ZOBRAZENÍ ČOČKAMI

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Jaroslav Trnka

Obsah

Úvod

Geometrická optika je již více než 300 let klasickou partií fyziky a ještě mnohem déle nedílnou součástí všedního života. S jejími aplikacemi se setkáváme na každém kroku, bez brýlí si půlka lidské populace už dneska nedokáže představit život. Bez mikroskopu by byli mikrobiologové bezradní, stejně tak bez dalekohledu astronomové.

Tento text je určen k přípravě řešitelů Fyzikální olympiády na řešení úloh z geometrické optiky, konkrétně pojednává o zobrazení čočkami. Navazuje na učebnici FYZIKA PRO GYMNÁZIA - OPTIKA. Proto v něm při určování poloh předmětů a jejich obrazů používáme stejnou znaménkovou konvenci.

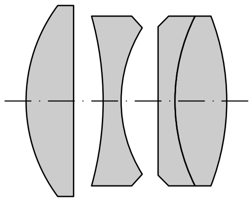
V první části se budeme zabývat zobrazením pomocí kulového rozhraní. Odvodíme Gaussovu a Newtonovu zobrazovací rovnici, které jsou základními vztahy geometrické optiky. V druhé části textu vyřešíme problém tlusté čočky a soustavy dvou tenkých čoček.

Čtenáři doporučuji, aby se nesnažil všechny odvozené vztahy naučit nazpaměť. Důležité je znát postup, kterými se k nim dospěje.

1 Optické zobrazení

1.1 Základní pojmy

Optické zobrazovací soustavy jsou obvykle tvořeny centrovanou soustavou čoček vyrobených z čirých homogenních a opticky izotropních materiálů, tedy nejčastěji z různých druhů skla. Čočky jsou ohraničeny kulovými plochami, jejichž středy leží na *optické ose* soustavy. Jako příklad můžeme na obr. 1 uvést schéma optické soustavy fotografického objektivu Tessar.



Obr. 1

Optická osa je spojnice středů kulových ploch.
Optické prostředí čočky je charakterizováno indexem lomu n. V celém textu budeme pro jednoduchost předpokládat jeho nezávislost na vakuové vlnové délce světle – zanedbáme disperzi.

Předmět a obraz

Výsledek zobrazení jednoho bodu nazýváme *obraz bodu*. Jestliže se paprsky vycházející z bodu po průchodu optickou soustavou sbíhají, pak mluvíme o *obrazu skutečném*. Pokud jsou i po průchodu soustavou rozbíhavé, vzniká *obraz zdánlivý*. Jestliže vystupují z optické soustavy rovnoběžné paprsky, mluvíme o *obrazu v nekonečnu*. Obraz předmětu vznikne zobrazením všech jeho bodů.

1.2 Paraxiální aproximace

Reálné optické soustavy jsou konstruovány na základě komplikovaných výpočtů. Zákony, kterými se řídí průchod paprsků soustavou, se podstatně zjednoduší, omezíme-li se na paprsky jdoucí v blízkosti optické osy.

Průchod paprsku přes jednotlivá kulová rozhraní se řídí Snellovým zákonem lomu. Budeme předpokládat, že paprsky vycházející z předmětu jdou velmi blízko optické osy a svírají s ní jen velmi malé úhly α. Proto bude, měříme-li úhel α v radiánech, přibližně platit

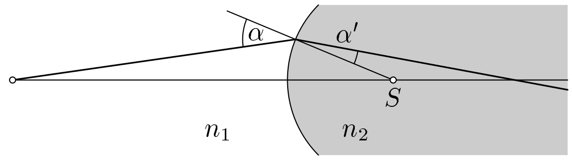
$$\alpha \approx \sin \alpha, \qquad \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \,.$$

Toto zjednodušení se nazývá *paraxiální aproximace* a má široké použití v celé geometrické optice. Při lomu na optickém rozhraní (obr. 2) platí Snellův zákon

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \alpha' .$$

V paraxiální aproximaci nabývá velmi jednoduché podoby

$$n_1 \alpha = n_2 \alpha' .$$



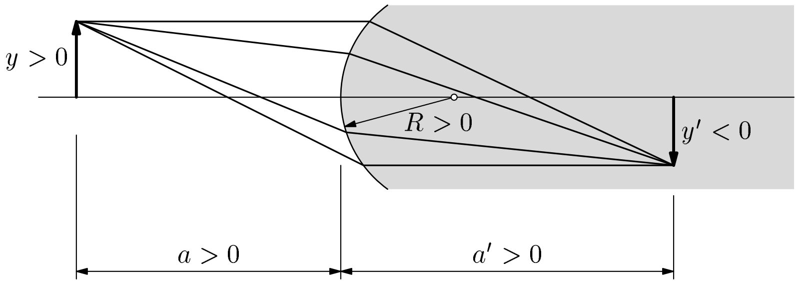
Obr. 2

2 Zobrazení jedním kulovým rozhraním

2.1 Znaménková konvence

Abychom mohli pracovat s veličinami, které se v geometrické optice vyskytují, musíme zavést znaménkovou konvenci. To znamená, že musíme říci, kdy je která veličina kladná a kdy záporná. Z prostého náhledu to nepoznáme, protože vždy měříme vzdálenosti, [1] což jsou hodnoty kladné. My jim poté udělujeme znaménka podle dohody, abychom s nimi mohli počítat v příslušných rovnicích. Zde zmíněná znaménková konvence není jediná, v jiné literatuře se může vyskytnout odlišná. Stručná pravidla psaní znamének jsou:

- Budeme předpokládat, že světlo jde optickou soustavou zleva doprava.
- Předmětová vzdálenost a je kladná, pokud předmět leží vlevo od rozhraní, v opačném případě je záporná.
- Obrazová vzdálenost a' je kladná, pokud obraz leží vpravo od rozhraní, v opačném případě je záporná.



Obr. 3

[1] Ve skutečnosti se jedná o souřadnice. Běžně se však používá označení vzdálenost, proto i my ho budeme používat.

U výšky předmětu y a obrazu y' platí jednoduché pravidlo:

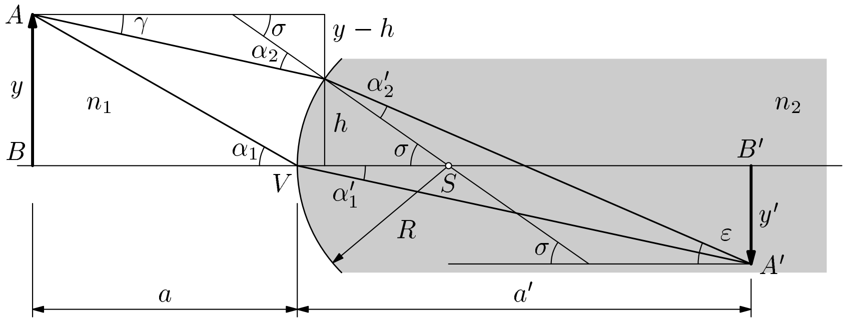
- Výška předmětu i obrazu mají kladná znaménka, pokud leží nad optickou osou. V opačném případě jsou znaménka záporná. Pokud jsou obě znaménka stejná, říkáme, že obraz je vzpřímený. Pokud jsou opačná, obraz je převrácený.

Znaménko u poloměru křivosti kulového rozhraní se zavádí takto: [2]

- Leží-li střed křivosti vpravo od rozhraní, je $R > 0$. Naopak, leží-li střed křivosti vlevo od rozhraní, je $R < 0$.

2.2 Zobrazovací rovnice

Vraťme se k problému lomu paprsků na kulové ploše. K odvození příslušných vztahů nám poslouží obrázek. Pro odvození použijeme situaci s $n_2 > n_1$, $R > 0$.



Obr. 4

Naším úkolem bude ze známé polohy předmětu a a jeho výšky y najít polohu obrazu a' a jeho výšku y'. K tomu použijeme dva paprsky, z nichž první protíná kulové rozhraní v jeho vrcholu V a druhý ve vzdálenosti h od optické osy. Vyjděme ze Snellova zákona, který má v paraxiální aproximaci podobu

$$n_1\alpha_1 = n_2\alpha_1', \qquad n_1\alpha_2 = n_2\alpha_2'. \tag{1}$$

Z obrázku vidíme, že platí $\alpha_2 = \sigma - \gamma$, $\alpha_2' = \sigma - \varepsilon$. (Všechny úhly na obr. 4 považujeme za kladné.) Po dosazení do druhé rovnice dostaneme

$$n_1(\sigma - \gamma) = n_2(\sigma - \varepsilon). \tag{2}$$

[2] Zde se naše znaménková konvence liší od té, která je zavedena v učebnici [1].

Zbývá všechny úhly vyjádřit pomocí vzdáleností. Zřejmě platí

$$\alpha_1 \approx \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{y}{a}, \qquad \alpha_1' \approx \operatorname{tg}\alpha_1' = \frac{-y'}{a'},$$

$$\sigma \approx \frac{h}{R}, \qquad \gamma \approx \frac{y-h}{a}, \qquad \varepsilon \approx \frac{h+(-y')}{a'}.$$

Dosadíme do (1) a (2):

$$n_1 \frac{y}{a} = n_2 \frac{-y'}{a'}, \qquad n_1 \left(\frac{h}{R} - \frac{y-h}{a}\right) = n_2 \left(\frac{h}{R} - \frac{h+(-y')}{a'}\right). \tag{3}$$

Úpravou posledního vztahu dostaneme

$$n_1 \left(\frac{h}{R} + \frac{h}{a}\right) - n_1 \frac{y}{a} = n_2 \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{a'}\right) - n_2 \frac{-y'}{a'}.$$

Užitím prvního vztahu z (3) se poslední vztah zjednoduší na

$$n_1 \left(\frac{h}{R} + \frac{h}{a}\right) = n_2 \left(\frac{h}{R} - \frac{h}{a'}\right)$$

a po vydělení $h \neq 0$

$$n_1 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{a}\right) = n_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a'}\right). \tag{4}$$

To je ústřední rovnice, z které budeme vycházet. Jsou-li splněny předpoklady paraxiální aproximace, platí:

- všechny paprsky vycházející z bodu A a procházející rozhraním se protnou v témže bodě A', neboť nezáleží na velikosti h, ve které druhý paprsek protíná rozhraní.
- úsečka AB kolmá k optické ose ležící v předmětové vzdálenosti a se zobrazí jako úsečka $A'B'$ kolmá k optické ose v obrazové vzdálenosti a', neboť vztah mezi a a a' nezávisí na y.

Vyřešili jsme první část úkolu – k dané předmětové vzdálenosti a je vztahem (4) přiřazena obrazová vzdálenost a'. Určením výšky obrazu y' se budeme zabývat v článku 2.5.

2.3 Ohniska

Přeskupením členů v (4) a vydělením h dostaneme

$$\frac{\dfrac{n_1 R}{n_2 - n_1}}{a} + \frac{\dfrac{n_2 R}{n_2 - n_1}}{a'} = 1. \tag{5}$$

Označme čitatele ve zlomcích f, resp. f'. Pak

$$\boxed{\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1}. \tag{6}$$

Vztah (6) se nazývá *Gaussova zobrazovací rovnice.*

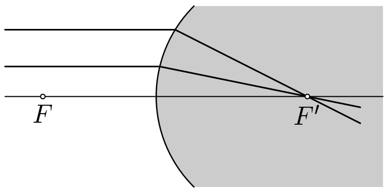
Zbývá ještě určit fyzikální význam konstant f a f'. Ze zobrazovací rovnice plyne: Pokud bod na optické ose umístíme do nekonečna, $a \to \infty$, vznikne obraz ve vzdálenosti $a' = f'$.

$$\frac{f}{a \to \infty} + \frac{f'}{a'} = 1 \quad \Rightarrow \quad f' = a'\,, \quad \text{neboť} \quad \frac{f}{a \to \infty} = 0\,.$$

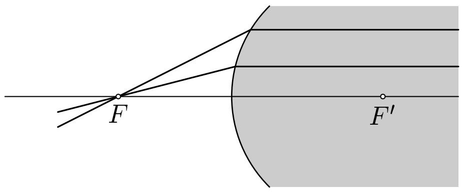
Paprsky dopadající na rozhraní rovnoběžně s optickou osou se tedy sbíhají v bodě F' na optické ose v obrazové vzdálenosti $a' = f'$. Vzdálenost f' nazýváme *obrazovou ohniskovou vzdáleností* a bod F' *obrazovým ohniskem.* Naopak pokud předmět umístíme do místa $a = f$, zobrazí se do nekonečna, $a' \to \infty$.

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a' \to \infty} = 1 \quad \Rightarrow \quad f = a\,, \quad \text{neboť} \quad \frac{f}{a' \to \infty} = 0\,.$$

Paprsky vycházející z bodu F na optické ose v předmětové vzdálenosti $a = f$ po průchodu rozhraním postupují rovnoběžně s optickou osou. Vzdálenost f nazýváme *předmětovou ohniskovou vzdáleností* a bod F *předmětovým ohniskem.*

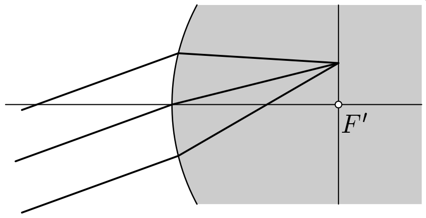


Obr. 5

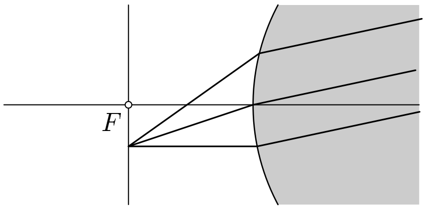


Obr. 6

Zaveďme teď důležitý pojem - *ohniskové roviny*, a to obrazové a předmětové. Je to rovina, která protíná optickou osu v ohnisku (obrazovém či předmětovém) a je k ní kolmá. Dopadají-li na optické rozhraní rovnoběžné paprsky, protnou se po lomu na rozhraní v jednom bodě, který leží v obrazové ohniskové rovině. Naopak vycházejí-li z bodu v předmětové ohniskové rovině paprsky, stávají se po lomu na rozhraní rovnoběžnými (obr. 7, 8).



Obr. 7



Obr. 8

Ze známých indexů lomu n_1, n_2 obou prostředí a poloměru křivosti R můžeme podle vztahů (5) a (6) vypočítat velikosti f a f'

$$f = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}, \qquad f' = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}. \tag{7}$$

Pro podíl ohniskových vzdáleností platí

$$\frac{f}{f'} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{8}$$

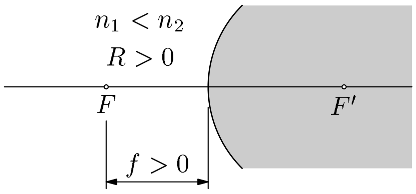
Vlastnosti zobrazovacího rozhraní jednoznačně určuje velikost předmětové ohniskové vzdálenosti f a obrazové ohniskové vzdálenosti f'. Ze zavedené znaménkové konvence vyplývá:

- Ohnisková vzdálenost f je kladná, právě když předmětové ohnisko leží vlevo od rozhraní, v opačném případě je záporná.
- Ohnisková vzdálenost f' je kladná, právě když obrazové ohnisko leží vpravo od rozhraní, v opačném případě je záporná.

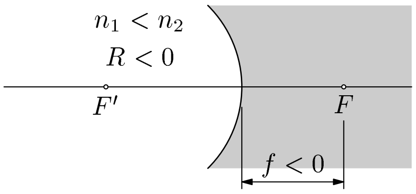
Proveďme krátkou diskuzi pro předmětovou ohniskovou vzdálenost (pro obrazovou je analogická). Ze vztahu (7) vidíme, že

- $f > 0$ v případě, že $R > 0$ a $n_2 > n_1$ nebo $R < 0$ a $n_1 > n_2$.
- $f < 0$ v případě, že $R < 0$ a $n_2 > n_1$ nebo $R > 0$ a $n_1 > n_2$.

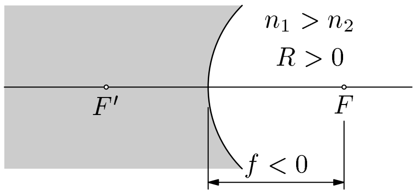
Ze vztahu (7) vidíme, že f i f' mají stejná znaménka. Mohou nastat tyto čtyři možnosti:



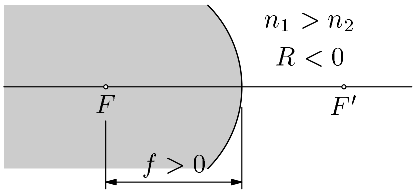
Obr. 9



Obr. 10



Obr. 11



Obr. 12

Příklad 1 – Lom na kulové ploše

Bodový zdroj světla leží na optické ose ve vzdálenosti $a = 40{,}0\,\mathrm{cm}$ od kulového optického rozhraní o poloměru $R = 10{,}0\,\mathrm{cm}$, které odděluje vzduch o indexu lomu $n_1 \doteq 1$ a sklo o indexu lomu $n_2 = 1{,}50$. Určete polohu ohnisek lámavé plochy a polohu obrazu zdroje.

Řešení

Zaveďme označení $n = n_2/n_1$. Ohniskové vzdálenosti jsou podle (7)

$$f = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1} = \frac{R}{n-1} = 20{,}0\ \mathrm{cm}\,, \qquad f' = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1} = \frac{nR}{n-1} = 30{,}0\,\mathrm{cm}\,,$$

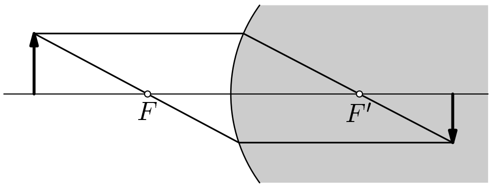
Ze zobrazovací rovnice (6) dostaneme

$$a' = \frac{af'}{a-f} = 60{,}0\,\mathrm{cm}\,.$$

2.4 Grafická konstrukce

Dosud jsme polohu obrazu určovali početně. Obraz předmětu lze nalézt i jinak, a to pouze graficky. K tomu nám poslouží dva význačné paprsky, jejichž průsečík určuje polohu obrazu. V případě, že $f > 0$ (obr. 9, 12), je situace následující:

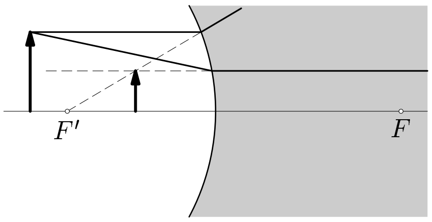
1. paprsek, který jde rovnoběžně s optickou osou, se na rozhraní láme do obrazového ohniska.
2. paprsek, který prochází předmětovým ohniskem, po lomu na rozhraní jde rovnoběžně s optickou osou.



Obr. 13

Obdobně postupujeme i v případě, že $f < 0$ (obr. 10, 11). I zde použijeme dva význačné paprsky. Jen si musíme uvědomit, že při lomu na optickém rozhraní se paprsky mění na rozbíhavé.

1. paprsek, který jde rovnoběžně s optickou osou, se na rozhraní láme tak, že prodloužený paprsek prochází obrazovým ohniskem.
2. paprsek, který míří do předmětového ohniska, se na rozhraní láme a dále jde rovnoběžně s optickou osou. I tento paprsek prodloužíme před optické rozhraní.



Obr. 14

Průsečík obou prodloužených paprsků určuje polohu předmětu. Obraz reálného předmětu bude v tomto případě vždy zdánlivý a vzpřímený.

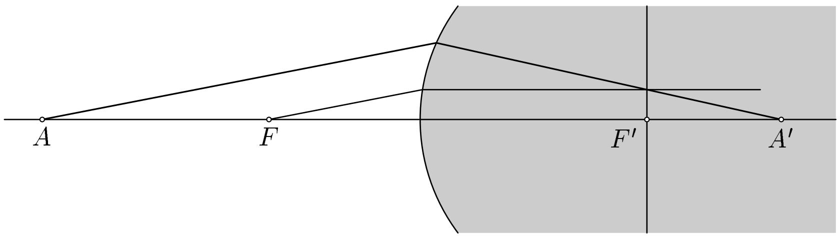
Příklad 2 – Grafické zobrazení bodu na optické ose

Řešte příklad 1 graficky.

Řešení

Z řešení příkladu 1 známe $f = 20{,}0\,\mathrm{cm}$, $f' = 30{,}0\,\mathrm{cm}$. Na základě toho vyznačíme ohniska F a F'. Při konstrukci využijeme obrazovou ohniskovou rovinu:

1. Vyznačme libovolný paprsek jdoucí z bodu A na ose k rozhraní.
2. Veďme rovnoběžný paprsek jdoucí předmětovým ohniskem. Tento paprsek po průchodu rozhraním jde rovnoběžně s optickou osou.
3. Oba paprsky se po průchodu rozhraním protnou v obrazové ohniskové rovině.
4. Protažením prvního paprsku nalezneme jeho průsečík s optickou osou, a tím i polohu obrazu.



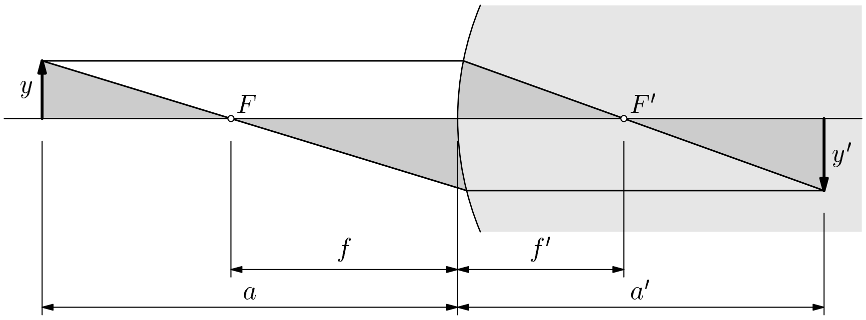
Obr. 15

2.5 Příčné zvětšení obrazu

Zatím jsme se zabývali zjišťováním vzdálenosti obrazu od rozhraní. V další části nás bude zajímat jeho výška, tj. zda se předmět při zobrazení zvětšil či zmenšil. Definujme proto příčné zvětšení obrazu

$$\boxed{\beta = \frac{y'}{y}.} \tag{9}$$

Pro další výpočty nám dobře poslouží obrázek kreslený za předpokladu paraxiální aproximace.



Obr. 16

Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$\frac{y}{a-f} = \frac{-y'}{f}, \qquad \text{stejně tak} \qquad \frac{y}{f'} = \frac{-y'}{a'-f'}.$$

Znaménko minus u y' je zde z důvodu námi zavedené konvence. Využitím definice příčného zvětšení (9) dostaneme

$$\beta = -\frac{f}{a-f} \qquad \text{a také} \qquad \beta = -\frac{a'-f'}{f'}. \tag{10}$$

K těmto vztahům se vrátíme při diskuzi Gaussovy zobrazovací rovnice a při odvození Newtonovy zobrazovací rovnice.

Krátce se zmiňme o tom, co můžeme říci o obrazu jen ze znalosti příčného zvětšení β. Pro

$\beta > 0$	obraz je vzpřímený,
$\beta < 0$	obraz je převrácený,
$\lvert\beta\rvert > 1$	obraz je zvětšený,
$\lvert\beta\rvert = 1$	obraz je stejně velký jako předmět,
$\lvert\beta\rvert < 1$	obraz je zmenšený.

2.6 Závislost polohy a příčného zvětšení obrazu na poloze předmětu

Uveďme důsledky Gaussovy zobrazovací rovnice. Omezíme se na situaci, kdy je předmět reálný, a vyšetříme, jak závisí poloha obrazu a jeho příčné zvětšení na poloze předmětu. Vyjdeme ze vztahů (6) a (10).

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = 1, \qquad \beta = -\frac{f}{a-f}.$$

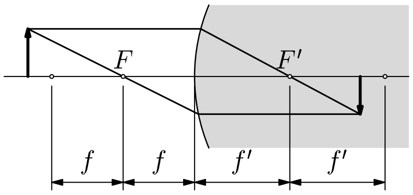
Hned vidíme, že polohu obrazu můžeme vyjádřit jako

$$a' = \frac{af'}{a-f}. \tag{11}$$

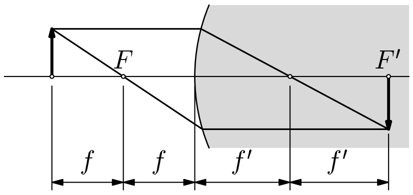
Před další diskuzí rozdělíme situaci na dvě možnosti podle znaménka ohniskových vzdáleností.

I) V případě $f > 0$ máme pro polohy předmětu tyto možnosti:

- $a > 2f$: Pro polohu obrazu platí $a' \in (f', 2f')$ a pro zvětšení $\beta = (-1, 0)$. Obraz je skutečný, převrácený a zmenšený.
- $a = 2f$: Pro polohu obrazu platí $a' = 2f'$ a pro zvětšení $\beta = -1$. Obraz je skutečný, převrácený a stejně velký jako předmět.

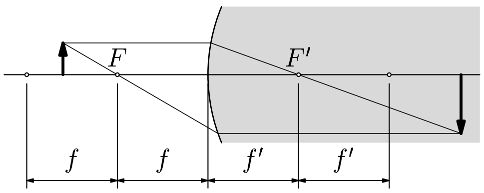


Obr. 17

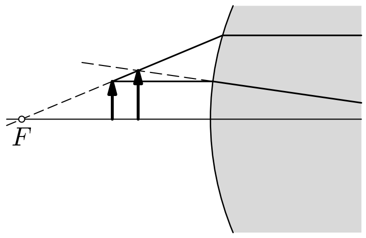


Obr. 18

- $\underline{a \in (f, 2f)}$: Pro polohu obrazu platí $a' > 2f'$ a pro zvětšení $\beta < -1$. Obraz je skutečný, zvětšený a převrácený.
- $\underline{a = f}$: Pro polohu obrazu a příčné zvětšení platí $a' \to \infty$, $\beta \to -\infty$.
- $\underline{a \in (0, f)}$: Pro polohu obrazu platí $a' < 0$ a pro zvětšení $\beta > 1$. Obraz je zdánlivý, zvětšený a vzpřímený.



Obr. 19



Obr. 20

II) V druhém případě je $f < 0$.

- $\underline{a > 0}$: Pro polohu předmětu platí $a' < 0$ a pro zvětšení $\beta \in (0, 1)$. Obraz je zdánlivý, zmenšený a vzpřímený (obr.14).

Vidíme, že zde jsou vlastnosti obrazu stejné pro všechny polohy předmětu.

Příklad 3 – Poloha a zvětšení obrazu

Určete polohu a zvětšení obrazu vzniklého lomem paprsků na kulovém optickém rozhraní. Paprsky jdou ze vzduchu do prostředí s indexem lomu $n = 1{,}60$, poloměr křivosti kulové plochy je $R = 10{,}0$ cm. Předmět leží 50,0 cm vlevo od optického rozhraní. Rozhodněte, zda je obraz skutečný/zdánlivý, zvětšený/zmenšený, vzpřímený/převrácený.

Řešení

Ohniskové vzdálenosti určíme ze vztahů (7). Označme $n = \dfrac{n_2}{n_1} \approx n_2$. Pak

$$f = \frac{R}{n-1} = 16{,}7 \text{ cm}, \qquad f' = \frac{nR}{n-1} = 26{,}7\,\text{cm}\,.$$

Ze vztahu (11) určíme polohu obrazu:

$$a' = \frac{af'}{a-f} = 40{,}0 \text{ cm}.$$

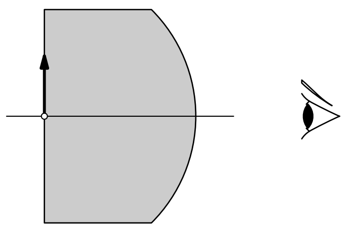
Zvětšení je podle vztahu (10)

$$\beta = -\frac{f}{a-f} = -0{,}5.$$

Obraz je skutečný, zmenšený a převrácený.

Příklad 4 – Ploskovypuklá lupa

Na předmět přiložme ploskovypuklou čočku (to je čočka, jejíž jednu plochu tvoří rovina a druhou kulová plocha, viz. obrázek). Určete polohu a zvětšení obrazu předmětu, pokud je čočka vyrobena ze skla o indexu lomu $n = 1{,}50$. Poloměr křivosti kulové plochy je $|R| = 5{,}0$ cm a tloušťka čočky $d = 5{,}0$ cm.



Obr. 21

Řešení

Protože je lupa těsně přiložena na předmět, šíří se světlo pouze ze skla do vzduchu. Střed kulového rozhraní leží vlevo, tj. $R = -5{,}0$cm. Pro vzdálenost předmětu od rozhraní platí $a = d = 5{,}0$cm. Světlo se šíří z opticky hustšího do opticky řidšího prostředí, tj. $n_1 = 1{,}50$ a $n_2 = 1$. Ze vztahu (7) vypočítáme ohniskové vzdálenosti

$$f = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1} = 15{,}0 \text{ cm}, \quad f' = \frac{n_2}{n_1} f = 10{,}0\,\text{cm}\,.$$

Pro polohu obrazu platí

$$a' = \frac{af'}{a-f} = -5{,}0\,\text{cm}\,.$$

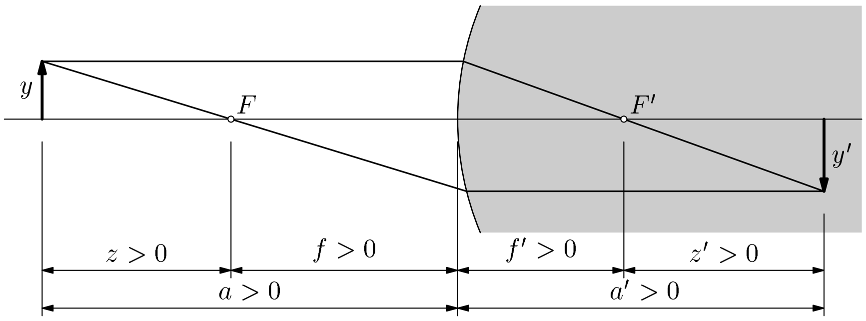
Obraz tedy leží v téže rovině jako předmět. Příčné zvětšení pak vypočítáme ze vztahu (10)

$$\beta = -\frac{f}{a-f} = 1{,}5\,.$$

Obraz je zdánlivý, zvětšený a vzpřímený.

2.7 Newtonův vztah

Zobrazovací rovnici (6) lze přepsat do jiného, mnohdy výhodnějšího tvaru. Polohy předmětu a obrazu již nepopisujeme vzdálenostmi od rozhraní, ale vzdálenostmi od ohnisek. Vzdálenost předmětu od předmětového ohniska pak označujeme z a vzdálenost obrazu od obrazového ohniska z' (obr. 22).



Obr. 22

Znaménkovou konvenci zavádíme v souladu s předcházející na str. 5:

$z > 0$,	pokud předmět leží vlevo od předmětového ohniska,
$z < 0$,	pokud předmět leží vpravo od předmětového ohniska,
$z' > 0$,	pokud obraz leží vpravo od obrazového ohniska,
$z' < 0$,	pokud obraz leží vlevo od obrazového ohniska.

Je tedy zřejmé, že platí

$$z = a - f, \qquad z' = a' - f'.$$

Dosadíme tyto vztahy do (10) a dostaneme

$$\beta = -\frac{f}{a-f} = -\frac{f}{z} \quad \text{a zároveň} \quad \beta = -\frac{a'-f'}{f'} = -\frac{z'}{f'}. \tag{12}$$

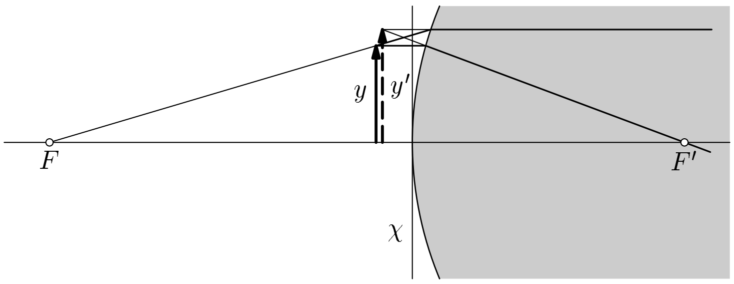
Vyšly nám modifikované vztahy pro zvětšení. Ze vztahů (12) plyne

$$\boxed{zz' = ff'.} \tag{13}$$

Tento vztah se nazývá *Newtonova zobrazovací rovnice* a je zcela ekvivalentní s Gaussovou rovnicí (6). Gaussova a Newtonova zobrazovací rovnice jsou obecné vztahy pro zobrazení na kulových rozhraních. Jelikož většina zobrazovacích prvků je v optice tvořena právě kulovými rozhraními, není potřeba hledat obecnější vztahy.

2.8 Hlavní rovina

S hlavními rovinami se setkáme zejména u tlusté čočky, ale i u zobrazení jedním rozhraním má smysl definovat hlavní rovinu. Dojdeme k ní, pokud se budeme zajímat o zobrazení kulovým rozhraním při $a \to 0$, tedy pokud budeme předmět přibližovat k rozhraní. Ze vztahů (11) a (12) zjistíme, že potom bude $a' \to 0$ a $\beta \to 1$.



Obr. 23

Hlavní rovinu χ kulového rozhraní pak definujeme jako rovinu, v níž leží předmět i obraz při příčném zvětšení $\beta = 1$. Je zřejmé, že pro jedno kulové rozhraní dostáváme rovinu, která je tečná k rozhraní v jeho průsečíku s optickou osou.

3 Čočky

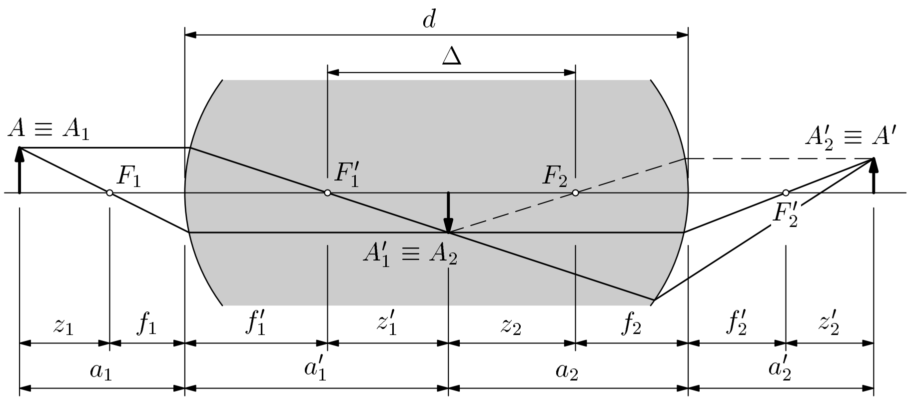
Prozatím jsme se zabývali zobrazením při lomu na jedné kulové ploše. V geometrické optice má ovšem klíčový význam lom na dvou za sebou jdoucích kulových plochách, kde světlo přechází z prostředí s indexem lomu n_1 prvním optickým rozhraním do prostředí s indexem lomu n_2 a odtud druhým optickým rozhraním do prostředí s indexem lomu n_3. Přesně to je principem *tlusté čočky*, kde první a třetí prostředí je vzduch $n_1 = n_3 \doteq 1$, a druhé prostředí je sklo. Rozebereme nejprve obecný případ zobrazení soustavou dvou kulových rozhraní.

3.1 Zobrazení dvěma kulovými rozhraními

Vyjdeme z obr. (24), ve kterém jsou vyznačeny všechny veličiny charakterizující soustavu, tj. ohniskové vzdálenosti f_1, f_1', f_2, f_2' a optický interval Δ. Ihned vidíme, že vzdálenost obou rozhraní je

$$d = \Delta + f_2 + f_1' \,. \tag{14}$$

Úkolem bude, stejně jako u lomu na jednom rozhraní, najít polohu obrazu ze zadané polohy předmětu. Napíšeme si zobrazovací rovnici pro první optické rozhraní. Ze známé polohy předmětu najdeme polohu obrazu, který bude zároveň předmětem pro zobrazení na druhém optickém rozhraní. Opět najdeme polohu obrazu, což již bude hledaný výsledek. K počítání je výhodné použít Newtonův tvar zobrazovací rovnice, protože vede k jednoduššímu zápisu řešení.



Obr. 24

Newtonovy zobrazovací rovnice pro jednotlivá rozhraní mají tvar

$$z_1 z_1' = f_1 f_1' \,, \qquad z_2 z_2' = f_2 f_2' \,. \tag{15}$$

Z obrázku vidíme, že pro vzdálenost ohnisek platí $\Delta = z_1' + z_2$. Do první z rovnic tedy dosadíme $z_1' = \Delta - z_2$ a vyjádříme polohu z_2 předmětu pro druhé rozhraní.

$$z_2 = \Delta - \frac{f_1 f_1'}{z_1} \,.$$

Teď už zbývá jen dosadit do druhé rovnice (15) a najít polohu obrazu vytvořeného druhým rozhraním, a tedy i celou soustavou.

$$z_2' = \frac{f_2 f_2'}{z_2} = \frac{f_2 f_2'}{\Delta - \frac{f_1 f_1'}{z_1}} \,. \tag{16}$$

Naopak při známém z_2' můžeme určit z_1 ze vztahu

$$z_1 = \frac{f_1 f_1'}{\Delta - \frac{f_2 f_2'}{z_2'}} \,. \tag{17}$$

Pro výsledné příčné zvětšení při zobrazení soustavou platí

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \,.$$

Protože pro jednotlivá zvětšení platí podle (12)

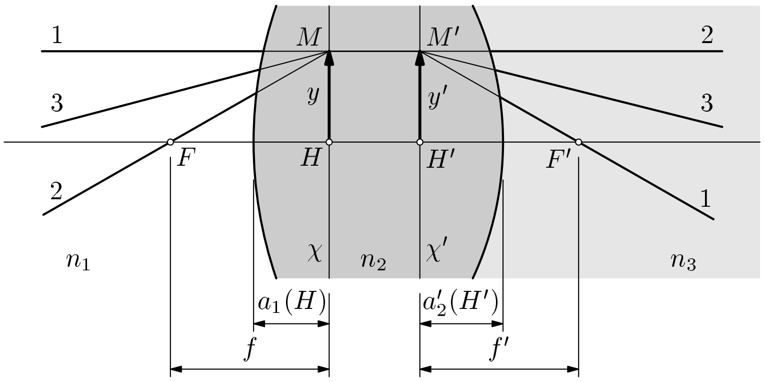
$$\beta_1 = -\frac{f_1}{z_1}, \qquad \beta_2 = -\frac{z_2'}{f_2'} \,,$$

pak pro celkové příčné zvětšení s využitím vztahu (16) dostaneme po úpravě

$$\beta = \frac{f_1 z_2'}{z_1 f_2'} = \frac{f_1 f_2}{z_1 \Delta - f_1 f_1'} \,. \tag{18}$$

3.2 Substituční model

Často se při výpočtech hledá metoda, jak předcházející případ dvou rozhraní převést na jednodušší model. Princip je následující: Naším cílem je nahradit soustavu dvou optických rozhraní pouze jedním optickým prvkem. Pro tento nový substituční prvek definujeme dvě *hlavní roviny* χ, χ' a ohniska F a F'.



Obr. 25

Ohniska mají stejný význam jako v případě jednoho optického rozhraní. Paprsek, který jde před prvním rozhraním rovnoběžně s optickou osou, dopadá za druhým rozhraním do obrazového ohniska F'. Naopak paprsek procházející předmětovým ohniskem F jde po průchodu druhým rozhraním rovnoběžně s optickou osou.

Polohu předmětového ohniska určíme ze vztahu (17) při $z_2' \to \infty$.

$$z_1(F) = \frac{f_1 f_1'}{\Delta - \dfrac{f_2 f_2'}{z_2' \to \infty}} = \frac{f_1 f_1'}{\Delta}\,. \tag{19}$$

Polohu obrazového ohniska určíme ze vztahu (16) při $z_1 \to \infty$.

$$z_2'(F') = \frac{f_2 f_2'}{\Delta - \dfrac{f_1 f_1'}{z_1 \to \infty}} = \frac{f_2 f_2'}{\Delta}\,. \tag{20}$$

Poloha hlavních rovin je určena podmínkou $\beta = 1$. Umístíme-li předmět do *předmětové hlavní roviny* χ, zobrazí se ve stejné velikosti a orientaci v *obrazové hlavní rovině* χ'. Všechny paprsky, které vstupují do bodu M v rovině χ, vystupují z bodu M' v rovině χ', přičemž $y_M = y'_{M'}$.

Průsečíky H, H' hlavních rovin s optickou osou nazýváme *hlavní body*. Souřadnici $z_1(H)$ určíme ze vztahu (18):

$$\beta = \frac{f_1 f_2}{z_1(H)\Delta - f_1 f_1'} = 1 \quad \Rightarrow \quad z_1(H) = \frac{f_1(f_2 + f_1')}{\Delta}\,. \tag{21}$$

Ze vztahu (16) a (21) dostaneme

$$z_2'(H') = \frac{f_2 f_2'}{\Delta - \dfrac{f_1 f_1'}{z_1(H)}} = \frac{f_2'(f_1' + f_2)}{\Delta}\,. \tag{22}$$

Užitím vztahů (14) a také (21) a (22) dostaneme

$$a_1(H) = z_1(H) + f_1 = \frac{f_1(f_2 + f_1')}{\Delta} + f_1 = \frac{f_1(d - \Delta) + f_1\Delta}{\Delta} = \frac{f_1 d}{\Delta}\,. \tag{23}$$

$$a_2'(H') = z_2'(H') + f_2' = \frac{f_2'(f_1' + f_2)}{\Delta} + f_2' = \frac{f_2'(d - \Delta) + f_2'\Delta}{\Delta} = \frac{f_2' d}{\Delta}\,. \tag{24}$$

Ohniskové vzdálenosti soustavy měříme od hlavních rovin. *Předmětová ohnisková vzdálenost* a *obrazová ohnisková vzdálenost* jsou definovány vztahy

$$f = z_1(F) - z_1(H) = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} \qquad f' = z_2(F') - z_2(H') = -\frac{f_1' f_2'}{\Delta}\,. \tag{25}$$

Pro poměr ohniskových vzdáleností f a f' dostaneme

$$\frac{f'}{f} = \frac{f_1'}{f_1} \cdot \frac{f_2'}{f_2}\,.$$

Po dosazení z (8) vyjde

$$\frac{f'}{f} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_3}{n_2} = \frac{n_3}{n_1}\,.$$

Následující postup se dá zobecnit pro centrovanou soustavu k kulových rozhraní oddělujících prostředí s různými indexy lomu. Každá taková soustava má předmětové a obrazové ohnisko a předmětovou a ohniskovou hlavní rovinu. Ohniskové vzdálenosti celé soustavy jsou pak v poměru $f'/f = n_{k+1}/n_1$.

Na závěr jen učiňme poznámku týkající se chodu paprsků. Substituční model sice předpokládá lom paprsků na hlavních rovinách, ale jedná se pouze o pomocnou konstrukci. Ve skutečnosti se paprsky lámou na rozhraních.

3.3 Tlustá čočka

Tlustá čočka je zobrazovací prvek, který je ohraničený dvěma sférickými lámavými plochami s poloměry křivosti R_1 a R_2. Index lomu okolního prostředí označme n_1 (předpokládáme, že před čočkou i za ní je stejné prostředí, obvykle vzduch), index lomu čočky n_2 (většinou se jedná o sklo, tedy $n_2 = 1{,}5$ až $1{,}7$). Pro ohniskové vzdálenosti první a druhé lámavé plochy platí podle (7)

$$f_1 = \frac{n_1 R_1}{n_2 - n_1}, \qquad f_1' = \frac{n_2 R_1}{n_2 - n_1}. \tag{26}$$

$$f_2 = \frac{n_2 R_2}{n_1 - n_2}, \qquad f_2' = \frac{n_1 R_2}{n_1 - n_2}. \tag{27}$$

Ze vztahu (14) vyjádříme vzdálenost ohnisek Δ

$$\Delta = d - f_1' - f_2 = d - \frac{n_2 R_1}{n_2 - n_1} - \frac{n_2 R_2}{n_1 - n_2} = \frac{d(n_2 - n_1) + n_2(R_2 - R_1)}{n_2 - n_1}. \tag{28}$$

Ohniskovou vzdálenost tlusté čočky určíme dosazením (26), (27) a (28) do (25). Předmětová i obrazová ohnisková vzdálenost jsou pro tlustou čočku stejné, protože $f_1 f_2 = f_1' f_2'$, jak je vidět z (26) a (27).

$$f = f' = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = -\frac{n_1 R_1}{n_2 - n_1} \cdot \frac{n_2 R_2}{n_1 - n_2} \cdot \frac{n_2 - n_1}{d(n_2 - n_1) + n_2(R_2 - R_1)} =$$

$$= \frac{n_1 n_2 R_1 R_2}{(n_2 - n_1)[(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)]}. \tag{29}$$

Polohy hlavních bodů určíme z (23) a (24) po dosazení z (26), (27) a (28)

$$a_1(H) = \frac{f_1 d}{\Delta} = \frac{n_1 R_1 d}{d(n_2 - n_1) + n_2(R_2 - R_1)}. \tag{30}$$

$$a_2'(H') = \frac{f_2' d}{\Delta} = -\frac{n_1 R_2 d}{d(n_2 - n_1) + n_2(R_2 - R_1)}. \tag{31}$$

Konkrétní výpočet zobrazení tlustou čočkou je následující:

1. V dalším budeme pracovat se vzdálenostmi a, a' místo z, z', jelikož jejich interpretace je názornější. Budeme tedy používat Gaussův tvar zobrazovací rovnice.

2. Ze vztahů (29), (30) a (31) určíme ohniskovou vzdálenost a polohy hlavních bodů.

3. Dopočítáme polohu předmětu a, která se měří od hlavního bodu H, tj. $a = a_1 - a_1(H)$, kde a_1 je vzdálenost předmětu od první lámavé plochy.

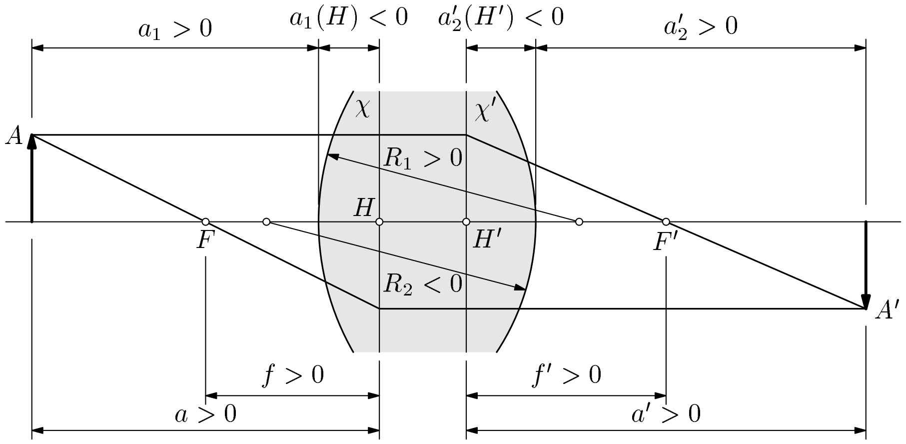
4. Z Gaussovy zobrazovací rovnice určíme polohu obrazu a' a podle (10) jeho zvětšení. Obrazová vzdálenost a' se měří od hlavního bodu H'. Vzdálenost obrazu od druhé lámavé plochy tedy je $a'_2 = a' + a'_2(H')$.

5. Zvětšení zobrazeného předmětu vypočítáme podle vztahu (10)

$$\beta = -\frac{f}{a-f}\,,$$

kde za ohniskovou vzdálenost f samozřejmě dosazujeme ohniskovou vzdálenost celé soustavy.

6. Graficky řešíme úlohu standardně, tedy pomocí dvou význačných paprsků. První, který jde před čočkou rovnoběžně s optickou osou, se láme na hlavní rovině χ' do obrazového ohniska F'. Druhý, který prochází předmětovým ohniskem, po dopadu na hlavní rovinu χ jde rovnoběžně s optickou osou. Průsečík těchto dvou paprsků určuje polohu obrazu.



Obr. 26

Znaménkovou konvenci zavádíme v souladu s kapitolou 1 s tím rozdílem, že:

- Vzdálenost a předmětu od předmětové hlavní roviny je kladná, pokud předmět leží vlevo od hlavní roviny χ. V opačném případě je záporná.
- Vzdálenost a' obrazu od obrazové hlavní roviny je kladná, pokud obraz leží vpravo od hlavní roviny χ'. V opačném případě je záporná.

- Ohnisková vzdálenost f je kladná, pokud předmětové ohnisko F leží vlevo od hlavního bodu H. (resp. obrazové ohnisko F' vpravo od hlavního bodu H'.) V opačném případě jsou veličiny záporné.
- Poloměr křivosti R rozhraní je kladný, pokud střed plochy leží vpravo od rozhraní. V případě, že leží vlevo, je $R < 0$.
- Výška předmětu y, resp. obrazu y' je kladná, jestliže leží nad optickou osou. V opačném případě je záporná.

Může se samozřejmě stát, že jedna či obě hlavní roviny budou ležet mimo čočku. Početní vztahy se tím nemění.

Příklad 5 – Tlustá spojka

Tlustá spojka je omezena dvěma sférickými lámavými plochami o poloměrech $R_1 = 30{,}0$ cm a $R_2 = -20{,}0$ cm. Čočka má tloušťku $d = 5{,}0$ cm a je umístěna ve vzduchu, index lomu skla je $n = 1{,}50$.

a) Najděte polohy hlavních rovin a určete ohniskovou vzdálenost čočky.
b) Předmět umístíme do vzdálenosti $a_1 = 40{,}0$ cm od tlusté čočky. Určete polohu obrazu a příčné zvětšení. Úlohu řešte početně i graficky.

Řešení

a) Prostým dosazením do vztahů (29), (30) a (31), kde položíme $n_1 = 1$, $n_2 = n$, dostaneme

$$f = \frac{nR_1R_2}{(n-1)[(n-1)d + n(R_2 - R_1)]} = 24{,}8 \text{ cm}. \tag{32}$$

$$a_1(H) = \frac{R_1 d}{d(n-1) + n(R_2 - R_1)} = -2{,}07\,\text{cm}. \tag{33}$$

$$a_2'(H') = -\frac{R_2 d}{d(n-1) + n(R_2 - R_1)} = -1{,}38\,\text{cm}. \tag{34}$$

Vidíme, že ohnisková vzdálenost je kladná a že hlavní roviny leží obě uvnitř čočky.

b) Poloha předmětu vůči hlavní rovině χ je

$$a = a_1 - a_1(H) = 42{,}1 \text{ cm}.$$

Ze vztahu (11) a (10) již snadno vypočítáme polohu obrazu a příčné zvětšení

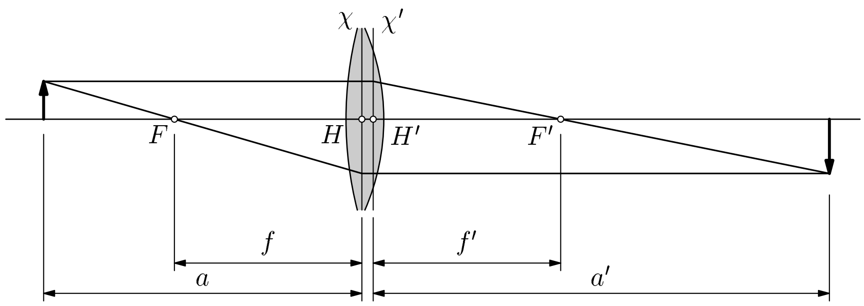
$$a' = \frac{af'}{a-f} = \frac{af}{a-f} = 60{,}58\ \text{cm}\,, \qquad \beta = -\frac{f}{a-f} = -1{,}44. \tag{35}$$

Vzdálenost obrazu od čočky (jejího druhého rozhraní) je potom

$$a_2' = a' + a_2'(H') = 59{,}2\ \text{cm}\,,$$

nachází se tedy 59,2 cm vpravo od druhého rozhraní, obraz je zvětšený převrácený.

Obrázek je v měřítku 1:10.

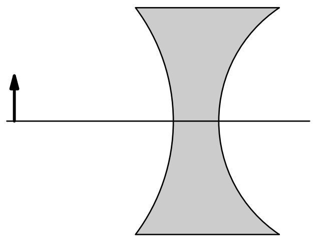


Obr. 27

Příklad 6 – Tlustá rozptylka

Tlustá čočka se skládá ze dvou sférických ploch o poloměrech $R_1 = -35{,}0$ cm a $R_2 = 15{,}0$ cm. Čočka má tloušťku $d = 5{,}0$ cm a je umístěna ve vzduchu, index lomu skla je $n = 1{,}50$.

a) Najděte polohy hlavních rovin a určete ohniskovou vzdálenost čočky.
b) Předmět umístíme do vzdálenosti $a_1 = 30{,}0$ cm od tlusté čočky. Určete polohu obrazu a příčné zvětšení. Úlohu řešte početně i graficky.



Obr. 28

Řešení

a) Prostým dosazením do vztahů (29), (30) a (31), kde položíme $n_1 = 1$, $n_2 = n$, dostaneme

$$f = \frac{nR_1R_2}{(n-1)[(n-1)d + n(R_2 - R_1)]} = -20{,}3 \text{ cm}. \tag{36}$$

$$a_1(H) = \frac{R_1 d}{d(n-1) + n(R_2 - R_1)} = -2{,}26 \text{ cm}. \tag{37}$$

$$a_2'(H') = -\frac{R_2 d}{d(n-1) + n(R_2 - R_1)} = -0{,}97 \text{ cm}. \tag{38}$$

Vidíme, že ohnisková vzdálenost je záporná a že hlavní roviny leží obě uvnitř čočky.

b) Poloha předmětu vůči hlavní rovině χ je

$$a = a_1 - a_1(H) = 32{,}3 \text{ cm}.$$

Ze vztahu (11) a (10) již snadno vypočítáme polohu obrazu a příčné zvětšení

$$a' = \frac{af'}{a-f} = \frac{af}{a-f} = -12{,}5 \text{ cm}\,, \qquad \beta = -\frac{f}{a-f} = 0{,}39. \tag{39}$$

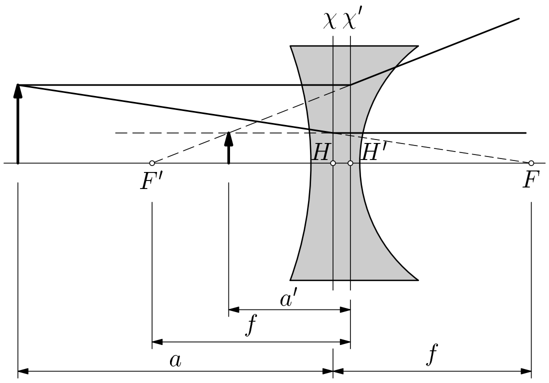
Vzdálenost obrazu od čočky (od jejího prvního rozhraní) je potom

$$a_1' = a' + d + a_2'(H') = -8{,}4 \text{ cm}\,,$$

nachází se tedy 8,4 cm vlevo od prvního rozhraní, obraz je tedy zdánlivý.

Grafická konstrukce se provede podle obrázku. Při konstrukci jsme použili dva základní paprsky.

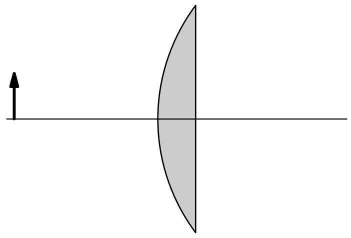
1. paprsek jde rovnoběžně s optickou osou. Láme se na hlavní rovině χ' a prodloužený paprsek prochází obrazovým ohniskem F'.
2. paprsek míří do předmětového ohniska F. Po lomu na hlavní rovině χ jde rovnoběžně s optickou osou. Průsečík jeho prodloužení s prodlouženým 1. paprskem udává polohu obrazu.



Obr. 29

Příklad 7 – Ploskovypuklá čočka

Určete ohniskovou vzdálenost a polohu hlavních rovin ploskovypuklé čočky (tj. čočky, jejíž jedna plocha je rovina, $R_2 \to \infty$). Tloušťka čočky je $d = 2{,}0$ cm a poloměr křivosti kulové plochy je $R_1 = 15{,}0$ cm. Index lomu čočky je $n = 1{,}52$.
Na základě těchto výsledků určete, kam se zobrazí předmět, který umístíme 50,0 cm vlevo od přední plochy čočky.



Obr. 30

Řešení

Vztahy (29), (30) a (31) bezprostředně použít nejdou. Úpravou však dostaneme

$$f = \frac{nR_1}{(n-1)\left[\frac{d}{R_2}(n-1) + n\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)\right]},$$

$$a_1(H) = \frac{\frac{R_1}{R_2}d}{\frac{d}{R_2}(n-1) + n(1 - \frac{R_1}{R_2})}, \qquad a_2'(H') = -\frac{d}{\frac{d}{R_2}(n-1) + n\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)}.$$

Uvážíme, že $R_2 \to \infty$ a $1/R_2 \to 0$. Po dosazení vyjde

$$f = \frac{nR_1}{(n-1)[0 + n(1-0)]} = \frac{R_1}{n-1} = 28{,}8 \text{ cm}, \tag{40}$$

$$a_1(H) = 0, \quad a_2'(H') = -\frac{d}{\frac{d}{R_2}(n-1) + n\left(1 - \frac{R_1}{R_2}\right)} = -\frac{d}{n} = -1{,}32 \text{ cm}. \tag{41}$$

Protože $a_1(H) = 0$, platí také $a = a_1 = 50$ cm. Podle (11) je

$$a' = \frac{af'}{a-f} = \frac{af}{a-f} = 68{,}2 \text{ cm}. \tag{42}$$

Vzdálenost obrazu od čočky (přesněji od pravého, rovného rozhraní) potom bude

$$a_2' = a' + a_2'(H') = 66{,}9 \text{ cm}.$$

3.4 Tenká čočka

Ne vždy je nutné počítat vše v takové obecnosti, jak jsme dosud činili. Pokud je čočka dostatečně tenká, můžeme ve vztazích (29), (30) a (31) položit $d \approx 0$. Pro ohniskovou vzdálenost a pro polohy hlavních bodů potom bude platit

$$f = \frac{n_1 R_1 R_2}{(n_2 - n_1)(R_2 - R_1)}\,, \tag{43}$$

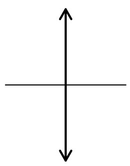
$$a_1(H) = 0, \qquad a_2'(H') = 0\,. \tag{44}$$

Obě hlavní roviny u tenké čočky splývají a jejich pozice je totožná s pozicí tenké čočky. V praxi se definuje ještě jedna veličina charakterizující tenkou čočku, *optická mohutnost*. Ta je definována jako

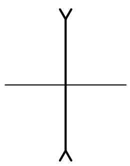
$$\varphi = \frac{n_1}{f} = \frac{(n_2 - n_1)(R_2 - R_1)}{R_1 R_2} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\,. \tag{45}$$

Jednotkou optické mohutnosti je *dioptrie* ($\mathrm{D} = \mathrm{m}^{-1}$).

Ohnisková vzdálenost je jediná charakteristika tenké čočky, proto tenké čočky dělíme na *spojky*, které mají kladnou ohniskovou vzdálenost $f > 0$, a rozptylky, které ji mají zápornou, $f < 0$. Při grafickém zobrazení se běžně užívají symboly podle obr. 31 a 32.



Obr. 31: spojka



Obr. 32: rozptylka

Grafická konstrukce i výpočet jsou u tenké čočky velmi jednoduchý. Ukážeme si to na jednoduchém příkladu.

Příklad 8 – Tenká čočka

Určete, kam se zobrazí předmět ležící 30 cm vlevo od tenké čočky a) spojky s ohniskovou vzdáleností $f_1 = 20$ cm, b) rozptylky s $f_2 = -20$ cm. Jaké vlastnosti má v těchto případech obraz? Příklad řešte početně i graficky.

Řešení

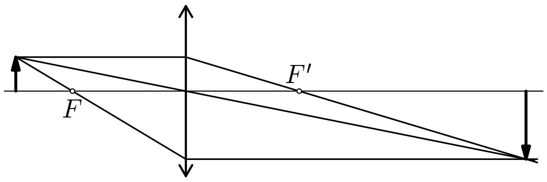
Z Gaussovy zobrazovací rovnice určíme polohu obrazu

$$\text{a)} \quad a_1' = \frac{a f_1}{a - f_1} = 60\,\mathrm{cm}\,, \qquad \text{b)} \quad a_2' = \frac{a f_2}{a - f_2} = -12\ \mathrm{cm}.$$

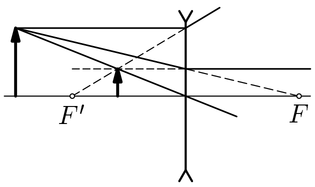
Zvětšení je potom

$$\text{a)}\quad \beta_1 = -\frac{f_1}{a - f_1} = -2, \qquad \text{b)}\quad \beta_2 = -\frac{f_2}{a - f_2} = 0,4\,.$$

V případě spojky je obraz skutečný, zvětšený, převrácený. V případě rozptylky je obraz zdánlivý, zmenšený, vzpřímený.



Obr. 33



Obr. 34

Vidíme, že v případě grafické konstrukce zobrazení tenkou čočkou opět používáme dva význačné paprsky, jako v předchozích případech. U tenké čočky máme i ***třetí význačný paprsek***. Je to paprsek jdoucí středem čočky, který se neláme. Ke konstrukci obrazu jsou potřeba pouze dva paprsky, třetí paprsek použijeme jako kontrolní.

Příklad 9 – Chyba u tenké čočky

Určete, jaká chyba vznikne při výpočtu ohniskové vzdálenosti čočky o tloušťce $d = 2$ cm, poloměrech křivosti $R = R_1 = -R_2 = 20$ cm a indexu lomu $n = 1{,}5$, použijeme-li vztah platný pro tenkou čočku.

Řešení

Ohnisková vzdálenost tlusté čočky bude podle (29)

$$f = \frac{n_1 n_2 R_1 R_2}{(n_2 - n_1)[(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)]} =$$
$$= -\frac{nR^2}{(n-1)[(n-1)d - 2nR]} = 20{,}34 \text{ cm}\,.$$

U tenké čočky použijeme vztah (43)

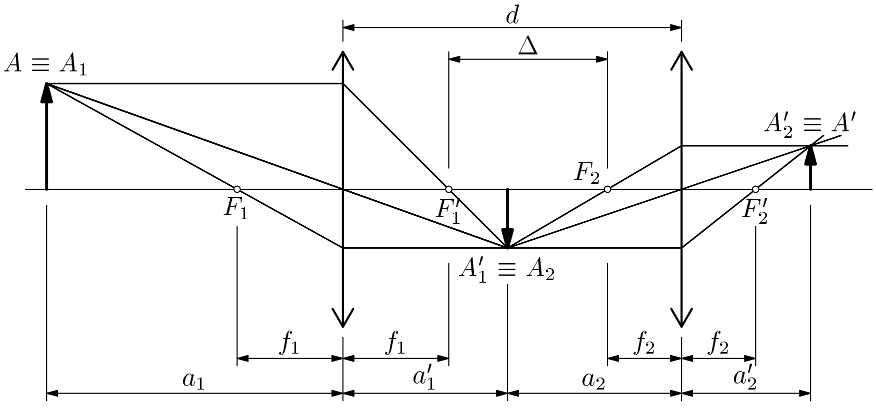
$$f' = \frac{n_1 R_1 R_2}{(n_2 - n_1)(R_2 - R_1)} = \frac{R}{2(n-1)} = 20 \text{ cm}.$$

Chyba, které jsme se při použití aproximace dopustili, je

$$\Delta f = \frac{f - f'}{f'} = 1{,}7\ \%.$$

3.5 Dvě tenké čočky

Mějme centrovanou soustavu dvou tenkých čoček, jejichž vzájemná vzdálenost je d a ohniskové vzdálenosti jsou f_1 a f_2. Při výpočtu zobrazení předmětu takovouto soustavou můžeme postupovat obdobně jako v případě dvou kulových rozhraní, který jsme probrali v čl. 3.1. Nejprve určíme obraz předmětu získaný pomocí první čočky. Ten se pak stane předmětem pro druhou čočku, která vytvoří výsledný obraz.



Obr. 35

I v tomto případě můžeme použít substituční model, který jsme použili u tlusté čočky, tzn. najít hlavní roviny a ohniska celé soustavy. K tomu použijeme vztahy (25), (23) a (24). Dále víme, že platí $f_1 = f'_1$, $f_2 = f'_2$ a $\Delta = d - f_1 - f_2$. Tedy

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d}\,. \tag{46}$$

$$a_1(H) = \frac{f_1 d}{\Delta} = \frac{f_1 d}{d - f_1 - f_2}\,, \qquad a'_2(H') = \frac{f_2 d}{\Delta} = \frac{f_2 d}{d - f_1 - f_2}\,. \tag{47}$$

Vztah (46) se dá přepsat do jiného, pro zapamatování lepšího tvaru

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}.} \tag{48}$$

Pro $d = 0$ platí $1/f = 1/f_1 + 1/f_2$, tedy $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Pokud dvě tenké čočky položíme na sebe, jejich optické mohutnosti se sečtou.

Příklad 10 – Dvě tenké čočky

Mějme soustavu dvou tenkých čoček o ohniskových vzdálenostech $f_1 = 20$ cm, $f_2 = -30$ cm, jejichž vzájemná vzdálenost je $d = 15$ cm.

a) Určete ohniskovou vzdálenost soustavy a polohy hlavních rovin.
b) Položme předmět 50 cm vlevo od první čočky. Určete polohu a zvětšení obrazu. Úlohu řešte početně i graficky.

Řešení

a) Dosazením do vztahů (46), (47) a (48) dostaneme

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} = 24 \text{ cm}.$$

$$a_1(H) = \frac{f_1 d}{d - f_1 - f_2} = 12\,\text{cm}\,, \qquad a_2'(H') = \frac{f_2 d}{d - f_1 - f_2} = -18 \text{ cm}.$$

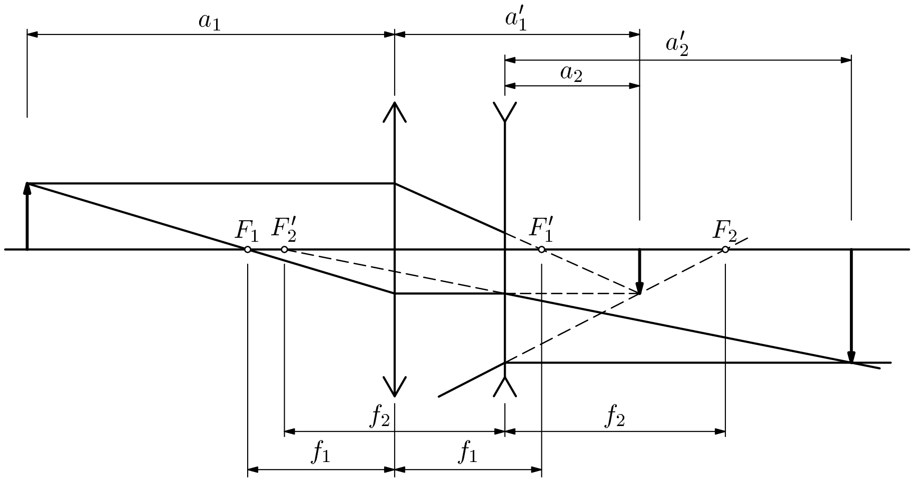
b) Pro polohu předmětu platí $a = a_1 - a_1(H) = 38$ cm. Z Gaussovy zobrazovací rovnice a vztahu (10) vypočítáme polohu obrazu a zvětšení

$$a' = \frac{af}{a - f} = 65{,}1\,\text{cm}\,, \qquad \beta = -\frac{f}{a - f} = -1{,}7.$$

Obraz leží ve vzdálenosti $a_2' = a' + a_2'(H') = 47{,}1$ cm vpravo od druhé tenké čočky.

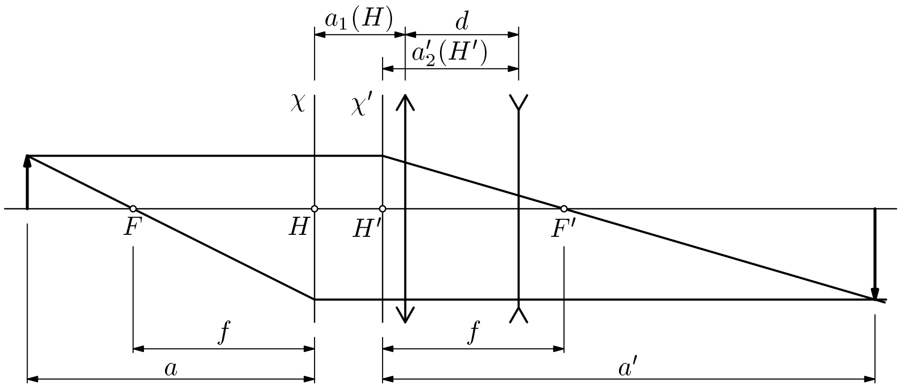
Přikročíme k grafickému řešení. Na tomto příkladě se ukáže, jak je metoda substitučního modelu výhodná.

První grafické řešení provedeme jako postupné zobrazení dvěma tenkými čočkami. Pro přehlednost jsou při grafické konstrukci použity jen dva význačné paprsky. První tenká čočka vytvořila obraz předmětu vpravo od druhé tenké čočky. Ten se stal pro druhou čočku zdánlivým předmětem. Opět pomocí dvou význačných paprsků, které byly prodlouženy, byl nalezen výsledný obraz vzniklý průchodem světla celou soustavou.



Obr. 36

Druhá konstrukce, která je jednodušší, využívá hlavní roviny a ohniska celé soustavy, jejichž polohu jsme určili početně.

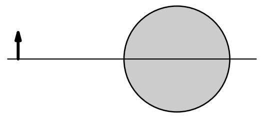


Obr. 37

4 Úlohy

1. Skleněná koule

Kam se zobrazí předmět, pokud ho umístíme do vzdálenosti $x = 50{,}0\,\mathrm{cm}$ od středu skleněné koule o poloměru $R = 10{,}0\,\mathrm{cm}$ a indexu lomu $n = 1{,}50$? Jaké bude příčné zvětšení obrazu?



Obr. 38

2. Tlustá čočka

Mějme tlustou čočku o tloušťce $d = 3{,}0$ cm a poloměrech křivosti kulových ploch $R_1 = 20{,}0$ cm a $R_2 = 80{,}0$ cm. Čočka je vyrobena ze skla o indexu lomu $n = 1{,}52$.

a) Určete ohniskovou vzdálenost a polohu hlavních bodů tlusté čočky.
b) Kam musíme umístit předmět, aby obraz vznikl na stínítku ve vzdálenosti 100 cm vpravo od čočky, tj. od vrcholu druhé plochy.

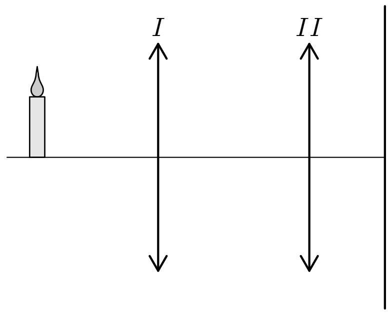
Řešte početně i graficky.

3. Čočka v sirouhlíku

Tlustou čočku o tloušťce $d = 2{,}0$ cm a poloměrech křivosti $R_1 = 30$ cm, $R_2 = -10{,}0$ cm ponoříme do sirouhlíku. Čočka je vyrobena z křemenného skla o indexu lomu $n_2 = 1{,}46$, index lomu sirouhlíku je $n_1 = 1{,}63$. Určete ohniskovou vzdálenost čočky a porovnejte to s případem, kdyby byla ve vzduchu.

4. Hořící svíčka

Hořící svíčka je umístěna ve vzdálenosti $h = 50{,}0$ cm od stínítka. Mezi předmět a stínítko umístíme spojku o neznámé ohniskové vzdálenosti. Posouváním spojky byly nalezeny dvě polohy, při nichž na stínítku vznikl ostrý obraz. Vzájemná vzdálenost těchto poloh je $d = 30{,}0$ cm. Na základě těchto údajů určete ohniskovou vzdálenost spojky. (Besselova metoda měření ohniskové vzdálenosti.)



Obr. 39

5. Čočka jedna jako druhá

Dvě stejné spojky o ohniskových vzdálenostech $f_1 = f_2$ umístíme do vzájemné vzdálenosti $d = f_1/2$. Předmět položíme do vzdálenosti $x = 2f_1$ vlevo od prvé čočky.

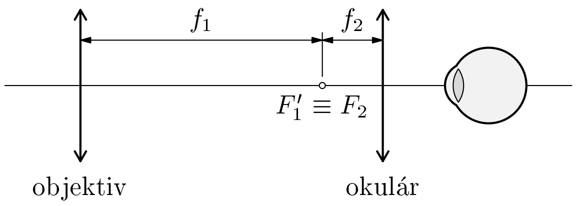
a) Určete ohniskovou vzdálenost soustavy a polohu hlavních bodů
b) Určete polohu obrazu a příčné zvětšení.

Úlohu řešte početně i graficky. Graficky proveďte oba typy řešení, tj. přímé zobrazení dvěma čočkami i zobrazení pomocí hlavních rovin a ohnisek celé soustavy.

6. Keplerův dalekohled

Keplerův dalekohled se skládá ze dvou tenkých spojných čoček, kdy obrazové ohnisko první z nich splývá s předmětovým ohniskem druhé čočky. První čočka se nazývá objektiv a má velkou ohniskovou vzdálenost. Druhá čočka se nazývá okulár.

a) Určete polohu ohnisek a hlavních rovin této optické soustavy.
b) Vysvětlete, jak tuto soustavu používáme k pozorování vzdálených objektů.



Obr. 40: Optická soustava Keplerova dalekohledu

7. Dvě rozptylky

Mějme soustavu dvou tenkých rozptylek o ohniskových vzdálenostech $f_1 = -40{,}0$ cm, $f_2 = -60{,}0$ cm a vzájemné vzdálenosti $d = 20{,}0$ cm.

a) Určete ohniskovou vzdálenost soustavy a polohu hlavních rovin.
b) Předmět umístíme do vzdálenosti 50,0 cm vlevo od první rozptylky. Určete polohu a příčné zvětšení obrazu.

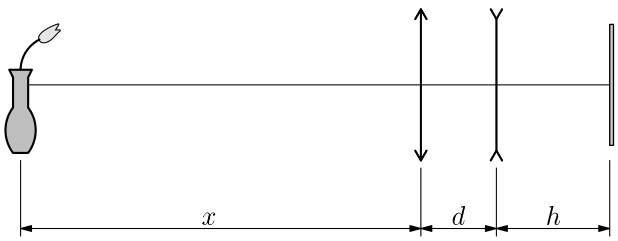
Úlohu řešte početně i graficky.

8. Teleobjektiv

Teleobjektiv fotografického přístroje se skládá ze spojky s ohniskovou vzdáleností $f_1 = 6{,}0$ cm a rozptylky s ohniskovou vzdáleností $f_2 = -2{,}5$ cm.

Spojka je blíže k fotografovanému předmětu. Vzdálenost rozptylky od filmu $h = 10{,}0$ cm je pevná, poloha spojky se může měnit. Určete vzájemnou vzdálenost čoček d tak, aby vznikl na filmu ostrý obraz. Vzdálenost fotografovaného předmětu od spojné čočky (konce objektivu) je

a) $x = 50{,}0$ cm, fotografujeme blízký předmět.
b) $x \to \infty$, fotografujeme vzdálený předmět.



Obr. 41

Výsledky a stručné řešení úloh

1. Jedná se o tlustou čočku s $R_1 = R$, $R_2 = -R$, $d = 2R$.

$$f = \frac{nR}{2(n-1)} = 15{,}0\ \text{cm}, \qquad a_1(H) = a_2'(H') = -R = -10{,}0\ \text{cm}\,.$$

Oba hlavní body splývají se středem koule. Poloha předmětu je $a = x = 50{,}0$ cm. Pro polohu obrazu platí

$$a' = \frac{af}{a-f} = 21{,}4\,\text{cm}\,.$$

Obraz se nachází ve vzdálenosti 21,4 cm od středu koule. Jeho příčné zvětšení je

$$\beta = -\frac{f}{a-f} = -0{,}43.$$

2. a) Pro ohniskovou vzdálenost tlusté čočky platí

$$f = \frac{nR_1R_2}{(n-1)[(n-1)d + n(R_2 - R_1)]} = 50{,}4\ \text{cm}\,.$$

Polohy hlavních bodů jsou

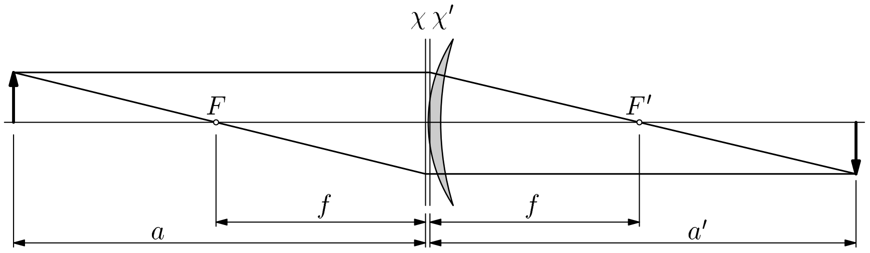
$$a_1(H) = \frac{R_1 d}{d(n-1) + n(R_2 - R_1)} = 0{,}65\,\text{cm},$$

$$a_2'(H') = -\frac{R_2 d}{d(n-1) + n(R_2 - R_1)} = -2{,}59\ \text{cm}\,.$$

b) Poloha obrazu je $a' = a_2' - a_2'(H') = 102{,}6$ cm. Pro polohu předmětu platí

$$a = \frac{a'f}{a'-f} = 99{,}15\ \text{cm}\,.$$

Předmět musí ležet ve vzdálenosti $a_1 = a + a_1(H) = 99{,}8$ cm vlevo od levého rozhraní tlusté čočky.



Obr. 42

3. V případě sirouhlíku platí pro ohniskovou vzdálenost

$$f = \frac{n_1 n_2 R_1 R_2}{(n_2 - n_1)[(n_2 - n_1)d + n_2(R_2 - R_1)]} = -71{,}5 \text{ cm} .$$

Pokud je čočka ve vzduchu, změní se výsledek na

$$f = \frac{n R_1 R_2}{(n-1)[(n-1)d + n(R_2 - R_1)]} = 16{,}6 \text{ cm} .$$

4. Z Gaussovy zobrazovací rovnice vyplývá pro $h \geq 4f$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{h-a} \to a_{1,2} = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4hf}}{2}.$$

Pro vzdálenost poloh platí $d = a_1 - a_2$. Z toho dostaneme

$$d = \sqrt{h^2 - 4hf} \to f = \frac{h^2 - d^2}{4h} = 8{,}0 \text{ cm} .$$

5. a) Ohnisková vzdálenost soustavy a polohy hlavních bodů jsou

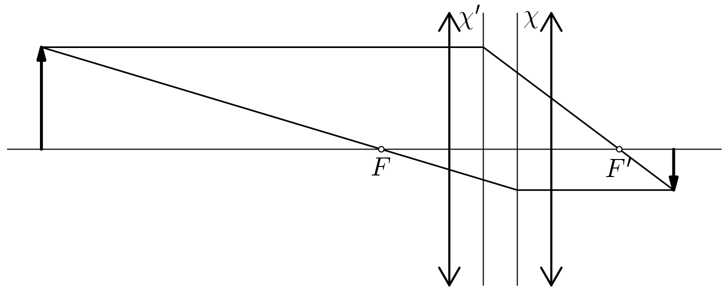
$$f = \frac{2}{3} f_1, \qquad a_1(H) = a_2'(H') = -\frac{1}{3} f_1.$$

b) Poloha předmětu je $a = a_1 - a_1(H) = 7f_1/3$. Z Gaussovy rovnice máme

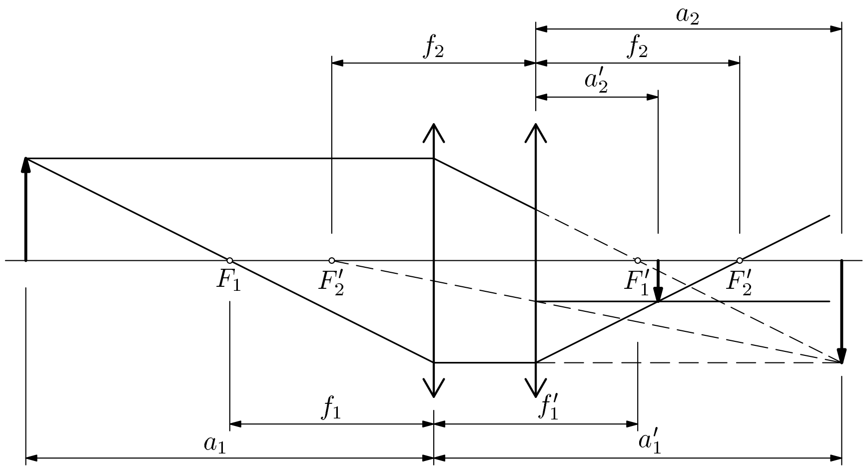
$$a' = \frac{af}{a-f} = \frac{14}{15} f_1.$$

Obraz leží ve vzdálenosti $a_2' = a' + a_2'(H') = 3f_1/5$ od druhé čočky. Příčné zvětšení je

$$\beta = -\frac{f}{a-f} = -\frac{2}{5}.$$



Obr. 43



Obr. 44

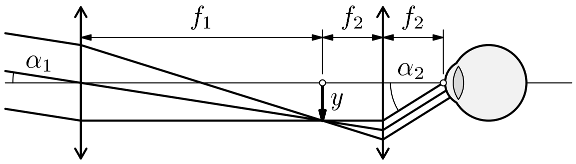
6. a) Pro ohniskovou vzdálenost soustavy a vzdálenosti hlavních bodů platí

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} \to \infty,$$

$$a_1(H) = \frac{f_1 d}{d - f_1 - f_2} \to \infty, \quad a_2'(H') = \frac{f_2 d}{d - f_1 - f_2} \to \infty.$$

Ohniska i hlavní roviny tedy leží v nekonečnu a grafická konstrukce obrazu podle obr. (26) nepřipadá v úvahu.

b) Dalekohled funguje tak, že svazek rovnoběžných paprsků, které přicházejí z bodu ve velké vzdálenosti a svírají s optickou osou úhel α, mění na svazek rovnoběžných paprsků, které svírají s optickou osou úhel $\alpha' > \alpha$.



Obr. 45

Při splnění předpokladů paraxiální aproximace je *úhlové zvětšení* dalekohledu

$$\gamma = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{\frac{y}{f_2}}{\frac{y}{f_1}} = -\frac{f_1}{f_2}\,.$$

7. a) Pro ohniskovou vzdálenost a polohy hlavních bodů dostaneme

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} = -20{,}0 \text{ cm},$$

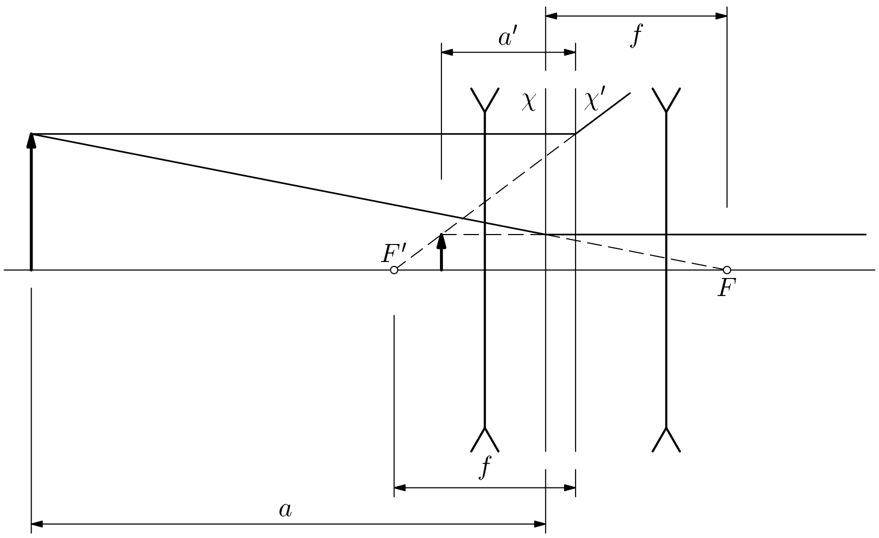
$$a_1(H) = \frac{f_1 d}{d - f_1 - f_2} = -6{,}7\,\text{cm}, \qquad a_2'(H') = \frac{f_2 d}{d - f_1 - f_2} = -10{,}0 \text{ cm}\,.$$

b) Pro polohu předmětu platí $a = a_1 - a_1(H) = 56{,}7$ cm.

$$a' = \frac{af}{a - f} = -14{,}8\,\text{cm} \to a_2' = a' + a_2'(H') = -24{,}8 \text{ cm}\,.$$

Virtuální obraz leží 4,8 cm vlevo od první čočky. Pro příčné zvětšení dostaneme

$$\beta = -\frac{f}{a - f} = 0{,}26.$$



Obr. 46

8. a) Pro ohniskové vzdálenosti a polohy hlavních bodů platí

$$f = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d},$$

$$a_1(H) = \frac{f_1 d}{d - f_1 - f_2}, \qquad a_2'(H') = \frac{f_2 d}{d - f_1 - f_2}.$$

Pro polohu předmětu platí $a = x - a_1(H)$,
pro polohu obrazu $h = a' + a'_2(H')$. Úpravou dostaneme

$$h = \frac{(x - a_1(H))f}{x - a_1(H) - f} + \frac{f_2 d}{d - f_1 - f_2}.$$

Dosadíme za $a_1(H)$, f a po chvíli úprav dostaneme pro vzdálenost d

$$d = \frac{f_1 f_2(h + x) - hx(f_1 + f_2)}{(f_1 - x)(h - f_2)} = 4{,}8 \text{ cm}.$$

b) V případě $x \to \infty$ bude pro vzdálenost čoček platit (v závorkách zanedbáváme h a f_1 oproti x).

$$d = \frac{f_1 f_2 - h(f_1 + f_2)}{f_2 - h} = 4{,}0 \text{ cm}.$$

Literatura

[1] Lepil, O., Kupka, Z.: *Fyzika pro gymnázia – Optika.* 2. vydání, Prometheus, Praha 2000.

[2] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: *Fyzika.* Vydání první, VUT Brno – nakladatelství VUTIUM, Brno 2000.

[3] Kružík, M.: *Sbírka úloh z fyziky.* 3. vydání, SPN, Praha 1978.

[4] Košťál, R.: *Optické soustavy.* Škola mladých fyziků, SPN 1979.