POHYB TĚLESA PO ELIPTICKÉ TRAJEKTORII V RADIÁLNÍM GRAVITAČNÍM POLI

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Přemysl Šedivý a Ivo Volf – ÚVFO Hradec Králové

Obsah

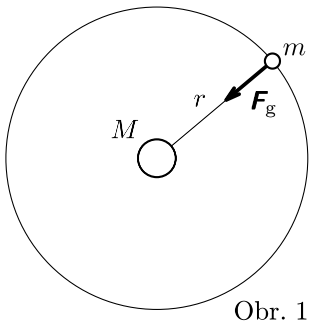
1 Úvod

V nebeské mechanice často studujeme pohyby relativně malých těles v radiálním gravitačním poli osamoceného tělesa s mnohonásobně větší hmotností. Největší planeta Sluneční soustavy – Jupiter – má hmotnost 1 050krát menší než Slunce. Hmotnosti ostatních planet, planetek, komet a meteorů jsou v porovnání s hmotností Slunce zcela nepatrné. Hmotnost Měsíce je přibližně 81krát menší než hmotnost Země. Některé velké měsíce ostatních planet mají sice hmotnosti srovnatelné s Měsícem Země, ale v porovnání s hmotnostmi planet, kolem kterých obíhají, jsou také nepatrné. Umělá kosmická tělesa vyslaná do vesmíru člověkem v tomto srovnání představují jen nepatrná zrnka hmoty.

Pohyb malého tělesa v gravitačním poli osamoceného tělesa s mnohonásobně větší hmotností můžeme nejsnáze vyšetřit ve vztažné soustavě, jejíž počátek leží ve středu velkého tělesa a souřadnicové osy směřují ke vzdáleným hvězdám. Přitom dosáhneme dosti přesných výsledků, budeme-li tuto vztažnou soustavu považovat za inerciální (což ve skutečnosti není nikdy přesně splněno) a zanedbáme-li gravitační působení všech vzdálených velkých těles a jiných malých těles, která se současně nacházejí v okolí.

Velká kosmická tělesa — hvězdy a planety — mají kulový tvar. Gravitační pole v okolí takového tělesa je stejné, jako kdyby se celá jeho hmota nacházela v jeho středu. Je-li M hmotnost centrálního tělesa, m hmotnost obíhajícího malého tělesa a r jeho vzdálenost od středu centrálního tělesa (obr. 1), působí na malé těleso přitažlivá gravitační síla o velikosti

$$F_\mathrm{g} = \varkappa \frac{Mm}{r^2}\,, \qquad (1)$$



Obr. 1

kde $\varkappa = 6{,}674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$ je *gravitační konstanta*.

V prvním ročníku střední školy jste studovali pohyb v radiálním gravitačním poli, který se uskutečňoval po ideální křivce — po kružnici. Gravitační síla udělovala obíhajícímu tělesu dostředivé zrychlení a_d stálé velikosti. Z rovnosti

$$F_\mathrm{g} = \varkappa \frac{Mm}{r^2} = ma_\mathrm{d} = m\frac{v^2}{r} = m\frac{4\pi^2}{T^2}r \qquad (2)$$

jste odvodili vztahy pro výpočet velikosti rychlosti v, doby oběhu T a poloměru trajektorie r:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\varkappa M}{r}}, \qquad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{\varkappa M}}, \qquad r = \sqrt[3]{\frac{\varkappa M T^2}{4\pi^2}}} \tag{3}$$

Podmínka $F_\mathrm{d} = F_\mathrm{g} = konst.$ nebývá u přirozených oběžnic Slunce či planet přesně splněna a její splnění u umělých kosmických těles je obtížné, neboť to vyžaduje velkou přesnost při udělení rychlosti i při nastavení poloměru trajektorie. Proto se většina přirozených i umělých těles pohybuje kolem centrálního tělesa po jiné periodicky se opakující trajektorii — po elipse.

Úlohy

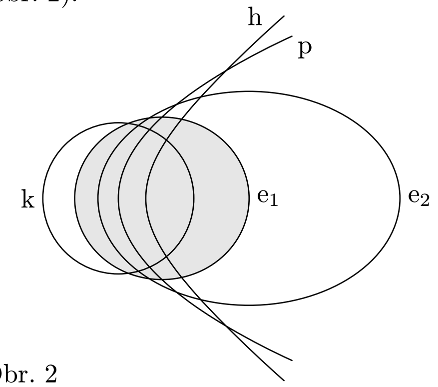
1. Mezinárodní kosmická stanice ISS se pohybuje ve výšce 380 km nad Zemí. Vypočítejte její rychlost a dobu oběhu. Zemi považujte za homogenní kouli o poloměru $R_\mathrm{z} = 6\,370$ km a hmotnosti $M_\mathrm{z} = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg.

2. V jaké výšce nad rovníkem se nacházejí *stacionární družice*, jejichž doba oběhu je hvězdný den $\doteq 86\,164$ s? Poloměr rovníku je $6\,378$ km.

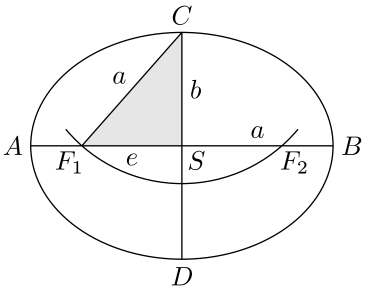
3. Země se pohybuje okolo Slunce po přibližně kruhové trajektorii. Střední vzdálenost Země od Slunce je 1 AU $\doteq 1{,}496 \cdot 10^{11}$ m a jeden rok má přibližně $3{,}156 \cdot 10^7$ s. Vypočítejte z těchto údajů hmotnost Slunce.

2 Geometrie elipsy

Budete-li chtít rychle zobrazit elipsu, použijte kapesní svítilnu, jejíž světelný tok je omezen rotační kuželovou plochou. Svítíte-li kolmo na stěnu, je osvětlená plocha ohraničena kružnicí. Nakláněním osy světelného kužele dostáváme stále protáhlejší elipsy, pak v jedné poloze parabolu a potom následují hyperboly (obr. 2).



Obr. 2



Obr. 3

Zafixujte svítilnu v poloze, kdy je osvětlená plocha ohraničena elipsou, obkreslete si elipsu na papír a vystřihněte ji. Přeložením se můžete přesvědčit, že je symetrická podle dvou os AB a CD, které jsou navzájem kolmé a protínají se ve středu elipsy S (obr. 3). Delší *hlavní osa* o délce $2a$ spojuje *hlavní vrcholy* A, B, kratší *vedlejší osa* o délce $2b$ spojuje *vedlejší vrcholy* C, D. Vezmeme-li do kružítka délku hlavní poloosy a a z vedlejšího vrcholu přetneme hlavní osu, dostaneme *ohniska* elipsy F_1, F_2. Jejich vzdálenost e od středu elipsy se nazývá *výstřednost* (*excentricita*) elipsy. Platí

$$a^2 = b^2 + e^2\,, \qquad e = \sqrt{a^2 - b^2}\,. \tag{4}$$

Podíl $\varepsilon = \dfrac{e}{a}$ se nazývá *číselná výstřednost* (*numerická excentricita*) elipsy.

Součet vzdáleností kteréhokoliv bodu elipsy od ohnisek F_1, F_2 je roven délce hlavní osy. Z toho vychází bodová konstrukce elipsy podle obr. 4. Zvolíme-li na hlavní ose bod X_1 a sestrojíme oblouky o poloměrech $|AX_1|$ a $|BX_1|$ se středy v ohniskách elipsy, dostaneme bod X a další tři body souměrně sdružené k bodu X podle os a středu elipsy.

Zvolme počátek soustavy souřadnic ve středu elipsy a osy x a y v hlavní a vedlejší ose elipsy. Pak pro libovolný bod $X = [x, y]$ elipsy platí

$$|F_1X| + |F_2X| = \sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a\,.$$

Umocněním této rovnosti a algebraickou úpravou dostaneme

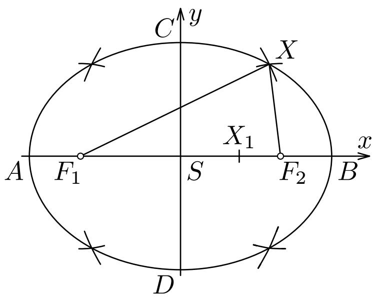
$$\sqrt{(x+e)^2+y^2}\sqrt{(x-e)^2+y^2} = 2a^2 - (x^2+y^2+e^2)$$

a dalším umocněním a úpravou dojdeme ke vztahu

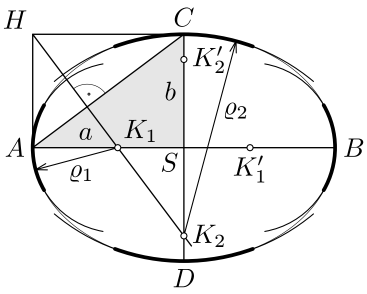
$$(a^2-e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-e^2)\,,$$

který můžeme upravit na *rovnici elipsy v osové poloze*:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{5}$$



Obr. 4



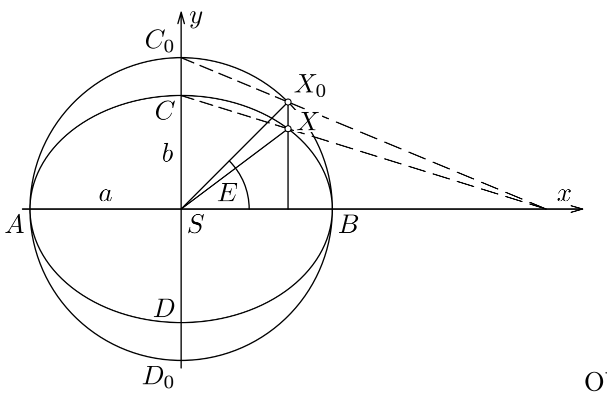
Obr. 5

Oblouky elipsy v okolí vrcholů můžeme nahradit oblouky *oskulačních kružnic*, jejichž středy K_1, K_2 nalezneme jednoduchou konstrukcí podle obr. 5. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle ASC \sim \triangle HAK_1 \sim \triangle K_2CH$ určíme poloměry oskulačních kružnic ϱ_1 a ϱ_2:

$$\frac{\varrho_1}{b} = \frac{b}{a} = \frac{a}{\varrho_2}\,, \qquad \varrho_1 = \frac{b^2}{a}\,, \qquad \varrho_2 = \frac{a^2}{b}\,. \tag{6}$$

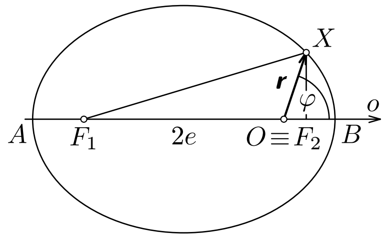
Elipsu v osové poloze můžeme získat také z kružnice o poloměru a, jestliže souřadnice y bodů zmenšíme v poměru $b : a$ (obr. 6). Zavedením *excentrické anomálie* E dojdeme k *parametrickým rovnicím elipsy v osové poloze*:

$$\boxed{x = a\cos E\,, \qquad y = b\sin E\,, \qquad E \in \langle 0, 2\pi)\,.} \tag{7}$$



Obr. 6

Při popisu pohybu hmotného bodu v radiálním gravitačním poli často volíme počátek souřadnicové soustavy v ohnisku a používáme *polární souřadnice* r, φ. Zvolíme-li pól v ohnisku F_2 a polární osu F_2B podle obr. 7, platí



Obr. 7

$$\sqrt{(2e + r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2} = 2a - r\,.$$

Úpravou dostaneme

$$r(a + e\cos\varphi) = a^2 - e^2 = b^2\,,$$

$$\boxed{r = \frac{\dfrac{b^2}{a}}{1 + \dfrac{e}{a}\cos\varphi} = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}\,.} \qquad (8)$$

Parametr p je roven poloměru ϱ_1 oskulační kružnice v hlavním vrcholu, ε je číselná výstřednost.

Úlohy

1. Narýsujte elipsu, jestliže $a = 5$ cm, $b = 3$ cm. *Návod*:

a) Narýsujte osový kříž a podle obr. 3 sestrojte ohniska F_1, F_2.

b) Podle obr. 5 nahraďte elipsu v blízkosti vrcholů oblouky oskulačních kružnic.

c) Bodovou konstrukcí podle obr. 4 nalezněte v každém kvadrantu několik bodů elipsy ve větší vzdálenosti od vrcholů.

d) Propojte oblouky oskulačních kružnic přes body určené bodovou konstrukcí pomocí křivítka.

2. Elipsa z předcházející úlohy je umístěna v osové poloze. Bod $X = [3\ \mathrm{cm}, ?]$ elipsy leží v prvním kvadrantu.

a) Vypočtěte výstřednost e a číselnou výstřednost ε elipsy.
b) Určete excentrickou anomálii bodu X.

3. Stejnou elipsu s tímtéž bodem X popište pomocí polárních souřadnic zavedených podle obr. 7.

a) Napište rovnici dané elipsy v polárních souřadnicích.
b) Určete souřadnice r a φ bodu X.

3 Keplerovy zákony

Základní poznatky o pohybu planet po eliptických trajektoriích okolo Slunce objevil *Johannes Kepler* (1571 – 1630). Formuloval tři zákony, které vyplynuly z rozboru velmi přesných záznamů o polohách planet, které prováděl po dlouhá léta dánský astronom *Tycho Brahe* (1546 – 1601). Oba se setkali v Praze ve službách císaře Rudolfa II., velkého příznivce astrologie. První a druhý zákon uveřejnil Kepler r. 1609:

Planety se pohybují okolo Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

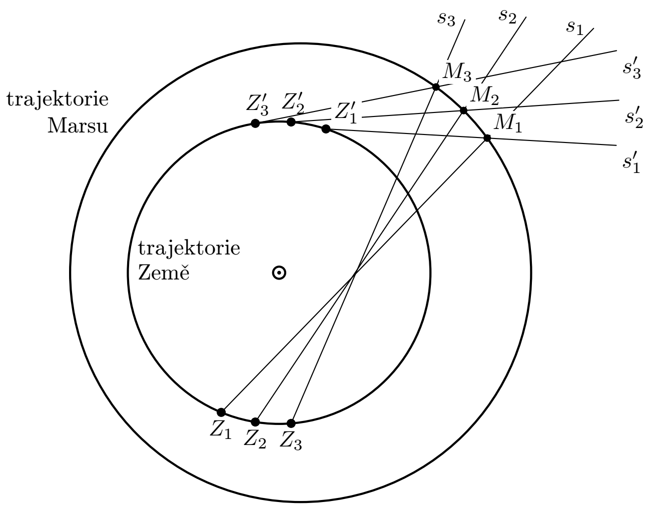
Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní.

K nim přidal r. 1619 třetí zákon:

Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin velkých poloos jejich trajektorií:

$$\boxed{\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}} \tag{9}$$

Způsob, jak Kepler dospěl k uvedeným zákonům, si můžeme velmi zjednodušeně vysvětlit podle obr. 8, kde jsou v určitém měřítku zobrazeny trajektorie Země a Marsu.



Obr. 8

Trajektorie Země, Marsu i ostatních planet leží přibližně v téže rovině a všechny planety obíhají Slunce v témže smyslu. Země obíhá kolem Slunce s periodou $T_z = 365,24$ d a Mars s periodou T, kterou za chvíli vypočteme, průměrnými úhlovými rychlostmi

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T}\,, \qquad \omega_z = \frac{2\pi}{T_z}\,.$$

Při pozorování Marsu z pohybující se Země nemůžeme přímo určit *siderickou* (skutečnou) dobu oběhu Marsu T, ale snadno zjistíme *synodickou* dobu oběhu $T_s = 779,94$ d, tj. průměrnou dobu mezi dvěma *opozicemi* Marsu (okamžiky, kdy se Mars nachází přesně na opačné straně Země než Slunce). Pozorovateli na Zemi se pohyb Marsu jeví, jako by probíhal průměrnou úhlovou rychlostí

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \omega_z - \omega_m = \frac{2\pi}{T_z} - \frac{2\pi}{T}\,. \tag{10}$$

Z toho určíme siderickou dobu oběhu Marsu jako

$$T = \frac{T_z T_s}{T_s - T_z} = 687 \text{ d} = 1{,}881 \text{ r}\,. \tag{11}$$

Zobrazme nejprve v určitém měřítku trajektorii Země, která má téměř přesně tvar kružnice, a na ni polohy Země Z_1 v čase t_1 a Z_1' v čase $t_1' = t_1 + kT$, kde kT je celistvý násobek periody Marsu. Zobrazme také polopřímky s_1 a s_1', na kterých vidíme Mars z bodů Z_1 a Z_1' v časech t_1 a t_1'. Protože polohy Marsu se opakují s periodou T, nachází se Mars v časech t_1 a t_1' v tomtéž bodě M_1, který nalezneme jako průsečík polopřímek s_1 a s_1'. Opakováním popsané konstrukce pro další dvojice časů $t_2,\ t_2';\ t_3,\ t_3' \ldots$ můžeme postupně vymodelovat celou trajektorii Marsu.

Popsaným způsobem vyšetřil Kepler pohyby všech tehdy známých planet a odhalil výše uvedené zákony. Znal ovšem jen poměrné velikosti eliptických trajektorií. Jejich skutečné rozměry bylo možno vypočítat až po r. 1672, kdy *Cassini* trigonometrickým měřením určil vzdálenost Země a Marsu.

Keplerovy zákony popisují, *jak* se pohybují planety, ale nevysvětlují, *proč* se tak pohybují. Tento problém vyřešil až *Isaac Newton* (1642 –1727), který objevil gravitační zákon, sestavil pohybovou rovnici hmotného bodu v radiálním gravitačním poli a jejím řešením Keplerovy zákony odvodil.

Vraťme se nyní k prvním dvěma Keplerovým zákonů. Obsah plochy ΔS opsané průvodičem planety za krátkou dobu Δt určíme jako obsah trojúhelníka určeného průvodičem $\boldsymbol{r}$ a vektorem $\boldsymbol{v}\Delta t$, kde $\boldsymbol{v}$ je okamžitá rychlost planety (obr. 9). Jestliže oba vektory svírají úhel α, platí

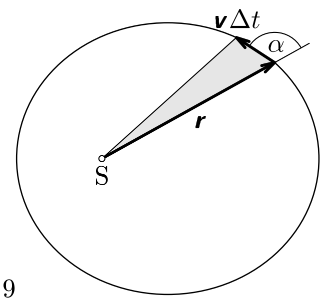
$$\Delta S = \frac{1}{2} r v \Delta t \sin\alpha\,.$$

Podíl

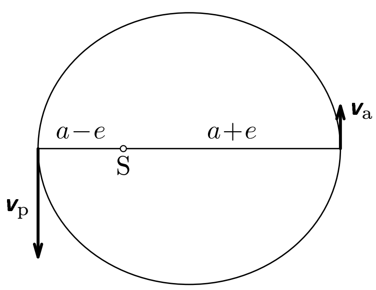
$$\boxed{w = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{rv\sin\alpha}{2}} \qquad (12)$$

udává obsah plochy opsané průvodičem za jednotku času a nazýváme jej *plošná rychlost* planety. Podle 2. Keplerova zákona je pro danou planetu konstantní. Pohybuje-li se planeta po eliptické trajektorii s délkou hlavní poloosy a a excentricitou e, délka průvodiče i úhel α se mění. Proto se mění i velikost okamžité rychlosti planety. Největší je rychlost v_p v *periheliu*, kdy je vzdálenost planety od Slunce $r_\mathrm{p} = a-e$, a nejmenší v *aféliu*, kdy platí $r_a = a+e$. V obou případech je $\alpha = 90°$ (obr. 10).

Z rovnosti $\frac{1}{2}v_\mathrm{p}r_\mathrm{p} = \frac{1}{2}v_\mathrm{a}r_\mathrm{a}$ plyne $\boxed{\frac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{a}} = \frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{p}} = \frac{a+e}{a-e}\,.}$ (13)



Obr. 9



Obr. 10

Keplerovy zákony platí nejen pro pohyb planet a dalších těles — planetek, komet, meteorů — okolo Slunce, ale i pro pohyb měsíců a družic v blízkosti planet, kdy ovšem roli centrálního tělesa přebírá daná planeta.

Úlohy

1. Oběžná doba Marsu je $T = 1{,}881$ r a číselná výstřednost jeho trajektorie $\varepsilon = 0{,}093\,39$.

a) Určete délky poloos jeho trajektorie.
b) Určete vzdálenosti Marsu od Slunce v periheliu a aféliu.
c) Určete poměr rychlostí Marsu v periheliu a aféliu.

2. Trajektorie Pluta má délku velké poloosy $a = 39{,}5$ AU a značnou číselnou výstřednost $\varepsilon = 0{,}248$. Trajektorie Neptuna má přibližně tvar kružnice o poloměru 30,1 AU. Vypočítejte vzdálenost Pluta od Slunce v periheliu a porovnejte ji s poloměrem trajektorie Neptuna.

3. Trajektorie planetky Apollo má délku hlavní poloosy $a = 1{,}471$ AU a číselnou výstřednost $\varepsilon = 0{,}560$.

a) Určete dobu oběhu a vzdálenosti od Slunce v periheliu a aféliu.

b) Určete velikost vedlejší poloosy trajektorie a do společného obrázku v měřítku 1 AU $\widehat{=}$ 5 cm zakreslete trajektorii Země jako kružnici o poloměru 1 AU a trajektorii planetky.

(Obě křivky na obrázku se sice protínají, ale rovina skutečné trajektorie planetky Apollo je od roviny ekliptiky odchýlena o 6,35° a planetka proto Zemi nemůže zasáhnout.)

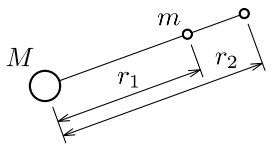
4 Mechanická energie tělesa na eliptické trajektorii

Při pohybu hmotného bodu po eliptické trajektorii se mění jeho okamžitá rychlost i vzdálenost od středu centrálního tělesa. Mění se tedy i jeho kinetická a potenciální energie, ale celková mechanická energie zůstává konstantní. Vztah pro výpočet kinetické energie známe:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2\,,$$

kde za v dosazujeme velikost okamžité rychlosti. Vztah pro výpočet *gravitační potenciální energie* E_pg tělesa o hmotnosti m v radiálním gravitačním poli tělesa o hmotnosti M nyní odvodíme.

Práce, kterou musíme vykonat, abychom těleso o hmotnosti m posunuli ve směru průvodiče ze vzdálenosti r_1 od středu centrálního tělesa do vzdálenosti r_2 (obr. 11), je rovna přírůstku jeho gravitační potenciální energie



Obr.11

$$W_{12} = E_\mathrm{pg2} - E_\mathrm{pg1} = F_\mathrm{p}(r_2 - r_1)\,, \tag{14}$$

kde F_p je velikost průměrné síly, kterou musíme působit:

$$F_1 = \varkappa\frac{Mm}{r_1^2}\,, \qquad F_2 = \varkappa\frac{Mm}{r_2^2}\,, \qquad F_\mathrm{p} = \sqrt{F_1F_2} = \varkappa\frac{Mm}{r_1r_2}\,.$$

Po dosazení

$$E_{\mathrm{pg2}} - E_{\mathrm{pg1}} = \varkappa \frac{Mm}{r_1 r_2}(r_2 - r_1) = \varkappa \frac{Mm}{r_1} - \varkappa \frac{Mm}{r_2} = -\varkappa \frac{Mm}{r_2} - \left(-\varkappa \frac{Mm}{r_1}\right) .$$

Při popisu pohybů v radiálním gravitačním poli je výhodné zvolit potenciální energii v nekonečné vzdálenosti za nulovou. Pak je ovšem v konečné vzdálenosti záporná a platí

$$\boxed{E_{\mathrm{pg}} = -\varkappa \frac{Mm}{r} .} \tag{15}$$

Užitím vztahu (13) a zákona zachování energie odvodíme vztah pro výpočet velikosti okamžité rychlosti v kterémkoliv bodě eliptické trajektorie. Vyjdeme ze soustavy rovnic

$$v_{\mathrm{a}} = v_{\mathrm{p}} \frac{a-e}{a+e} \tag{16}$$

$$\frac{1}{2} m v_{\mathrm{p}}^2 - \varkappa \frac{Mm}{a-e} = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{a}}^2 - \varkappa \frac{Mm}{a+e} \tag{17}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 - \varkappa \frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{p}}^2 - \varkappa \frac{Mm}{a-e} \tag{18}$$

Dosazením z (16) do (17) a úpravou dostaneme

$$v_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{\varkappa M}{a} \frac{a+e}{a-e}} \tag{19}$$

a po dosazení do (18) a příslušných úpravách

$$\boxed{v = \sqrt{\varkappa M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} .} \tag{20}$$

Pomocí vztahu (19) můžeme vyjádřit plošnou rychlost jako

$$w = \frac{1}{2} r_{\mathrm{p}} v_{\mathrm{p}} = \frac{a-e}{2} \sqrt{\frac{\varkappa M}{a} \frac{a+e}{a-e}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varkappa M}{a} (a^2 - e^2)} ,$$

$$\boxed{w = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{\varkappa M}{a}}} \tag{21}$$

Úlohy

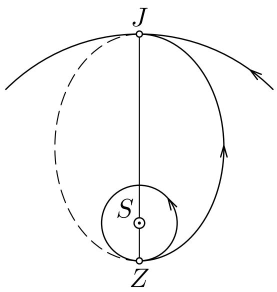
1. Jak velkou práci musejí vykonat motory rakety, aby vynesly družici o hmotnosti 1 500 kg do výšky 630 km a udělily jí rychlost potřebnou pro pohyb po trajektorii tvaru kružnice?

2. Určete gravitační potenciální energii tělesa o hmotnosti 1 kg, které se nachází na povrchu Země. Uvažujte jen gravitační pole Země a energii považujte za nulovou pro $r \to \infty$.

3. Jakou počáteční rychlost bychom museli udělit tělesu v těsné blízkosti Země, aby se trvale vzdálilo z dosahu jejího gravitačního působení?

4. Halleyova kometa prolétla naposled okolo Slunce r. 1986 a vrátí se opět za 76,1 r. V periheliu byla od Slunce vzdálena 0,587 AU. Určete rychlost komety v periheliu, plošnou rychlost a obsah plochy omezené její trajektorií.

5. Při letu kosmické sondy k jiným planetám můžeme téměř po celou dobu letu zanedbat gravitační působení planet a přihlížet jen ke gravitačnímu působení Slunce. Energeticky nejvýhodnější je tzv. *Hohmannova trajektorie*, která se dotýká trajektorie Země v místě startu a trajektorie planety v místě přistání. Tato místa musí ležet na opačných stranách od Slunce. Na obr. 12 je znázorněna Hohmannova trajektorie pro let ze Země na Jupiter.



Obr. 12

a) Určete dobu letu.

b) Určete rychlost sondy po opuštění oblasti, kde převládá gravitační působení Země, a před vstupem do oblasti, kde převládá gravitační působení Jupitera.

c) Porovnejte rychlosti určené v úkolu b) s rychlostmi Země a Jupitera.

Trajektorie Země a Jupitera považujte za kružnice o poloměrech 1 AU a 5,2 AU. Doba oběhu Jupitera je 11,86 r.

5 Výpočet rozměrů eliptické trajektorie a doby oběhu z okamžitého pohybového stavu tělesa

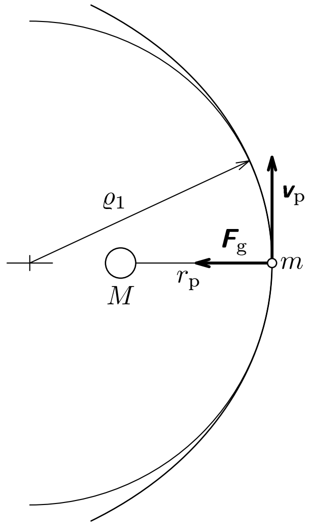
V okolí *pericentra* (perihelia, perigea, ...) probíhá pohyb tělesa jako rovnoměrný pohyb po oskulační kružnici o poloměru ϱ_1, způsobený dostředivou gravitační silou F_g (obr. 12). Má přitom plošnou rychlost

$$w = \frac{v_\mathrm{p} r_\mathrm{p}}{2}.$$

Z (1), (4) a (6) plyne

$$F_\mathrm{g} = \frac{\varkappa M m}{r_\mathrm{p}^2} = m a_\mathrm{d} = \frac{m v_\mathrm{p}^2}{\varrho_1} = \frac{m v_\mathrm{p}^2 a}{b^2}\,,$$

$$b^2 = a\frac{v_\mathrm{p}^2 r_\mathrm{p}^2}{\varkappa M} = a^2 - e^2 = a^2 - (a - r_\mathrm{p})^2 = 2 a r_\mathrm{p} - r_\mathrm{p}^2\,.$$



Obr. 12

Úpravou dostaneme

$$a = \frac{r_\mathrm{p}^2}{2 r_\mathrm{p} - \dfrac{v_\mathrm{p}^2 r_\mathrm{p}^2}{\varkappa M}} = \frac{\varkappa M}{2\left(\dfrac{\varkappa M}{r_\mathrm{p}} - \dfrac{v_\mathrm{p}^2}{2}\right)}\,,$$

$$b^2 = \frac{a}{\varkappa M} v_\mathrm{p}^2 r_\mathrm{p}^2 = \frac{4 w^2}{2\left(\dfrac{\varkappa M}{r_\mathrm{p}} - \dfrac{v_\mathrm{p}^2}{2}\right)}\,.$$

Zaveďme substituci

$$D = \frac{v_\mathrm{p}^2}{2} - \frac{\varkappa M}{r_\mathrm{p}}.$$

Výraz D má jednoduchý fyzikální význam, který odhalíme jeho úpravou na tvar

$$D = \frac{\dfrac{1}{2} m v_\mathrm{p}^2 - \dfrac{\varkappa M m}{r_\mathrm{p}}}{m}\,.$$

Je to celková mechanické energie obíhajícího tělesa při jeho průletu pericentrem dělená jeho hmotností, tedy *měrná mechanická energie*. Podle zákona zachování energie se ovšem celková mechanická energie během obíhání nemění a můžeme ji vypočítat z polohy a okamžité rychlosti v kterémkoliv bodě trajektorie. Z odvození je také zřejmé, že při pohybu po eliptické trajektorii je celková mechanická energie obíhajícího tělesa *záporná* (jinak by vyšlo $a < 0$).

Také plošná rychlost w je během pohybu konstantní a můžeme ji vypočítat v kterémkoliv bodě trajektorie podle vztahu (12). Známe-li tedy v některém okamžiku vzdálenost r obíhajícího tělesa od centrálního tělesa, velikost okamžité rychlosti v a úhel α, který svírají vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{v}$, můžeme vypočítat délky poloos eliptické trajektorie pomocí vztahů

$$\boxed{a = \frac{\varkappa M}{-2D}\,, \quad b = w\sqrt{\frac{2}{-D}}\,, \quad \text{kde} \quad D = \frac{v^2}{2} - \frac{\varkappa M}{r}\,, \quad w = \frac{vr\sin\alpha}{2}\,.} \tag{22}$$

Dobu oběhu vypočítáme, když plochu elipsy dělíme plošnou rychlostí:

$$\boxed{T = \frac{\pi ab}{w}} \tag{23}$$

Dosazením ze vztahu (21) dostaneme

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{\varkappa M}}\,, \qquad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\varkappa M}\,,} \tag{24}$$

což souhlasí se vztahem (3) pro výpočet periody tělesa na kruhové trajektorii a upřesňuje 3. Keplerův zákon (9).

Poznámka: Jestliže $D = 0$, má trajektorie tvar paraboly s parametrem

$$p = 2r_{\mathrm{p}} = \frac{4w^2}{\varkappa M}\,.$$

Jestliže $D > 0$, je trajektorií větev hyperboly, jejíž poloosy jsou

$$a = \frac{\varkappa M}{2D}\,, \quad b = w\sqrt{\frac{2}{D}}\,.$$

Příklad 1

Meteor se pohybuje ve vzdálenosti 2,2 AU od Slunce rychlostí o velikosti $12{,}5\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$, jejíž směr je odchýlen od směru průvodiče o 55°. Určete rozměry trajektorie a dobu oběhu. Do společného obrázku nakreslete dráhu Země a okamžitou polohu meteoru. Pak dokreslete trajektorii meteoru.

Řešení

Dosazením do vztahů (22) a (23) postupně vypočítáme

$$D = -3{,}25 \cdot 10^{8}\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}\,, \qquad w = 1{,}685 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}\,,$$

$$a = 2{,}04 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m} = 1{,}364\ \mathrm{AU}\,, \qquad b = 1{,}32 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m} = 0{,}883\ \mathrm{AU}\,,$$

$$T = 5{,}03 \cdot 10^{7}\ \mathrm{s} = 582\ \mathrm{d}\,.$$

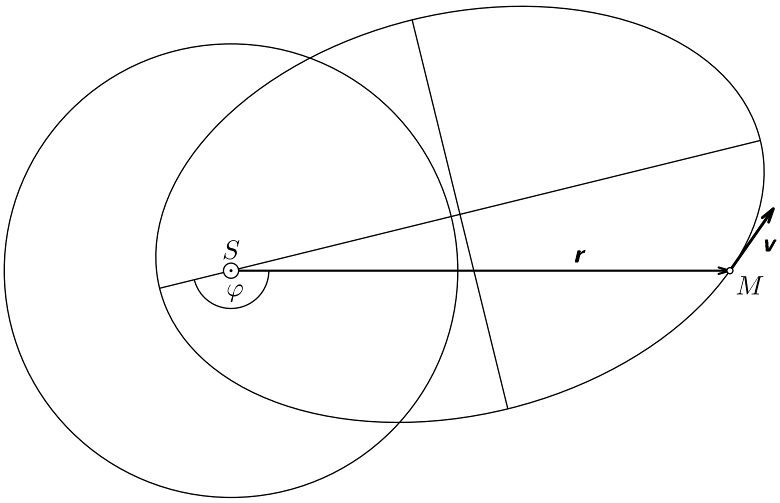
Výstřednost a číselná výstřednost trajektorie mají hodnoty

$$e = 1{,}56 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m} = 1{,}04\ \mathrm{AU}\,, \qquad \varepsilon = 0{,}762\,.$$

Pomocí vztahu (8) určíme okamžitý úhel φ, který svírá průvodič meteoru s polopřímkou Slunce – perihelium. Platí

$$\cos\varphi = \frac{\dfrac{p}{r} - 1}{\varepsilon} = \frac{\dfrac{b^2}{ar} - 1}{\dfrac{e}{a}} = \frac{b^2 - ar}{er} = -0{,}97109\,, \qquad \varphi = 166{,}2^\circ\,.$$

Pro zobrazení trajektorií na obr. 13 bylo použito měřítko 1 AU $\widehat{=}$ 3 cm.



Obr. 13

Úloha

Družici Země byla ve výšce 200 km udělena kolmo k průvodiči rychlost o velikosti $8\,500\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Vypočtěte rozměry její trajektorie a dobu oběhu.

6 Časový průběh pohybu po eliptické trajektorii. Keplerova rovnice

Zvolme vztažnou soustavu tak, aby počátek ležel ve středu centrálního tělesa, tedy v ohnisku trajektorie, a kladná poloosa x aby procházela pericentrem (obr. 14). Za dobu t od průchodu pericentrem vyplní průvodič tělesa část elipsy omezenou obloukem PX a úsečkami XF a FP. Tento obrazec můžeme získat oddělením trojúhelníka SFX_0 od kruhové výseče SPX_0 a zmenšením zbytku ve směru osy y v poměru $b : a$. Obsah plochy opsané průvodičem za dobu t můžeme za pomoci vztahu (21) vyjádřit pomocí excentrické anomálie E bodu X jako

$$S = wt = \frac{bt}{2}\sqrt{\frac{\varkappa M}{a}} = \left(\frac{a^2 E}{2} - \frac{ae\sin E}{2}\right)\frac{b}{a} = \frac{ab}{2}E - \frac{be}{2}\sin E\,.$$

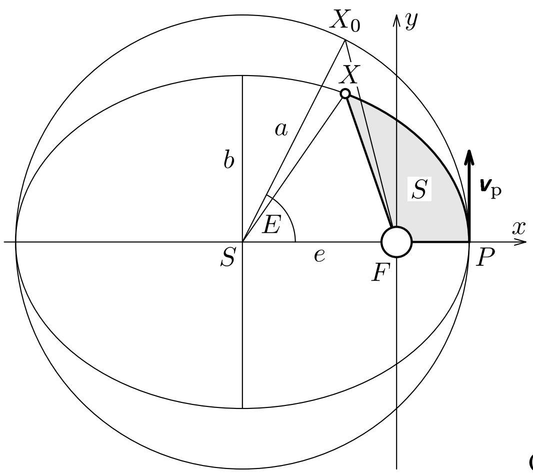
(E udáváme v radiánech.) Vynásobíme-li vztah výrazem $\dfrac{2}{ab}$, dostaneme *Keplerovu rovnici*

$$(\varkappa M)^{0,5} a^{-1,5} t = E - \frac{e}{a}\sin E\,, \tag{25}$$

neboli

$$\boxed{E - \varepsilon \sin E - Qt = 0\,,} \tag{26}$$

kde ε je numerická excentricita trajektorie a $Q = (\varkappa M)^{0,5} a^{-1,5}$.



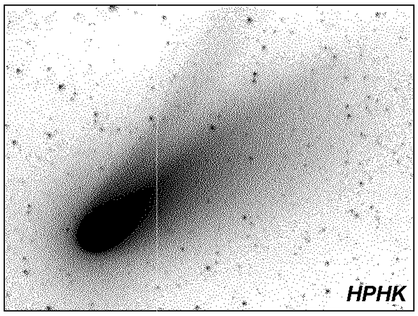
Obr. 14

Keplerovou rovnicí je excentrická anomálie určena *implicitně* a pro dané t ji musíme vypočítat některou z přibližných numerických metod (viz studijní text [1]). Pro $t \in (0, T)$ je výraz Qt v intervalu $(0, 2\pi)$ a také E je v intervalu $(0, 2\pi)$. Známe-li E, vypočítáme souřadnice bodu X v čase t pomocí vztahů

$$\boxed{x = a\cos E - e\,, \qquad y = b\sin E\,.} \tag{27}$$

Příklad 2

Kometa Hale–Bopp (obr. 15) objevená 23. 7. 1995 prolétla 1. 4. 1997 periheliem ve vzdálenosti 0,9141 AU od Slunce. Hlavní poloosa její trajektorie měří 187,8 AU. V jaké vzdálenosti od Slunce se nacházela v době objevení a jakou rychlostí se přitom pohybovala?



Obr. 15

Řešení

Nejprve vypočítáme číselnou výstřednost a délku vedlejší polosy trajektorie.

$$e = a - r_\mathrm{p} \doteq 186{,}9\ \mathrm{AU}\,, \qquad \varepsilon = \frac{e}{a} = 0{,}99513\,, \qquad b = \sqrt{a^2 - e^2} = 18{,}51\ \mathrm{AU}\,.$$

Od objevení komety do průletu periheliem uplynulo 618 d $= 5{,}34 \cdot 10^7$ s. Tento čas a hodnoty $a = 2{,}809 \cdot 10^{13}$ m, $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg dosadíme do Keplerovy rovnice a upravíme ji na tvar

$$E - 0{,}99513 \sin E - 0{,}0041322 = 0\,.$$

Numerickým řešením dojdeme ke kořenu $E = 0{,}259$ rad a dosazením do vztahů (27) dostaneme souřadnice místa, kde se kometa nacházela v době jejího objevení.

$$x \doteq -8{,}00 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m} = -5{,}35\ \mathrm{AU}\,, \qquad y \doteq 7{,}09 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m} = 4{,}74\ \mathrm{AU}\,.$$

Z toho určíme vzdálenost komety od Slunce. Velikost rychlosti komety v místě objevení vypočítáme pomocí vztahu (20).

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \doteq 1{,}07 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m} = 7{,}15\ \mathrm{AU}\,, \qquad v = 16 \cdot 10^3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Úloha

Za jakou dobu od průletu periheliem se bude kometa z příkladu 2 nacházet ve vedlejším vrcholu trajektorie?

7 Modelování pohybu tělesa po eliptické trajektorii

Model pohybu tělesa po eliptické trajektorii můžeme vytvořit tak, že pro aritmetickou posloupnost časů $\{t_i\}$ s počáteční hodnotou 0 a zvolenou diferencí (časovým krokem) h, tj. pro $\{t_i\} = 0, h, 2h, 3h, \ldots$ vypočítáme polohy tělesa řešením Keplerovy rovnice a ve vhodném měřítku je zobrazíme.

Příklad 3

Řešením Keplerovy rovnice modelujte pohyb družice Země, jejíž perigeum je ve vzdálenosti 6 700 km od zemského středu a rychlost v perigeu má velikost 9 000 m·s^{-1}. Zvolte časový krok 60 s.

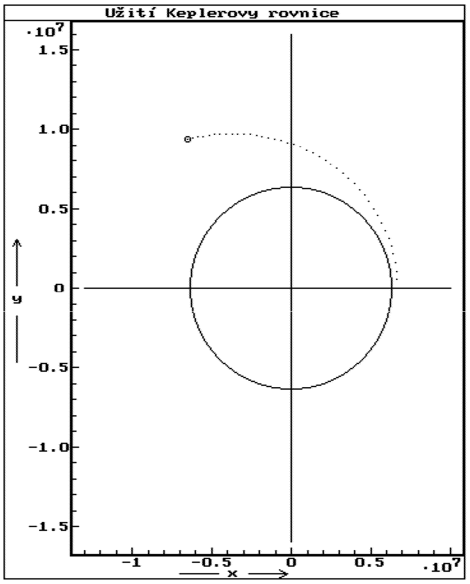
Řešení v systému FAMULUS

• Program výpočtu:

```
- - - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce  - - - - - -
m=6e24        ! hmotnost Země
km=m*6.67e-11 ! hmotnost Země vynásobená gravitační konstantou
h=60          ! časový krok
- - - - - - - - - - - -  počáteční hodnoty   - - - - - - - - - - -
t=0
x=6.7e6; y=0   ! počáteční souřadnice družice
v=9000         ! počáteční rychlost

SetMark4(1,3); Disp4(1,0,0,6.37e6,6.37e6)  ! vykreslení Země

A=x/(2-v^2*x/km)   ! výpočet parametrů trajektorie a doby oběhu
ex=A-x;  ce=ex/A
B=sqrt(A^2-ex^2)
T=2*pi*A*B/v/x

Q=sqrt(km)*A^-1.5
DISP
- - - - - - - - - - - - - - -  model   - - - - - - - - - - - - - - -
 t=t+h
 E0=0; E1=10;                 ! řešení Keplerovy rovnice
 LOOP                         ! metodou půlení intervalu
  E2=E0/2+E1/2;
  f=E2-ce*sin(E2)-Q*t
  IF abs(f)<1e-6 THEN E=E2; EXIT END
```

```
 IF f<0 THEN E0=E2;
   ELSE E1=E2 END
END
x=A*cos(E)-ex
y=B*sin(E)
```

- Model:



t	x	y
0	6700000	0
60	6683966	539569
120	6636024	1076553
180	6556636	1608470
240	6446571	2132856
300	6306862	2647431
360	6138778	3150101
420	5943784	3638973
480	5723497	4112388
540	5479663	4568892
600	5214093	5007292
660	4928625	5426635
720	4625149	5826121
780	4305467	6205249
840	3971405	6563614
900	3624638	6901073
960	3266851	7217539
1020	2899590	7513103
1080	2524318	7787953
1140	2142410	8042361
1200	1755148	8276671
1260	1363695	8491301
1320	969160	8686695
1380	572508	8863357
1440	174697	9021786
1500	−223480	9162532
1560	−621252	9286135
1620	−1017918	9393140
1680	−1412837	9484097
1740	−1805454	9559555
1800	−2195244	9620054
1860	−2581760	9666128
1920	−2964556	9698294
1980	−3343280	9717064
2040	−3717548	9722931
2100	−4087064	9716377
2160	−4451570	9697870
2220	−4810792	9667862
2280	−5164521	9626792
2340	−5512531	9575084
2400	−5854669	9513145
2460	−6190759	9441370
2520	−6520632	9360146

Častěji se setkáváme s modelováním pohybů v gravitačním poli *numerickými metodami*, které vycházejí pouze z pohybové rovnice $\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}} = m\boldsymbol{a}$, a ze základních kinematických vztahů $\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}\Delta t$, $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}\Delta t$. Chceme-li pro aritmetickou posloupnost časů $\{t_i\} = 0,\ h,\ 2h,\ 3h,\ \ldots$ určit posloupnost polohových vektorů $\{\boldsymbol{r}_i\}$, vyjdeme z počáteční polohy $\boldsymbol{r}_0$ a počáteční rychlosti $\boldsymbol{v}_0$ a opakovaně použijeme rekurentní vztahy

$$\boldsymbol{v}_{i+1} = v_i + \boldsymbol{a}_i \cdot h\,, \qquad \boldsymbol{r}_{i+1} = \boldsymbol{r}_i + v_i \cdot h\,,$$

kde

$$\boldsymbol{a}_i = \frac{\boldsymbol{F}_{gi}}{m} = -\frac{\varkappa M}{r_i^3}\boldsymbol{r}_i;$$

Příklad 4

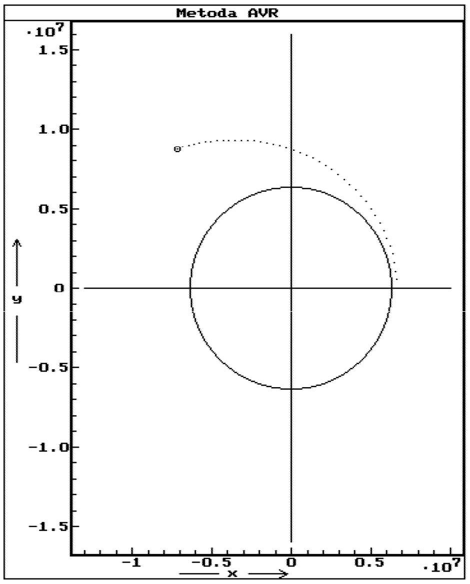
Předcházející příklad řešte numerickým modelováním.

Řešení v systému FAMULUS

• Program výpočtu:

```
- - - - - - proměnné, konstanty, procedury a funkce - - - - - -
m=6e24        ! hmotnost Země
km=m*6.67e-11 ! hmotnost Země vynásobená gravitační konstantou
h=60          ! časový krok
- - - - - - - - - - - -  počáteční hodnoty  - - - - - - - - - - -
t=0; x=6.7e6; y=0; vx=0; vy=9000
DISP
SetMark4(1,3); Disp4(1,0,0,6.37e6,6.37e6) ! vykreslení Země
- - - - - - - - - - - - - - -  model  - - - - - - - - - - - - - - -
f=-km/(x^2+y^2)^1.5; ax=f*x; ay=f*y    ! cyklický výpočet
vx=vx+ax*h; vy=vy+ay*h
x=x+vx*h; y=y+vy*h
t=t+h
```

• Model:



t	x	y
0	6700000	0
60	6667906	540000
120	6603723	1077401
180	6507780	1609621
240	6380718	2134144
300	6223472	2648571
360	6037248	3150666
420	5823483	3638387
480	5583804	4109918
540	5319987	4563683
600	5033912	4998355
660	4727523	5412855
720	4402783	5806345
780	4061650	6178214
840	3706039	6528062
900	3337806	6855676
960	2958725	7161011
1020	2570481	7444165
1080	2174654	7705363
1140	1772723	7944931
1200	1366058	8163278
1260	955921	8360883
1320	543473	8538276
1380	129775	8696025
1440	−284207	8834730
1500	−697596	8955004
1560	−1109599	9057475
1620	−1519497	9142772
1680	−1926646	9211524
1740	−2330464	9264353
1800	−2730431	9301872
1860	−3126081	9324682
1920	−3516995	9333368
1980	−3902803	9328503
2040	−4283173	9310639
2100	−4657810	9280314
2160	−5026454	9238047
2220	−5388872	9184338
2280	−5744860	9119670
2340	−6094238	9044509
2400	−6436847	8959303
2460	−6772549	8864483
2520	−7101223	8760463

Jednoduchá numerická metoda, jakou jsme právě použili, vede k modelu, který sice dobře vystihuje charakter sledovaného pohybu, ale je dosti nepřesný.

Přesnost výpočtu bychom mohli zvětšit zkrácením časového kroku, čímž se ovšem prodlužuje doba výpočtu, nebo volbou přesnější numerické metody. Podrobněji se modelováním pohybů numerickými metodami zabývá studijní text [2].

Úloha

Modelujte pohyb Halleyovy komety v období okolo průletu periheliem. Zvolte časový krok 1 týden. Do téhož obrázku znázorněte pro srovnání trajektorii Země.

Literatura

[1] Šedivý, P.: *Užití numerických metod při řešení rovnic ve fyzikálních úlohách*. Studijní text 35. ročníku FO

[2] Šedivý, P.: *Modelování pohybů numerickými metodami*. Knihovnička fyzikální olympiády č. 38, MAFY, Hradec Králové 1999

[3] Ungermann, Z., Volf, I.: *Pohyb tělesa v radiálním gravitačním poli*. Škola mladých fyziků, SPN, Praha 1985

[4] Volf, I.: *Pohyb umělých družic*. Škola mladých fyziků, SPN, Praha 1974

[5] Lepil, O., Grün, M., Šedivý, P.: *Fyzika a technika*. SPN, Praha 1984

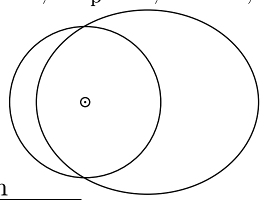
Výsledky úloh

1.1. $v = 7\,700\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $T = 5500\ \mathrm{s}$. **1.2.** $r = 42\,230\ \mathrm{km}$, $h = 35\,850\ \mathrm{km}$.
1.3. $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$.
2.2. $e = 4\ \mathrm{cm}$, $\varepsilon = 0{,}8$; $y = 2{,}4\ \mathrm{cm}$, $E = \arcsin\dfrac{y}{b} = 53{,}13^\circ = 0{,}927\ \mathrm{rad}$.
2.3. $r = \dfrac{1{,}8\ \mathrm{cm}}{1 + 0{,}8\cos\varphi}$; $x = -1\ \mathrm{cm}$, $y = 2{,}4\ \mathrm{cm}$, $r = 2{,}6\ \mathrm{cm}$,

$$\cos\varphi = \frac{\frac{p}{r} - 1}{\varepsilon} = -0{,}3846, \quad \varphi = 112^\circ = 1{,}966\ \mathrm{rad}.$$

3.1. $a = 1\ \mathrm{AU} \cdot \sqrt[3]{\left(\dfrac{T}{1\ \mathrm{r}}\right)^2} = 1{,}524\ \mathrm{AU}$, $e = 0{,}142\ \mathrm{AU}$;

$r_\mathrm{p} = 1{,}3815\ \mathrm{AU}$, $r_\mathrm{a} = 1{,}6661\ \mathrm{AU}$, $\dfrac{v_\mathrm{p}}{v_\mathrm{a}} = 1{,}206$.
3.2. $r_\mathrm{p} = a(1 - \varepsilon) = 29{,}7\ \mathrm{AU}$.
3.3. $T = 1{,}78\ \mathrm{r}$, $r_\mathrm{p} = 0{,}647\ \mathrm{AU}$, $r_\mathrm{a} = 2{,}295\ \mathrm{AU}$; $b = 1{,}219\ \mathrm{AU}$.



$1\ \mathrm{AU} \mathrel{\widehat{=}} 1\ \mathrm{cm}$

4.1. $v = \sqrt{\dfrac{\varkappa M}{R_\mathrm{z} + h}} = 7\,560\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$,

$$W = \varkappa M m \left(\frac{1}{R_\mathrm{z}} - \frac{1}{R_\mathrm{z} + h}\right) + \frac{1}{2} m v^2 = 5{,}14 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}.$$

4.2. $E_\mathrm{pg} = -6{,}29 \cdot 10^7\ \mathrm{J}$. **4.3.** $v_\mathrm{u} = \sqrt{\dfrac{2\varkappa M}{R_\mathrm{z}}} = 11\,200\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

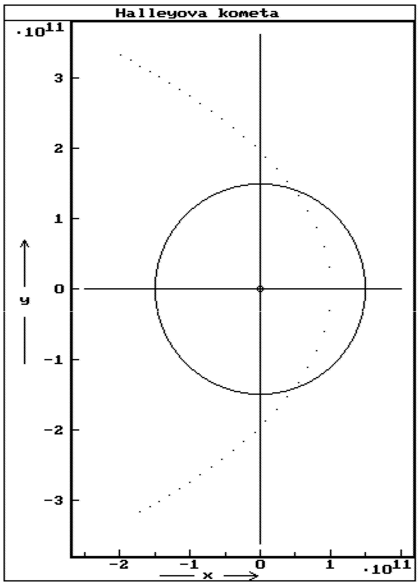
4.4. $a = 17{,}96\ \mathrm{AU}$, $v_\mathrm{p} = \sqrt{\varkappa M \left(\dfrac{2}{r_\mathrm{p}} - \dfrac{1}{a}\right)} = 55 \cdot 10^3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$,

$w = \dfrac{1}{2} v_\mathrm{p} r_\mathrm{p} = 2{,}4 \cdot 10^{15}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$, $S = wT = 5{,}75 \cdot 10^{24}\ \mathrm{m^2}$.

4.5. $a = \dfrac{r_\mathrm{z} + r_\mathrm{j}}{2} = 3{,}1\ \mathrm{AU}$, $t = \dfrac{T}{2} = 2{,}73\ \mathrm{r}$, $v_\mathrm{p} = 38\,600\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$,
$v_\mathrm{a} = 7\,420\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $v_\mathrm{z} = 29\,800\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $v_\mathrm{j} = 13\,100\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.
5. $a = 8{,}07 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$, $b = 7{,}93 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$, $T = 7\,200\ \mathrm{s}$.

6. $t = \dfrac{E - \varepsilon \sin E}{Q} = \dfrac{\frac{\pi}{2} - 0{,}99513}{7{,}74 \cdot 10^{-11}}\ \mathrm{s} = 7{,}44 \cdot 10^9\ \mathrm{s} = 236\ \mathrm{r}$. $(T = 2\,570\ \mathrm{r.})$

7.



t	x	y
−12096000	−1.7E+11	−3.2E+11
−11491200	−1.6E+11	−3.1E+11
−10886400	−1.4E+11	−3.0E+11
−10281600	−1.3E+11	−2.9E+11
−9676800	−1.1E+11	−2.8E+11
−9072000	−1.0E+11	−2.7E+11
−8467200	−8.5E+10	−2.6E+11
−7862400	−7.0E+10	−2.5E+11
−7257600	−5.4E+10	−2.4E+11
−6652800	−3.9E+10	−2.3E+11
−6048000	−2.3E+10	−2.2E+11
−5443200	−7.7E+9	−2.0E+11
−4838400	8.0E+9	−1.9E+11
−4233600	2.4E+10	−1.7E+11
−3628800	3.9E+10	−1.5E+11
−3024000	5.4E+10	−1.3E+11
−2419200	6.8E+10	−1.1E+11
−1814400	8.1E+10	−8.7E+10
−1209600	9.1E+10	−6.0E+10
−604800	9.8E+10	−3.1E+10
0	1.0E+11	−8.3E+6
604800	9.8E+10	3.1E+10
1209600	9.1E+10	6.0E+10
1814400	8.1E+10	8.7E+10
2419200	6.8E+10	1.1E+11
3024000	5.4E+10	1.3E+11
3628800	3.9E+10	1.5E+11
4233600	2.4E+10	1.7E+11
4838400	8.0E+9	1.9E+11
5443200	−7.7E+9	2.0E+11
6048000	−2.3E+10	2.2E+11
6652800	−3.9E+10	2.3E+11
7257600	−5.4E+10	2.4E+11
7862400	−7.0E+10	2.5E+11
8467200	−8.5E+10	2.6E+11
9072000	−1.0E+11	2.7E+11
9676800	−1.1E+11	2.8E+11
10281600	−1.3E+11	2.9E+11
10886400	−1.4E+11	3.0E+11
11491200	−1.6E+11	3.1E+11
12096000	−1.7E+11	3.2E+11
12700800	−1.8E+11	3.3E+11
13305600	−2.0E+11	3.3E+11