nepřispíval.
Shrnuto:

$$\boxed{\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \qquad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \qquad \operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3}.} \tag{22}$$

Funkci e^x rozvineme tak, že vylepšíme rozvoj čísla e_n:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &\approx \mathrm{e}_n^x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} \approx 1 + nx \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{2}nx(nx-1)\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x\left(x - \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

což pro $n \to \infty$ přejde v přibližný vztah

$$\boxed{\mathrm{e}^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2.} \tag{23}$$

Pomocí tohoto výsledku pak nalezneme i rozšířený rozvoj funkce $\ln(1 + x)$. Zlogaritmováním vztahu $\mathrm{e}^y \approx 1 + y + \frac{1}{2}y^2$ získáme $\ln\left(1 + y + \frac{1}{2}y^2\right) = y$. Položíme-li $x = y + \frac{1}{2}y^2$ máme $\ln(1 + x) = y$, přičemž y vyjádříme zpětně pomocí x: zřejmě $y = -1 + \sqrt{1 + 2x}$ (záporný kořen nás nezajímá). Pak tedy $\ln(1 + x) = -1 + \sqrt{1 + 2x}$ a využitím zlepšeného přiblížení (18) vyjde

$$\boxed{\ln(1 + x) \approx x - \frac{1}{2}x^2.} \tag{24}$$

Přestože se nám dosud daří rozvoje takto rozšiřovat, cítíme, že principielně je tato cesta obtížná. Jednak každá individuální funkce vyžaduje osobitý přístup a nápad, jak v rozvoji pokročit, jednak je patrné, že s rostoucím řádem rostou i výpočetní obtíže. Nabízí se proto otázka, zda úloha nedovoluje obecné uchopení a zpracování.

Doplněk pro pokročilejší ...

Tento doplněk je určen pro čtenáře, kteří již ovládají základy diferenciálního počtu.

V roce 1712 publikoval anglický matematik *Brook Taylor* (1685 – 1731) práci, v níž podal obecný návod[9], jak v blízkosti bodu x_0 rozvinout funkci $f(x)$, má-li tato funkce v bodě x_0 dostatečný počet derivací, tj. je-li dostatečně „hladká“. Mocninná řada byla pojmenována po Taylorovi a tzv. *Taylorův rozvoj* můžeme vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\cdot(x-x_0)^n+ \\ +R_{n+1}(x). \qquad (25)$$

Při použití Taylorova rozvoje pro aproximaci funkce využijeme pouze první členy. Členy vyšších řádů a zbytek $R_{n+1}(x)$ můžeme zanedbat.

Příklad 20 – Taylorův rozvoj funkce

Vypočtěte Taylorův rozvoj funkce $f(x) = \sqrt{1+x}$ v bodě $x_0 = 0$.

Řešení

Při řešení použijeme vztah (25) a vypočteme jednotlivé koeficienty Taylorova rozvoje. Dostaneme

$$f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \qquad f'(0) = \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \qquad f''(0) = -\frac{1}{4},$$

$$f'''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}}, \qquad f'''(0) = \frac{3}{8}, \ldots$$

Pokud bychom pokračovali dál, zjistili bychom, že souhrnně lze psát

$$\sqrt{1+x} = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n.$$

–

[9] Není bez zajímavosti, že metodu aproximace funkce mocninnou řadou objevil již roku 1671 James Gregory.

Elegantněji vychází rozvoj funkcí e^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$ a $\cos x$, tedy těch funkcí, které mají pro fyziku značný, téměř životní význam:

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots \tag{26}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots - \ldots \tag{27}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots + \ldots \tag{28}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots + \ldots \tag{29}$$

Poznámka:

Na samý závěr ještě připomínka, že ani ve středoškolských hodinách matematiky se s 300 let starým rozvojem nemíjíme tak docela: funkci $\dfrac{1}{1+x}$ či $\dfrac{1}{1-x}$ nemusíme v okolí nuly rozvíjet pracně podle (28). Stačí si jen uvědomit, že jde o součet geometrické řady s prvním členem $a_1 = 1$ a s kvocientem $q = -x$ resp. $q = +x$.

Cvičení 4

13. Nalezněte rozvoj racionální lomené funkce $(1+x)^{\frac{m}{n}}$ do druhého řádu včetně. Uvažujte, že $|x| \ll 1$, m, n jsou přirozená čísla.

14. Užitím identity $\cos x = \cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2}$ nalezněte další člen rozvoje funkce $\cos x$.

Závěr

Předchozí úvahy a řešené příklady nabízejí řešitelům poměrně silný nástroj jak zjednodušit, často dokonce linearizovat zkoumané závislosti a jejich kvantitativní řešení.

Proto pokaždé, když vás řešení úlohy přivede k nějakému vztahu nebo závislosti, doporučujeme vám zkoumat zjednodušení, která by do problému vnesla úvaha o velmi malé či velmi velké hodnotě zúčastněné veličiny. Učíte se tím důležité části fyzikálního řemesla: umění vystihnout podstatný jev, jiný jev zanedbat a vliv dalšího započítat jen jako opravu jednodušší situace.

Obecnější podobou tohoto způsobu uvažování je schopnost abstrakce, vytvoření modelu a jednoduchého schématu, tedy nástrojů nazírání, jimiž se kdysi západní myšlení odlišilo od východního náhledu celostního a díky němuž se ještě později emancipovala fyzika z prostředí filozofie ve vědu, která „nepřesně“ měří a „přibližně“ počítá.

Velmi rád bych poděkoval PaedDr. Přemyslu Šedivému a PhDr. Miroslavě Jarešové, Ph.D. za pečlivou recenzi textu a důležitá upozornění na chyby a nepřesnosti. Je-li duchem textu myšlenka fyzikálního zjednodušení a modelování reality, pak sotva najdeme její názornější vyjádření, než jakým je fyzikální schéma nebo obrázek. Za kvalitu a výstižnost této nedílné části textu také děkuji PhDr. Miroslavě Jarešové, Ph.D. a PaedDr. Přemyslu Šedivému.

Řešení cvičení

V uvedených návodech a řešení úloh se vzhledem k tomu, že jde o úlohy z různých oblastí fyziky, velmi často vyskytují stejná písmena pro označení různých fyzikálních veličin. Toto by mohlo působit na čtenáře poněkud zmateným dojmem, pokud se toto stejné označení vyskytuje dokonce i na stejné straně v části Řešení cvičení v několika úlohách (z různých oblastí fyziky) následujících bezprostředně za sebou (jde především o písmeno T, které je zde použito pro různé fyzikální veličiny). Proto je třeba na označení veličin nahlížet z hlediska kontextu zadání úloh.

Cvičení 1

1. Po zahřátí tyče vzroste její délka z hodnoty l_0 na l dle vztahu $l = l_0(1+\alpha\Delta t)$, kde $\Delta t = t - t_0$. Doba kmitu vzroste z $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l_0}{g}} = 5{,}18$ s na

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l_0}{g}(1+\alpha\Delta t)} \approx T_0\left(1+\frac{1}{2}\alpha\Delta t\right).$$

Doba kmitu přibližně vzroste o $\Delta T = T - T_0 = T_0 \cdot \frac{1}{2}\alpha\Delta t = 2{,}85 \cdot 10^{-4}$ s.

Označme $N_0 = \frac{\tau}{T_0} = 16\,680$ počet kmitů za dobu τ. Po zahřátí tyče o teplotu Δt se změní počet kmitů za dobu τ na

$$N = \frac{\tau}{T} = \frac{\tau}{T_0\sqrt{1+\alpha\Delta t}} \approx \frac{\tau}{T_0}\left(1-\frac{1}{2}\alpha\Delta t\right).$$

Počet kmitů za dobu $\tau = 1$ den $= 86\,400$ s se pak změní o $\Delta N = N - N_0 = -\frac{1}{2}\alpha\Delta t \cdot N_0 = -0{,}92 \doteq -1$. Počet kmitů se tedy za dobu 1 den sníží o jeden.

2. Doba pádu tělesa z výšky h je $T_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Pokud výšku nepatrně zkrátíme, bude zmenšená doba pádu

$$T = \sqrt{\frac{2(h-\Delta h)}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{g}\left(1-\frac{\Delta h}{h}\right)} \approx T_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta h}{h}\right).$$

Doba pádu se zkrátí o

$$\Delta t = T - T_0 = T_0\frac{1}{2}\frac{\Delta h}{h} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta h}{\sqrt{2hg}}.$$

Výsledek souhlasí s prostou úvahou, že totiž kratičký chybějící poslední úsek by těleso prolétávalo pádovou rychlostí $v = \sqrt{2hg}$, pád je o dobu $\frac{\Delta h}{v}$ kratší.

3. Rychlost Marsu v heliocentrické soustavě určíme pomocí vztahu

$$v_\mathrm{M} = \sqrt{\frac{\varkappa M_\mathrm{Sl}}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}99\cdot 10^{30}}{1{,}52\cdot 150\cdot 10^{9}}}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 24\,000\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

Výpočet ukazuje, že $v_\mathrm{M} \ll c$, takže je možno provést aproximaci. Platí

$$d = d_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx d_0\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Potom $\Delta d = d_0 - d = \dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}d_0 = \dfrac{1}{2}\dfrac{24\,000^2}{(3\cdot 10^8)^2}\cdot 6\,790\ \mathrm{km} = 2{,}2\cdot 10^{-5}\ \mathrm{km} = 2{,}2\ \mathrm{cm}$.

4. Platí $\dfrac{T_0^2}{a^3} = \dfrac{T^2}{(a+\Delta a)^3}$, z čehož $T = T_0\left(1+\dfrac{\Delta a}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$. Bude-li $\Delta a \ll a$, pak můžeme psát: $T \doteq T_0\left(1+\dfrac{3}{2}\dfrac{\Delta a}{a}\right)$, z čehož $\Delta T = T - T_0 = \dfrac{3}{2}\dfrac{\Delta a}{a}T_0$.

5. Označíme-li délku hrany vnitřní krychle b, pak na odlehčenou krychli bude působit tíhová síla $F_\mathrm{G} = (a^3-b^3)\varrho g$, zatímco vztlaková síla $F_\mathrm{vz} = a^3\varrho_0 g$ zůstane stejně velká. Porovnáním dostaneme $F_\mathrm{G} \geq F_\mathrm{vz}$, po dosazení
$a^3\varrho_0 \geq (a^3-b^3)\varrho$, odkud

$$b \geq a\sqrt[3]{1-\frac{\varrho_0}{\varrho}}.$$

V přiblížení $\varrho \gg \varrho_0$, tedy pro materiál s velmi velkou hustotou, vychází $b \geq a\left(1-\dfrac{\varrho_0}{3\varrho}\right)$, tedy celý vnitřek krychle. Zbyde jen „tenký plech“ stěn, jejich tloušťka bude v krajním případě $\dfrac{a-b}{2}$, tedy $\dfrac{\varrho_0}{6\varrho}a$, jejich plocha je a^2, takže každá stěna bude mít hmotnost $m_1 = \dfrac{\varrho_0}{6\varrho}a\cdot a^2\cdot\varrho = \dfrac{1}{6}a^3\varrho_0$. Vzhledem k tomu, že stěn je 6, bude hmotnost skořepiny $m = 6m_1 = a^3\varrho_0$. Vztlaková síla $F_\mathrm{vz} = a^3\varrho_0 g$ bude nyní tuto skořepinu právě dostatečně nadlehčovat.

6. Platí

$$\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0\right)c^2 - \frac{1}{2}m_0v^2 = 0{,}01\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-m_0\right)c^2.$$

Tuto rovnici upravíme na tvar

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = 0{,}01\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right),$$

pak zavedeme substituci $x = \dfrac{v^2}{c^2}$. Postupnými úpravami převedeme rovnici na tvar

$$x^3 + 2{,}96x^2 - 0{,}0396x = 0.$$

Úloze bude vyhovovat kořen $x \doteq 0{,}013318$, tedy $v = 0{,}1154\,c \doteq 35\,000\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$, což je necelých 12 % c.

7. Ze vztahu $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ vychází pro relativní nárůst hmotnosti δm definovaný poměrem $\delta m = \dfrac{m - m_0}{m}$ funkce rychlosti

$$\delta m = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1 \approx \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2},$$

z čehož $v \approx c\sqrt{2\delta m} = 42\,000\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$, tedy 14 % c.

Cvičení 2

8. Vyjdeme z barometrické rovnice

$$p = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{M_\mathrm{m} g}{RT}h} \approx p_0\left(1 - \frac{M_\mathrm{m} g}{RT}h\right),$$

$$\Delta p = p - p_0 = p_0\frac{M_\mathrm{m} g}{RT}h = -\varrho_0 g h,$$

neboť ze stavové rovnice plyne

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{pM_\mathrm{m}}{RT}, \quad \text{tedy} \quad \varrho_0 = \frac{p_0 M_\mathrm{m}}{RT}.$$

9. Změna odporu bude činit

$$\Delta R = R_{25}\mathrm{e}^{\left(\frac{B}{T_{25}+\Delta T} - \frac{B}{T_{25}}\right)} - R_{25}.$$

Postupnými úpravami dostaneme

$$\frac{\Delta R}{R_{25}} = \mathrm{e}^{\left(\frac{B}{T_{25}+\Delta T} - \frac{B}{T_{25}}\right)} - 1 \approx \frac{B}{T_{25}+\Delta T} - \frac{B}{T_{25}} \approx -\Delta T\cdot\frac{B}{T_{25}^2}.$$

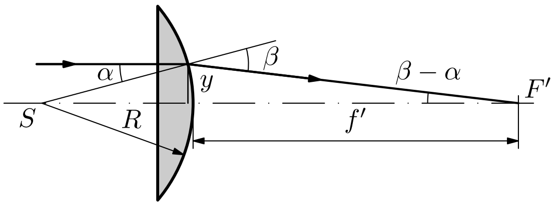
Pro zadané hodnoty činí pokles $\dfrac{\Delta R}{R_{25}}$ asi 3 %. Aproximaci tedy lze použít. Potom pokles odporu termistoru bude $\Delta R = -6{,}7\ \Omega$.

Cvičení 3

10. Podle obr. 26 platí:

$y = R \operatorname{tg} \alpha = f' \operatorname{tg}(\beta - \alpha)$. Vzhledem k tomu, že paprsek dopadá na čočku v blízkosti optické osy můžeme psát

$$R\alpha = f'(\beta - \alpha).$$



Obr. 26 Ploskovypuklá čočka

Tuto rovnici dále upravíme užitím zákona lomu

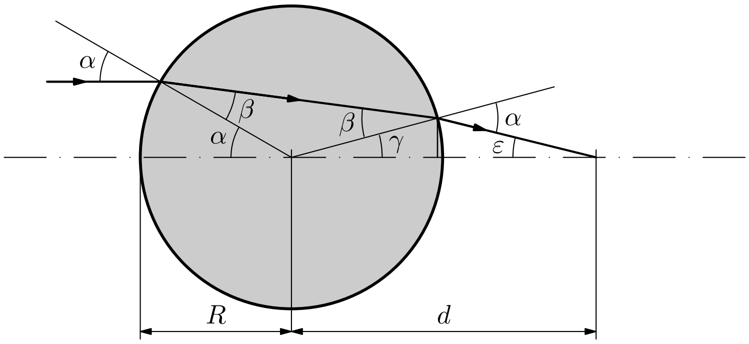
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n},$$

po aproximaci vyjádříme úhel $\beta = n\alpha$ a dosadíme do výše uvedeného vztahu. Dostaneme

$$R\alpha = f'(n\alpha - \alpha),$$

z čehož $f' = \dfrac{R}{n-1}$.

11. Chod paprsků čočkou je znázorněn na obr. 27.



Obr. 27 Válcová čočka

Podle obr. 27 platí $\varepsilon = 2(\alpha - \beta)$, $\gamma = 2\beta - \alpha$ a

$$R\sin\gamma = (d - R)\sin\varepsilon.$$

Pro malé úhly můžeme po dosazení za ε, γ tento vztah přepsat na tvar

$$R(2\beta - \alpha) = 2(d - R)(\alpha - \beta),$$

po úpravě

$$R\alpha = 2d(\alpha - \beta).$$

Tento vztah dále upravíme užitím zákona lomu pro malé úhly $\beta = \dfrac{\alpha}{n}$. Potom

$$d = \frac{n}{2(n-1)}R.$$

Cvičení 4

12. Využijeme postupně rozvoj (19) a (20):

$$(1+x)^{\frac{m}{n}} \approx \left[1+mx+\frac{1}{2}m(m-1)x^2\right]^{\frac{1}{n}} \approx 1+\frac{1}{n}mx+\frac{1}{2n}m(m-1)x^2-\frac{n-1}{2n^2}(mx)^2,$$

přičemž člen řádu x^4 již zanedbáme. Úpravou vyjde na pravé straně výraz $1+\dfrac{m}{n}x-\dfrac{m}{2n}x^2+\dfrac{m^2}{2n^2}x^2$ a po zavedení $\alpha = \dfrac{m}{n}$ dostaneme očekávaný rozvoj:

$$(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x+\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2.$$

13. $\cos x = \cos^2\dfrac{x}{2} - \sin^2\dfrac{x}{2} = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}$,

$$\cos x \approx 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\frac{x^3}{8}\right)^2 \approx 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4,$$

kde člen řádu x^6 zanedbáme.

Příloha – souhrnný přehled aproximací

Tento přehled je částečně převzat ze str. 44 publikace:
Mikulčák, J. a kol: Matematické, fyzikální a chemické tabulky & vzorce pro střední školy. Praha: Prometheus, 2003.

Mocninné funkce

$(1+x)^2 \approx 1+2x$	$(1+x)^3 \approx 1+3x$
$(1+x)^n \approx 1+nx$	$(1+x)^n \approx 1+nx+n(n-1)\frac{x^2}{2}$
$\frac{1}{1+x} \approx 1-x$	$\frac{1}{1-x} \approx 1+x$
$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$	$\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{1}{3}x$
$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \approx 1-\frac{1}{2}x$	$\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \approx 1-\frac{1}{3}x$

V tabulkách jsou také uvedeny meze platnosti jednotlivých aproximací, my se zde spokojíme s pouhým konstatováním, že $x \ll 1$.

Goniometrické funkce

$\sin x \approx x$	$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$
$\cos x \approx 1$	$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$
$\operatorname{tg} x \approx x$	$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{1}{3}x^3$

Pod proměnnou $x \ll 1$ je třeba v tomto případě chápat velikost úhlu v radiánech.

Exponenciální a logaritmická funkce

$e^x \approx 1+x$	$e^{-x} \approx 1-x$	
$e^x \approx 1+x+\frac{1}{2}x^2$	$e^{-x} \approx 1-x+\frac{1}{2}x^2$	
$\ln(1+x) \approx x$	$\ln(1-x) \approx -x$	Platí pro $-1 < x \leq 1$
$\ln(1+x) \approx x-\frac{1}{2}x^2$	$\ln(1-x) \approx -x-\frac{1}{2}x^2$	Platí pro $-1 \leq x < 1$

Při použití těchto aproximací opět nesmíme zapomenout, že $|x| \ll 1$.