Fyzika je kolem nás (Práce – výkon – energie)

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Ivo Volf – Miroslava Jarešová

Obsah

Několik slov úvodem ...

Pojem práce je bezprostřední součástí našeho života. Běžně dělíme život na dny plné práce a na dny odpočinku. Otec má neustále něco na práci, myslí na svou práci, nevyhýbá se ani práci doma. Učitel má plno práce s přípravou na hodiny i se svými žáky. Také studenti mají hodně práce s tím, aby pochopili svět kolem sebe, a především aby získali obraz o životě. Sportovci zase podávají dobré či špatné výkony. Dobrým výkonem pro sprintera je čas 10,0 s na dráze 100 m. Skokan naopak dosáhl výborného výkonu 5,50 m při skoku o tyči. Sportovní výkon 20,0 m ve vrhu koulí také není k zahození. A co energie – hyperaktivní dítě má tolik energie, že se musí jeho aktivita tlumit. Máme-li málo energie, můžeme sníst např. tabulku čokolády, která nás posílí. Energii také získáme vypitím energetického nápoje. Někteří sportovci získávají energii posilováním před závodem, jiní zase používají nelegálního a nepovoleného dopingu. Diváci často vybíjejí svou energii na fotbalovém zápase skandováním, jiní ničí lavice a další zařízení. A co je to duševní energie, kterou je třeba vrhnout na papír, to vědí spisovatelé a básníci ...

U živočichů (sportovců, chlapců, zvířat aj., kteří v této publikaci vystupují v textu úloh) víme, že mechanická práce nevyjadřuje zcela skutečnost. Zvednutí závaží u vzpěrače sice nahradíme působením síly na závaží a určíme mechanickou práci, avšak toto zvedání je doprovázeno natahováním a smršťováním svalů – to ale nedokážeme precizně vyjádřit. Proto reálné úlohy musíme zjednodušovat na jednoduché modely činností a zabývat se jen problémy, které jsou spojeny s výsledky fyziologických činností. Získané hodnoty sil a práce jsou zpravidla minimálními hodnotami. Přesto jsme takové úlohy do naší publikace zařadili.

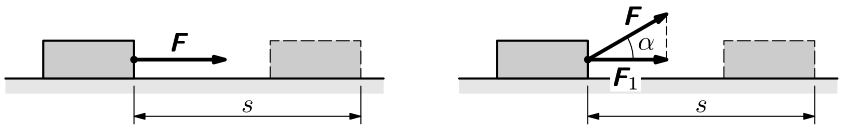
Víme však přesně, co je to práce, výkon a energie? Jsme schopni pochopit, že tyto pojmy, s nimiž přicházejí žáci ve škole do styku v předmětu fyzika, jsou přesně vymezeny? Tak o tom je naše malé zamyšlení, které jste právě otevřeli.

Úvodní poznámka

Při praktickém měření veličin v běžném životě vystačíme s přesností číselných hodnot na 2 – 3 číslice. Z tohoto důvodu a proto, abychom mohli dospět rychleji k číselným výsledkům, uvažujeme v celém textu s $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1 Mechanická práce

Mechanickou práci spojujeme s působením síly $\boldsymbol{F}$ po určité dráze s. Práce je skalární veličinou. V případě, že se těleso o hmotnosti m posunuje ve směru působící síly, můžeme práci vypočítat $W = Fs$, kde F je velikost síly $\boldsymbol{F}$. Jednotkou práce je 1 J (joule), často používané násobky jsou 1 kJ = 1 000 J, 1 MJ = = 1 000 000 J, 1 GJ = 10^9 J, popř. díly 1 mJ = 0,001 J, 1 μJ = 0,000 001 J.



Obr. 1 Práce $W = Fs\cos\alpha$

Jestliže však vektor síly $\boldsymbol{F}$ svírá se směrem pohybu úhel α, pak nejprve stanovíme průmět síly do směru pohybu, tj. $F_1 = F\cos\alpha$, a potom práci stanovíme ze vztahu

$$W = Fs\cos\alpha.$$

Později se dozvíte, že práci určujeme pomocí skalárního součinu vektoru síly $\boldsymbol{F}$ a vektoru posunutí $\boldsymbol{s}$, tedy $W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s}$.

Odtud plyne závěr, že při posunutí tělesa působením síly $\boldsymbol{F}$ se koná práce, která závisí na velikosti síly F, dráze při posunutí s, ale také na úhlu α, který působící síla svírá se směrem posunutí.

Práce je nulová pro tři případy: síla nepůsobí ($F = 0$), těleso se neposunuje ($s = 0$), působící síla je kolmá ke směru posunutí ($\cos\alpha = 0$).

Práci považujeme za kladnou pro případ, že pro $F \neq 0$, $s \neq 0$ je $\cos\alpha > 0$, a tedy pro úhel α platí $0° < \alpha < 90°$; za zápornou je-li $F \neq 0$, $s \neq 0$ a $\cos\alpha < 0$, tj. když $90° < \alpha < 180°$. Toto vše je možné shrnout do níže uvedeného přehledu. Pro $F \neq 0$, $s \neq 0$ platí

$\alpha = 0°$ $\rightarrow$ $W = Fs$ (nejjednodušší případ)
$0° < \alpha < 90°$ $\rightarrow$ $W = Fs\cos\alpha > 0$
$\alpha = 90°$ $\rightarrow$ $W = 0$
$90° < \alpha < 180°$ $\rightarrow$ $W = Fs\cos\alpha < 0$.

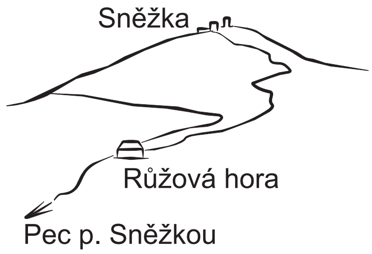
Působící síla pak pohyb vyvolá nebo udržuje (síla práci koná) nebo pohybu brání (odporové síly).

Poznámka

V případě působení odstředivé nebo dostředivé síly při rovnoměrném pohybu po kružnici (pokud zanedbáme odpor prostředí) tyto síly práci nekonají, protože $\cos\alpha = 0$.

Příklad 1 – nosiči v Krkonoších

Když ještě nebyla v Krkonoších lanovka, vynášeli nosiči zásoby pro horskou boudu na Sněžce na svých zádech. Nosič o hmotnosti 80 kg (včetně krosny) si do „krosny“ naložil náklad 60 kg a vynesl ho z Pece p. Sněžkou (nadmořská výška asi 850 m) na Sněžku (nadmořská výška asi 1600 m). Jakou práci vykonal?



Obr. 2 Sněžka

Řešení

Protože tíhová síla má ve všech místech pohybu svislý směr, vytvoříme následující model pohybu nosiče. Nejprve necháme nosiče projít „vodorovným tunelem“ až pod vrchol Sněžky, a potom stoupat svisle vzhůru (jako svislým výtahem) po žebříku. Práce vykonaná při přemístění nákladu má velikost

$$W_1 = F(h_2 - h_1) = 600\ \mathrm{N} \cdot 750\ \mathrm{m} = 450\ \mathrm{kJ}.$$

Nosič však musí přemístit i sám sebe s krosnou, přitom vykoná práci

$$W_2 = F_\mathrm{G}(h_2 - h_1) = 800\ \mathrm{N} \cdot 750\ \mathrm{m} = 600\ \mathrm{kJ}.$$

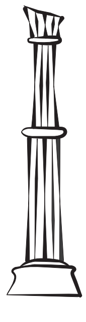
Celková práce, kterou nosič při přemístění vykoná je

$$W_\mathrm{c} = W_1 + W_2 = 1050\ \mathrm{kJ}.$$

Z toho práce pro nosiče „užitečná“ (tedy nesoucí profit), je $W_1 = 450$ kJ, tj. $\dfrac{W_1}{W_\mathrm{c}} = \dfrac{450}{1050} \doteq 43\%$.

Příklad 2 – zvedání sloupu z vody ven

Při archeologickém výzkumu byl na dně jezera v hloubce 15 m pod hladinou objeven kamenný sloup o výšce 8 m a hmotnosti 6000 kg. Sloup nejprve opatrně postavili do svislé polohy, upevnili na rameno jeřábu a začali vytahovat vzhůru. Zvedání bylo ukončeno tak, že sloup dolní patkou byl umístěn ve svislém směru připraveného lešení ve výšce 5 m nad hladinou vody v jezeře. Hustota materiálu, že kterého byl sloup vytvořen, je $2\,500\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, hustota vody je $1\,000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Jakou práci vykonal jeřáb při zvedání sloupu již stojícího na dně?

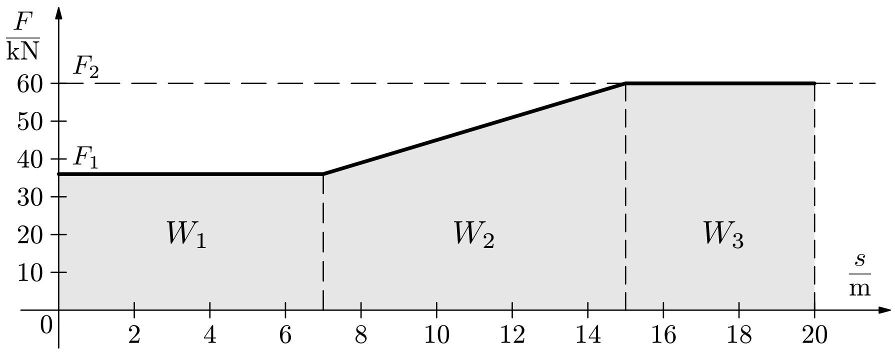


Obr. 3 Sloup

Řešení

Nejprve si musíme uvědomit, že při zvedání sloupu ve vzduchu musel jeřáb působit silou $F_2 = 60$ kN, ale při zvedání ve vodě silou menší. Podle Archimédova zákona je $F_{\mathrm{vz}} = V \varrho_{\mathrm{vody}} g$. Objem sloupu je $V = \dfrac{6\,000}{2500}$ m^3 = 2,40 m^3.

Jeřáb tedy působí při pomalém zvedání sloupu ve vodě prvních 7 m stálou silou 36 kN. Problémy začnou při vytahování sloupu z vody ven – sloup „těžkne", lano jeřábu je zatěžováno proměnnou silou od 36 kN do 60 kN. Bude tedy nejlepší znázornit si graficky změny velikosti síly, napínající lano jeřábu, a tedy zvedající sloup.



Obr. 4 Práce vykonaná při zvedání sloupu

V první fázi působí na sloup stálá síla o velikosti $F_1 = 36$ kN po dráze $s_1 = 7$ m. Vykonaná práce je $W_1 = F_1 s_1 = 252$ kJ.

Ve druhé fázi působí na sloup proměnná síla $F(x)$, jejíž velikost závisí na délce ponořené (nebo vynořené) části sloupu. Vykonanou práci stanovíme pomocí vztahu $W_2 = \dfrac{F_1 + F_2}{2} \cdot s_2 = \dfrac{36 + 60}{2} \cdot 8$ kJ = 384 kJ.

Ve třetí fázi působí na sloup stálá síla o velikosti $F_2 = 60$ kN po dráze $s_3 = 5$ m, vykonaná práce pak je $W_3 = F_2 \cdot s_3 = 300$ kJ.

Vykonaná práce nutná k vytažení sloupu je dána součtem těchto tří prací, tj.

$$W_{\mathrm{c}} = W_1 + W_2 + W_3 = 936 \text{ kJ}.$$

Příklad 3 – jedoucí automobil

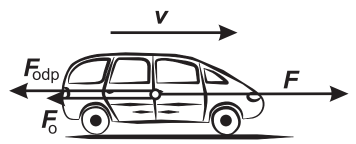
Když jede automobil stálou rychlostí 90 km · h^{-1} (maximální rychlost povolená na vozovce mimo obec), působí na něj tahová síla motoru, která musí překonávat na vodorovné vozovce sílu valivého odporu a tření v ložiskách $F_0 \doteq 300$ N a odpor prostředí $F_{\mathrm{odp}} = 0{,}54\,v^2$. Jakou práci vykoná motor automobilu na udržení vozidla tak, aby jelo rovnoměrným pohybem na dráze 10 km?

Řešení

Pro udržení stálé rychlosti na vodorovné silnici musí být tahová síla F_{t} motoru vozidla

$$F_{\mathrm{t}} = F_0 + F_{\mathrm{odp}}.$$

Síla valivého odporu a tření v ložiskách je dána, $F_0 = 300$ N, sílu odporu prostředí určíme užitím vztahu $F_{\mathrm{odp}} = 0{,}54\,v^2$.



Obr. 5 Jedoucí automobil

Pro rychlost 90 km $\cdot$ h^{-1} = 25 m $\cdot$ s^{-1} je $F_{\mathrm{odp}} = 0{,}54 \cdot 25^2$ N = 338 N. Tedy tahová síla motoru musí být nejméně $F_{\mathrm{t}} = 638$ N. Na trase $s = 10$ km je vykonaná práce $W = F_{\mathrm{t}} \cdot s = 6{,}38$ MJ. Kdybychom propočítali práci na dráhu 100 km (např. spotřeba benzínu se počítá vždy na tuto trasu), potom by celková práce byla $W_{\mathrm{c}} = 63{,}8$ MJ.

Poznámka

Když spotřebujeme 1 kg benzínu v motoru automobilu ($V_1 \doteq 1{,}4$ l), pak při dokonalém spálení získáme teplo 46 MJ, avšak dnešní technika dokáže využít toto teplo jen ze 22%. Proto se spotřeba benzínu dá stanovit: $W_{\mathrm{c}} = 63{,}8$ MJ; využitelné teplo spálením 1 litru benzínu je asi 33 MJ, využijeme ho jen ze 22%, tj. 7,26 MJ. Spotřeba benzínu na 100 km se stanoví

$$V = \frac{63{,}8}{7{,}26}\ \mathrm{l} \doteq 8{,}8\ \mathrm{l}.$$

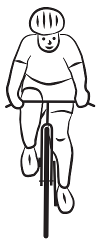
Úlohy k samostatnému řešení – 1

Úloha 1 – poštovní doručovatel

Poštovní doručovatel balíkové služby o hmotnosti 75 kg má doručit balíček o hmotnosti 5 kg adresátovi, který bydlí v nejvyšším patře 14 podlažního domu. Bohužel zjistil, že výtah nejede, neboť je v pravidelné údržbě, a tak se vydal pěšky po schodech. Podlaha nejvyššího patra je ve výšce 38 m nad terénem. Určete, jakou minimální práci vykonal doručovatel jen při doručení balíku, jakou práci vykonal celkem a jak byla tato fáze doručování efektivní.

Úloha 2 – cyklista jedoucí po rovině I

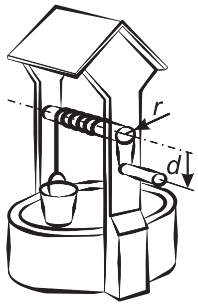
Cyklista jede po rovině a může se přemisťovat buď rychlostí $18\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ nebo $54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ po trase 36 km v rovinné krajině. V obou případech je valivý odpor a tření v ložiskách vznikající při jízdě pneumatik po asfaltové silnici 30 N, odporová síla při rychlosti o velikosti v je dána vztahem $F = 0{,}30\, v^2$. Jak velkou práci vykoná cyklista na stanovené trase?



Obr. 6 Cyklista

Úloha 3 – rumpál

Velmi hluboká studna má hladinu vody 16 m pod úrovní okraje studny. K vytažení vody máme k dispozici rumpál: na válci o poloměru $r = 5{,}0$ cm je namotáno lanko, na jehož konci je vědro, do něhož v dolní poloze se dostane voda. Hmotnost lanka neuvažujeme, hmotnost vědra s vodou je 12,5 kg. Vědro zavěsíme a začneme otáčet klikou o délce $d = 40$ cm. Při jednom otočení kliky $(2\pi \cdot d)$ se vědro zvedne o výšku $s = 2\pi r$. Určete: a) kolikrát musíme otočit klikou, b) jak velkou práci vykonáme při zvednutí vědra, c) jak velkou silou musí ruka působit na kliku.



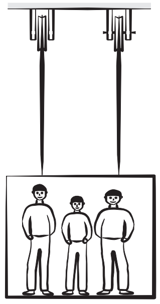
Obr. 7 Rumpál

2 Výkon, práce počítaná z výkonu

Stejnou práci můžeme vykonat v různém časovém režimu. Poštovní doručovatel balíkové služby musel stoupat po schodech asi 5 minut, ale počítal s tím, že použije výtahu, jehož doba jízdy je menší než 1 minuta. V obou případech se dostane do téže výšky a při přemístění se vykoná stejně velká práce. Oba děje se liší dobou trvání, což nás vede k zavedení veličiny *průměrný výkon* $P = \dfrac{W}{t}$. Jednotkou výkonu je 1 W (watt), často používáme násobky 1 kW = 1000 W, 1 MW = 1 000 000 W, 1 GW = 10^9 W nebo díly 1 mW = 0,001 W, $1 \mu W = 10^{-6}$ W.

Příklad 4 – stoupající výtah

Kabina výtahu má hmotnost 150 kg a ve výškovém domě stoupá ze sklepa do nejvyššího patra po dráze 42 m po dobu 80 s. V kabině mohou být nejvýše tři osoby o celkové hmotnosti 250 kg. Určete celkovou tahovou sílu v lanech při rovnoměrném stoupání, celkovou i užitečnou práci motoru, užitečný i celkový výkon a podíl užitečné práce na práci celkové.



Obr. 8 Výtah

Řešení

Celková hmotnost kabiny a přepravujících osob je $m = 400$ kg, tahová síla při rovnoměrném pohybu je $F = 4\,000$ N. Práce $W = F \cdot s = 168$ kJ. Tuto práci koná elektromotor po dobu 80 s, tedy $P = \dfrac{W}{t} = 2\,100$ W.

Dále určíme práci na přepravu osob, $W_1 = 105{,}0$ kJ, výkon 1 312 W. Podíl užitečné práce na celkové práci je $\dfrac{105}{168} = 0{,}625$, tj. 62,5%. Zbylá práce (37,5%) je sice práce neužitečná, ale nutná (osoby nelze přepravovat v lehkém igelitovém pytli).

Poznámka 1

Při rovnoměrném pohybu $s = v \cdot t$, takže platí

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v.$$

K výpočtu pro výkony lze použít i $v = 0{,}525\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, potom $P = 2\,100$ W.

Poznámka 2

Podíl práce užitečné a celkové označujeme $\eta = \dfrac{W_{\text{už}}}{W_{\text{c}}}$ a nazýváme ho účinnost. Protože neexistují ani ideální stroje ani ideální děje, je vždy $\eta < 1$. Účinnost vyjadřujeme často v procentech.

Poznámka 3

Známe-li výkon motoru, můžeme ze vztahu $P = \dfrac{W}{t}$, stanovit práci $W = P \cdot t$. Tomu říkáme práce počítaná z výkonu. Jednotkou je 1 Ws = 1 J, případně 1 Wmin = 60 J, 1 Wh = 3 600 J, 1 kWh = $3{,}6 \cdot 10^6$ J. Jednotka kWh je často používána při určování práce elektrických zařízení.

Příklad 5 – cyklista jedoucí do kopce

Cyklista o hmotnosti 80 kg i s kolem jede stálou rychlostí 27 km $\cdot$ h^{-1} do mírného kopce se stoupáním $p = 3{,}0\%$ po trase o délce 1 500 m. Síla valivého odporu a tření v ložiskách je 30 N, odporovou sílu určíme užitím vztahu $F_{\text{odp}} = 0{,}30\,v^2$ a síla pro stoupání do kopce je dána vztahem $F_1 = mgp$.

Obr. 9 Cyklista jedoucí do kopce

Určete, jakou silou musí cyklista pohánět kolo při jízdě do mírného kopce při jízdě stálou rychlostí, jakou práci vykoná celkem na dané trase a jaký je jeho výkon. Když by se vracel zpět stejnou rychlostí, musel by šlapat do pedálů? Jaké rychlosti by dosahoval bez šlapání?

Řešení

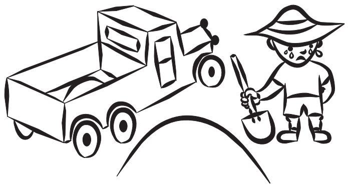
Úloha je zdánlivě složitá, protože je v textu mnoho údajů. Určíme nejprve působící síly: $F_0 = 30$ N, $F_{\text{odp}} = 0{,}30 \cdot 7{,}5^2$ N $= 17$ N, $F_1 = 24$ N. Velikost celkové působící síly
$$F = F_0 + F_{\text{odp}} + F_1 = 71\ \text{N}.$$
Potom práce na trase 1 500 m je 106,5 kJ a požadovaný výkon $P = F \cdot v =$ $= 533$ W, což je reálný údaj.

Při jízdě s kopce je velikost síly působící směrem dolů (rovnoběžně s vozovkou) $F_1 = 24$ N, odporové síly při rychlosti 7,5 m$\cdot$s^{-1} jsou $F_{\text{odp}} + F_0 = 47$ N. Cyklista pro udržení rychlosti musí „šlapat do pedálů“. Protože valivý odpor, tření v ložiskách a odporová síla je větší než síla působící s kopce dolů (složka tíhové síly rovnoběžná s vozovkou), při tomto 3,0% sklonu se cyklista samovolně nerozjede.

Velikost rychlosti v, jaké by cyklista dosáhl bez šlapání, můžeme určit z podmínky, že
$$F_1 = F_0 + 0{,}30\,v^2.$$
Protože však je $F_0 > F_1$, pak situace, že by cyklista mohl jet bez šlapání, při daném sklonu vůbec nemůže nastat.

Příklad 6 – odplata za nepozornost

Když přijela rodina na víkend na chalupu, zjistil tatínek, že jeho synáček sice tvrdil, že všechno vypnul, ale nechal v neděli večer svítit ve stolní lampě žárovku 40 W, jejíž svit přes okenice nebyl zvenčí vidět.



Obr. 10 Pracující chlapec

A tak tatínek rozhodl, že syn musí odpracovat přesně stejnou práci, jakou vykonal elektrický proud zbytečným svícením, nebo zaplatí „pokutu“ snížením kapesného o 50 Kč. Pro jednoduchost zvolil dobu svícení 5 dní (odjezd v neděli v 18 hodin, příjezd v pátek také v 18 hodin). Kolik hlíny a písku by musel chlapec naložit na valníky do výšky 2 m (okraj valníku)?

Řešení

Nejprve stanovíme „zbytečnou elektrickou práci“ při výkonu žárovky 40 W: 5 dní po 24 hodinách je 120 hodin, práce $W = P \cdot t = 40 \cdot 120$ Wh = 4,8 kWh. Protože 1 kWh = 3,6 MJ, je zbytečná práce rovna 17,3 MJ.

Při vyhození 1 kg zeminy do výšky 2 m vykonáme minimální práci 10 N · 2 m = 20 J, zvedneme-li na lopatě 5 kg zeminy nebo písku, pak vyhození 1 lopaty představuje práci 100 J. „Napracovat“ práci ztracenou zbytečným svícením by znamenalo na valníky dostat 865 000 kg = 865 t. Pokud by se na valník vešlo 5 t, je to naplnění 173 valníků, což představuje 173 000-krát hodit lopatou. Kdyby nabrání lopaty a vyhození trvalo 15 s, jde asi o 2 600 000 s, tj. 30 dní (pokud by se pracovalo i přes noc)! Moudrý chlapec, který si dokázal tento důsledek propočítat, raději oželel padesátikorunu.

Poznámka

Elektrická zařízení jsou nám tak běžná, že si jich ani nevážíme. Spící televizory nebo počítače „užívají“ vždy jen několik wattů. Avšak 6 wattů za 1 den představuje už 0,5 kWh (viz dále úlohu 5).

Úlohy k samostatnému řešení – 2

Úloha 4 – cyklista jedoucí po rovině II

V úloze 2 jel po rovině cyklista rychlostí 18 km · h^{-1} nebo 54 km · h^{-1}. Určete meze jeho dosaženého výkonu.

Úloha 5 – mechanická práce 1kWh

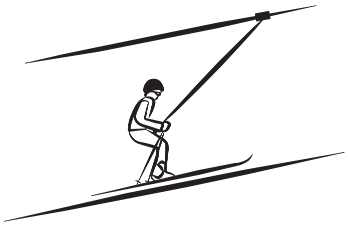
Když se ještě topilo ve starších domech uhlím v kamnech, muselo se nosit uhlí v kbelíku ze sklepa např. do třetího poschodí po schodišti o výškovém rozdílu 15 m. a) Kolik uhlí musí majitel bytu nanosit, aby vykonal práci 1 kWh? b) Uvažujte, že do kbelíku se vejde 16 kg uhlí, hmotnost kbelíku vzhledem k hmotnosti uhlí zanedbejte. Určete počet kbelíků odpovídajících vykonané práci.

Úloha 6 – jedoucí automobil

I když už víme, že při jízdě automobilu závisí odporové síly částečně na rychlosti vozidla, zvolíme modelovou situaci, kdy během jízdy působí výsledná odporová síla o velikosti 400 N proti pohybu při rychlosti 45 km $\cdot$ h^{-1}. Jaký je mechanický výkon automobilu? Jakou práci vykonají odporové síly při zastavování vozidla o hmotnosti 800 kg?

Úloha 7 – lyžařský vlek

Malý horský lyžařský vlek má délku 300 m a táhne lyžaře do kopce silou 300 N stálou rychlostí o velikosti 0,6 m$\cdot$s^{-1}. Určete, jakou práci vlek při vytažení lyžaře vykoná a jaký je mechanický výkon motoru vleku.



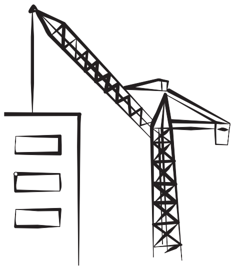
Obr. 11 Lyžařský vlek

3 Polohová energie

Představme si, že máme zvednout činku z výšky $h_1 = 60$ cm do výšky $h_2 = 220$ cm, hmotnost činky je 40 kg. Budeme ji zdvihat silou $F = 400$ N po dráze $s = h_2 - h_1$ a vykonáme práci $W = Fs = mg(h_2 - h_1) = mgh_2 - mgh_1 = 640$ J. Součin mgh označíme jako $E_\mathrm{p} = mgh$. Tato veličina nám popisuje těleso o hmotnosti m ve výšce (v poloze) h nad jistou nulovou výškou (hladinou) v tíhovém poli zemském a nazývá se *polohová energie tíhová*. Působením síly $\boldsymbol{F}$ se může měnit výška h nad nulovou hladinou, koná se práce W a mění se polohová energie, $W = \Delta E_\mathrm{p} = E_\mathrm{p2} - E_\mathrm{p1}$.

Příklad 7 – jeřáb a panel

Jeřáb zvedá panel o hmotnosti 2 400 kg z plošiny nákladního automobilu ve výšce 1,6 m a umisťuje ho na stavbě výškového domu ve výšce 38,0 m; zvedání trvá 2,0 minuty. Jakou mechanickou práci vykoná jeřáb při zvedání panelu a jaký je odpovídající mechanický výkon?



Obr. 12 Jeřáb

Řešení

Panel o hmotnosti $m = 2\,400$ kg je třeba zvedat stálou silou $F = mg = 24$ kN po dráze $s = h_2 - h_1 = 36{,}4$ m.

Vykonaná práce $W = F(h_2 - h_1) = mgh_2 - mgh_1 = E_{p2} - E_{p1}$, tedy $E_{p1} = 38{,}4$ kJ, $E_{p2} = 912$ kJ, $W = 873{,}6$ kJ. Obdobně bychom se k tomu údaji také dostali užitím $W = 24{,}0 \cdot 36{,}4$ kJ $= 873{,}6$ kJ. Výkon $P = 7{,}28$ kW.

Příklad 8 – skok do výšky

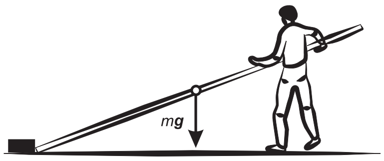
Při skoku do výšky se sportovec o hmotnosti 60 kg odrazí od podložky a jeho těžiště se přemístí z původní výšky $h_1 = 1{,}00$ m do výšky $h_2 = 1{,}80$ m, přičemž přeskočí laťku ve výšce 165 cm. Jakou mechanickou práci sportovec vykoná?

Řešení

Polohová energie na počátku závisí na výšce $h_1 = 1{,}00$ m, na konci $h_2 = 1{,}80$ m, takže $E_{p1} = mgh_1 = 600$ J, $E_{p2} = mgh_2 = 1\,080$ J. Vykonaná práce $W = \Delta E_p = 480$ J.

Příklad 9 – železná trubka při stavbě lešení

Železná trubka má hmotnost 40 kg, délku 6,0 m a vnější průměr 6,0 cm. Trubka na počátku leží na betonovém podkladu. Jak velkou silou musíme na trubku působit, abychom ji zvedli na jednom konci? Dále budeme zvedat trubku ručkováním tak, že její druhý konec zůstane na jednom místě. Jak velkou práci musíme vykonat, abychom trubku postavili do svislé polohy?



Obr. 13 Zvedání trubky

Řešení

Při ručkování se mění vzdálenost ramene síly způsobující zvedání od místa otáčení trubky. V důsledku toho se musí zvětšovat velikost této síly (zmenšuje se rameno). Výpočet práce podle vztahu $W = Fs\cos\alpha$ by byl obtížný. Stanovíme proto původní polohovou energii $E_{p0} = mgh_0 = 0$ J a koncovou polohovou energii $E_{pk} = mg\frac{h}{2}$ trubky [1]. Vykonaná práce $W = \Delta E_p = 1\,200$ J.

[1] Při výpočtu zanedbáváme příčné rozměry trubky, jinak bychom museli počítat s nenulovou $h_0 = 3$ cm.

Poznámka

V homogenním tíhovém poli, tj. v nepříliš rozsáhlém okolí určitého bodu nacházejícího se na povrchu Země, v němž známe hodnotu i směr $\boldsymbol{g}$, považujeme $\boldsymbol{g} = \textbf{\textit{konst}}$.

Příklad 10 – alpská vesnička Schneedorf

V alpské vesničce Schneedorf si postavili malou vodní elektrárnu. Voda nejprve nateče do nádrže ve výšce 80 m nad Peltonovou turbínou a potom potrubím teče voda s objemovým průtokem 2,5 $\mathrm{m^3s^{-1}}$. Jaký je výkon turbíny při zanedbání odporů, vzniklých prouděním?

Obr. 14 Malá vodní elektrárna

Řešení

Voda v nádrži má vyšší polohovou energii $E_\mathrm{p} = mgh$ oproti vstupu do turbíny, kde ji položíme nulovou. Změna polohové energie je pak rovna práci na roztočení turbíny, $W = \Delta E_\mathrm{p}$. Protože $m = \varrho Q_\mathrm{V} t$, kde Q_V je objemový průtok, potom $P = \dfrac{W}{t} = \dfrac{\varrho Q_\mathrm{V} tgh}{t}$, po úpravě je $P = \varrho Q_\mathrm{V} gh = 1000 \cdot 2{,}5 \cdot 10 \cdot 80\ \mathrm{W} = 2{,}0\ \mathrm{MW}$.

Úlohy k samostatnému řešení – 3

Úloha 8 – pavoučí muž

Pavoučí muž je fantómem vysokých staveb – šplhá po jejich stěnách. Zdolal i Eiffelovu věž. Kdyby se vyšplhal až nahoru do výšky 307 m, jakou mechanickou práci by musel vykonat při své hmotnosti 70 kg?

Obr. 15 Eiffelovka

Úloha 9 – čerpání vody

Přišel tzv. *přívalový liják* a zaplnil sklep o rozměrech 8,0 m × 12,0 m do výšky 80 cm. Podlaha sklepa je 1,80 m pod úrovní okolního terénu. Přivolaní hasiči vhodili do sklepa hadici a odčerpávali vodu čerpadlem s objemovým průtokem 240 $\mathrm{l \cdot min^{-1}}$. Jak dlouho čerpání trvalo, jakou práci čerpadlo vykonalo a jaký muselo mít průměrný výkon?

Úloha 10 – přehradní hráz vodní elektrárny

Jedna turbína v tepelné elektrárně mívá výkon 110 MW. Na horním Labi protéká řečištěm 11 $m^3 \cdot s^{-1}$. Pro zlepšení životního prostředí navrhli konstruktéři postavit přehradní hráz o výšce h, jež by umožnila instalaci vodní turbíny téhož výkonu. Jak vysoká by musela být hráz?

4 Pohybová energie

Po vodorovné přímé silnici se pohybuje automobil o hmotnosti m stálou rychlostí o velikosti v_0, když začne předjíždět. „Přidá plyn", tj. na automobil začne působit tahová síla motoru o velikosti $F = ma$, kde zrychlení o velikosti $a = \dfrac{v - v_0}{t}$ způsobí změnu velikosti rychlosti na dráze $s = \dfrac{1}{2}(v + v_0)t$. Práce, nutná na zvýšení rychlosti, je dána vztahem

$$W = Fs = m \cdot \frac{v - v_0}{t} \cdot \frac{1}{2}(v + v_0)t = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Veličinu $E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2}mv^2$, která vyjadřuje pohybový stav tělesa o hmotnosti m vzhledem ke vztažné soustavě, k níž se pohybuje rychlostí o velikosti v, nazýváme *pohybová (kinetická) energie*.

Příklad 11 – předjíždění

Automobil o hmotnosti 1 200 kg jede stálou rychlostí 90 $km \cdot h^{-1}$ po vodorovném úseku dálnice. Když začne předjíždět, dosáhne rychlosti 126 $km \cdot h^{-1}$ za dobu 20 s. Určete, jak dlouhý je úsek nutný k získání zvýšené rychlosti a jakou práci je nutno vynaložit.

Řešení

Rychlost automobilu se zvýší z hodnoty $v_1 = 25\ m \cdot s^{-1}$ na $v_2 = 35\ m \cdot s^{-1}$, tedy o 10 $m \cdot s^{-1}$ za dobu 20 s, zrychlení automobilu je $a = 0{,}50\ m \cdot s^{-2}$. Tahová síla, nutná na zvýšení rychlosti (neuvažujeme-li odpor vzduchu ani žádné další odpory), je $F = ma = 600$ N, dráha $s = \dfrac{1}{2}(v_1 + v_2)t = 600$ m. Práce nutná pro zvýšení rychlosti je 360 000 J. K této hodnotě je možno dospět i výpočtem pomocí pohybových energií. Na počátku manévru je $E_{\mathrm{k}1} = \dfrac{1}{2}mv_1^2 = 375$ kJ, na konci zrychlování je $E_{\mathrm{k}2} = \dfrac{1}{2}mv_2^2 = 735$ kJ, $W = \Delta E_\mathrm{k} = 360$ kJ.

Poznámka

Problémem zůstává, že valivý odpor způsobený jízdou pneumatik po asfaltu se nezměnil, ale odporová síla, jíž vzduch působí na automobil, se podstatně zvětšila, takřka na dvojnásobek. To pochopitelně ovlivňuje výkon motoru automobilu.

Příklad 12 – rozjíždějící se cyklista

Cyklista se z klidu rozjíždí tak, že během 25 s získá rychlost 45 km $\cdot$ h^{-1}; hmotnost cyklisty i s kolem je 80 kg. Jak se změnila pohybová energie cyklisty? Jakou práci musel cyklista vykonat při rozjíždění? Jaký výkon měl cyklista ve $\frac{2}{3}$ rozjížděcí dráhy?

Řešení

Na počátku měl cyklista pohybovou energii nulovou ($E_{\mathrm{k}0} = 0$), na konci rozjíždění $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2 = 6\,250$ J. Při rozjíždění musel vykonat práci 6 250 J (neuvažujeme-li odpory působící proti pohybu).

Tahová síla působící na jízdní kolo má velikost danou vztahem $F = ma$, kde $a = \frac{v}{t} = 0{,}50\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, takže $F = 80 \cdot 0{,}50\ \mathrm{N} = 40\ \mathrm{N}$. Výkon cyklisty na konci rozjíždění byl $P = F \cdot v = 500$ W.

Ve $\frac{2}{3}$ dráhy, tj. při $s_1 = \frac{2}{3}s$, vykonal cyklista práci $W_1 = F \cdot s_1 = F \cdot \frac{2}{3}s$, a tato práce se projevila zvýšením pohybové energie na $E_{\mathrm{k}1} = \frac{1}{2}mv_1^2$. Obdobně při absolvování celé dráhy s byla pohybová energie na konci $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2$. Můžeme tedy přehledně napsat:

$$W_1 = F \cdot s_1 = F \cdot \frac{2}{3}s = \frac{1}{2}mv_1^2,$$

$$W = F \cdot s = \frac{1}{2}mv^2,$$

Po vydělení první rovnice druhou dostaneme

$$\frac{2}{3} = \left(\frac{v_1}{v}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Po dosazení za $v = 12{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ je $v_1 = 10{,}21\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, výkon $P_1 = F \cdot v_1 = 408$ W.

Příklad 13 – kapka vody

Z mraku ve výšce 800 m nad povrchem Země padá malá kapka vody o hmotnosti $m = 0{,}15$ g. Jak se mění její polohová energie? Jakou rychlostí by dopadla kapka na povrch Země, kdyby nebylo odporu vzduchu? Odpor je však rozhodující a ve skutečnosti dopadne tato kapka (co smetla Ferdu Mravence na jeho první cestě) rychlostí 8 m·s^{-1}. Jakou má kapka pohybovou energii? Co způsobilo zmenšení pohybové energie?

Obr. 16 Mrak

Řešení

Polohová energie kapky vody $E_\mathrm{p} = mgh = 0{,}15 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 800\ \mathrm{J} = 1{,}2\ \mathrm{J}$. Ze zákonů volného pádu ve vakuu vyplývá pro rychlost dopadu vztah $v_1 = \sqrt{2gh} = 126{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Pohybová energie dopadající kapky by měla tedy být $E_\mathrm{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = 1{,}2$ J. Ve skutečnosti je však $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}15 \cdot 10^{-3} \cdot 64\ \mathrm{J} = 4{,}8 \cdot 10^{-3}$ J, tj. 250-krát menší, což je způsobeno odporem vzduchu.

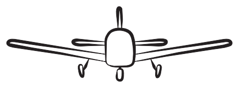
Poznámka

Často při řešení problémů ve fyzice odpor vzduchu, popř. valivý odpor či smykové tření zanedbáváme. Zde však vidíme, že řešení úloh ve zjednodušeném modelu nemusí dávat reálné výsledky.

Úlohy k samostatnému řešení – 4

Úloha 11 – přistání letadla

Přistávající letadlo má hmotnost 120 t a na ranvej dosedne při rychlosti 240 km · h^{-1}. Pak má trasu 1 200 m – 2 000 m na zabrzdění. Kdyby docházelo k ideálnímu brzdění stálou brzdicí silou, určete tuto sílu i zpomalení letadla na ranveji.



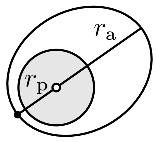
Obr. 17 Přistávající letadlo

Úloha 12 – cyklista

Cyklista o celkové hmotnosti 80 kg i s kolem se na dráze 60 m rozjíždí účinkem tahové síly 50 N. Jaké rychlosti by dosáhl? Ve skutečnosti je však tahová síla zmenšena valivým odporem a třením v ložiskách o 24 N. Jak to vypadá nyní s rychlostí?

Úloha 13 – kosmická loď

Hmotnost kosmické lodi s posádkou je 6,4 t a pohybuje se kolem Země po eliptické trajektorii, pro kterou zavádíme názvy rychlost lodi v přízemí (perigeu) v_{p} a rychlost lodi v odzemí (apogeu) v_{a}.



Obr. 18 Kosmická loď

Vzdálenost perigea od středu Země je r_{p}, apogea $r_{\mathrm{a}} = 2r_{\mathrm{p}}$. Podle 2. Keplerova zákona je $r_{\mathrm{p}} \cdot v_{\mathrm{p}} = r_{\mathrm{a}} \cdot v_{\mathrm{a}}$, rychlost kosmické lodi se mění během letu po eliptické trajektorii. Zvolme $r_{\mathrm{p}} = 6\,600$ km, potom $r_{\mathrm{a}} = 2r_{\mathrm{p}} = 13\,200$ km. Jaký je poměr pohybových energií kosmické lodi?

5 Zákon o zachování mechanické energie

Při volném pádu míčku z balkónu ve 12. patře se s časem zmenšuje jeho výška, a tedy i jeho polohová energie $E_{\mathrm{p}} = mgh$, současně se zvětšuje velikost jeho rychlosti, a tedy i pohybová energie $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2$. Obecná lidská zkušenost, ale také i přesná měření dávají tyto změny do vzájemné souvislosti. V případě volného pádu se ukazuje (tj. neuvažujeme odporové síly proti pohybu), že tyto změny jsou stejné: zmenšení polohové energie způsobuje stejnou změnu energie pohybové, tj. vyjádřeno matematicky $\Delta E_{\mathrm{k}} = \Delta E_{\mathrm{p}}$, neuvažujeme-li znaménko.

Po odrazu od betonové desky změní míček směr rychlosti o 180° (a bohužel i velikost) za jistých podmínek a začne stoupat vzhůru, změny jsou pak opačné – s potřebným zvětšováním výšky dochází ke zmenšování rychlosti.

Změnu pohybové energie zapisujeme $\Delta E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$, změna polohové energie $\Delta E_{\mathrm{p}} = mgh_2 - mgh_1$. Potom, vyjádřeno přesněji, $\Delta E_{\mathrm{k}} = -\Delta E_{\mathrm{p}}$, tedy

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -(mgh_2 - mgh_1) = -mgh_2 + mgh_1.$$

Po úpravě

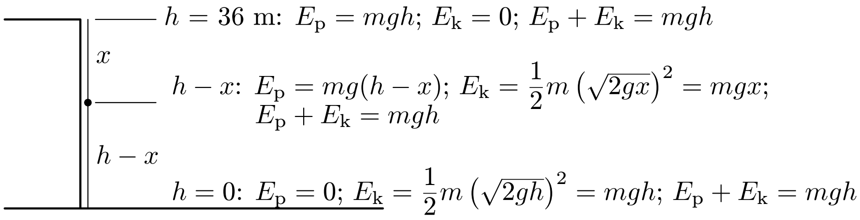
$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2.$$

Tento závěr můžeme také vyjádřit slovně: za jistých podmínek je součet pohybové a polohové energie, tj. mechanické energie tělesa, konstantní. Podívejme se nyní ještě blíže na volný pád tělesa z výšky h.

Příklad 14 – volný pád

Z balkónu ve dvanáctém patře se uvolnil kolíček na prádlo o hmotnosti 25 g a z výšky 36 m začal padat dolů. Jak se měnila polohová, pohybová i celková mechanická energie kolíčku?

Řešení



Obr. 19 Volný pád kolíčku

Pro konkrétní hodnoty: nahoře $E_p = 0{,}025 \cdot 10 \cdot 36$ J $= 9{,}0$ J, dole $v = \sqrt{2hg} =$ $= 26{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $E_k = \frac{1}{2} \cdot 0{,}025 \cdot 26{,}8^2$ J $= 9{,}0$ J.

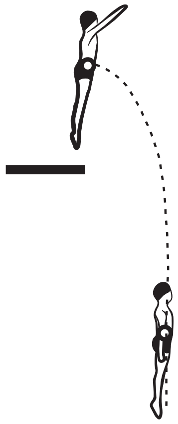
Bohužel kolíček bude asi citelně brzděn odporovou silou, takže v reálné situaci rovnost energií platit nebude.

Poznámka

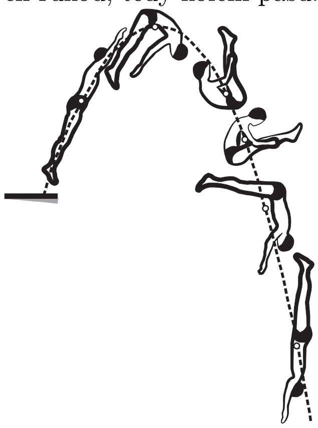
Mnoho lidí tvrdí (a dokonce je to názor mezi učiteli), že když $E_1 = E_p + 0 =$ $= E_p$ v horní poloze a $E_2 = 0 + E_k = E_k$ v dolní poloze a jde o stejnou hodnotu, pak došlo „k přeměně polohové energie na energii kinetickou“. V našem pojetí je však energie fyzikální veličina, a ta má určitou hodnotu. Energie se tedy nepřeměnila, ale při volném pádu se polohová energie zmenšuje a pohybová energie zvětšuje, avšak jejich součet má stálou hodnotu. To bychom rovněž mohli tvrdit, že výška nad terénem se mění na rychlost kolíčku nebo v případě vrhu, se napětí v pryži mění na rychlost kamene, popř. ve vzduchovce se tlak vzduchu mění na rychlost broku. Ponechme tedy pojmu energie jeho původní význam: jde o stavovou veličinu, která v mechanice vyjadřuje polohový nebo pohybový stav tělesa vzhledem k určité soustavě.

Příklad 15 – sportovec skáče do vody

Jsou skoky do vody nebezpečné? Skokan skáče nejprve „po nohách“ (obr. 20), pak „šipkou“ (obr. 21) do vody z prkna o výšce 3 m, a z věže o výšce 5 m, 10 m nad hladinou vody. Jak při skoku „po nohách“ tak i při skoku „šipkou“ pružné prkno vymrští skokana poněkud kupředu vzhůru, my však v našem modelu změnu výšky prkna při odrazu nebudeme uvažovat. Jakou rychlostí letí skokan v okamžiku, kdy se nejnižší částí těla (chodidly, konečky prstů rukou) dotkne vodní hladiny? Budou se lišit rychlosti dopadu, když bude skokan skákat po nohách a šipkou? Při řešení této úlohy uvažujte, že těžiště skokana je přibližně uprostřed mezi chodidly a konečky prstů zdvižených rukou, tedy kolem pasu.



Obr. 20 Skok „po nohách“



Obr. 21 Skok „šipkou“

Řešení

Označme l délku skokana s nataženýma rukama, h výšku prkna (věže) nad vodní hladinou. Při pohybu budeme sledovat pohyb těžiště skokana. Na prkně můstku (věži) má skokan vzhledem k hladině vody polohovou energii $E_{\mathrm{p}0} = mg(h + l/2)$ a pohybovou energii nulovou. V okamžiku, kdy se dotýká nohama či rukama hladiny, jeho pohybová energie je rovna $E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2$, polohová energie je $E_{\mathrm{p}} = mgl/2$. Napíšeme zákon o zachování mechanické energie

$$mg\left(h + \frac{l}{2}\right) + 0 = mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2}mv^2,$$

odtud

$$v = \sqrt{2gh}.$$

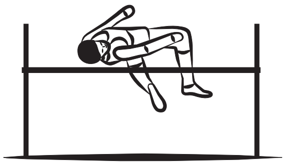
Po dosazení za h po řadě 3 m, 5 m, 10 m vychází $v_3 = 7{,}7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 28\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; $v_5 = 9{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 36\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; $v_{10} = 14{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 50\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

V okamžiku dotyku hladiny se voda rozestoupí a zmírňuje dopad, brzdí pohyb jednak hydrostatickou vztlakovou silou, jednak viskozitou. Kdyby sportovec dopadl na betonové okolí můstku, byla by jeho dopadová rychlost sice stejná, ale důsledky strašné.

Podle zákona o zachování mechanické energie bude mít rychlost dopadu skokana v obou případech stejnou velikost.

Příklad 16 – vrcholový sportovec

Vrcholový sportovec stojí na vodorovném hřišti a jeho těžiště je ve výšce 1,1 m nad zemí. Pak se rozběhne a skočí přes laťku tak, že jeho těžiště stoupne až do výšky 2,5 m nad zemí. Jakou minimální rychlostí se musí odrazit?



Obr. 22 Skok do výšky

Řešení

Sportovec musí zvýšit polohu těžiště – z výšky $h = 1{,}1$ m do výšky $h_2 = 2{,}5$ m, tedy o 1,4 m. Jeho polohová energie byla původně $E_{\mathrm{p1}} = mgh_1$, při přeskoku $E_{\mathrm{p2}} = mgh_2$. Ve svislém směru musí při jednom odrazu získat pohybovou energii $E_{\mathrm{k1}} = \frac{1}{2}mv^2$, při přeskoku se ve svislém směru skokan téměř zastaví (má jen malou vodorovnou složku rychlosti). Platí

$$mgh_1 + \frac{1}{2}mv^2 = mgh_2,$$

z čehož

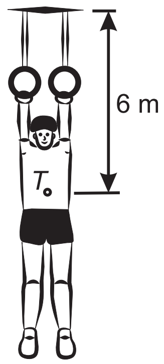
$$v = \sqrt{2g\Delta h} = 5{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 19{,}0\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

Poznámka

Všimněte si, že se tedy žádná energie nepřeměňuje, ale pohybová energie se snížila na minimum, a díky tomu se polohová energie, a tedy i výška těžiště sportovce mohla zvýšit.

Příklad 17 – sportovec na kruhách

V tělocvičně se na kruhách houpe sportovec tak, že jeho těžiště se nachází ve vzdálenosti 6,0 m od upevnění kruhů ke stropu. Když sportovec prochází rovnovážnou polohou, těžiště sportovce je ve výšce $h_2 = 1{,}5$ m nad podlahou. Když se sportovec dostane do krajní polohy, je výška jeho těžiště ve výšce $h_1 = 2{,}5$ m nad podlahou. Určete, jakou rychlostí prochází těžiště tohoto sportovce rovnovážnou polohou při zanedbání odporových sil.



Obr. 23 Kruhy

Řešení

Pro body obratu je výška těžiště $h_1 = 2{,}5$ m a rychlost těžiště je nulová. Při průchodu rovnovážnou polohou je výška těžiště $h_2 = 1{,}5$ m a velikost rychlosti těžiště označíme v.

Pro polohové a pohybové energie bude platit

$$mgh_1 + 0 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv^2,$$

odtud

$$v = \sqrt{2g\Delta h} = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}.$$

Po dosazení $v \doteq 4{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 16{,}2\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Při průchodu rovnovážnou polohou se z kruhů seskakovat nemá. Po dopadu na podlahu tělocvičny se nohy zastaví a těžiště se touto rychlostí chce pohybovat setrvačností dále.

Úlohy k samostatnému řešení – 5

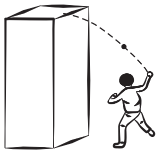
Úloha 14 – tobogan

Na koupališti je instalován tobogan. Jeho výška nad vodní hladinou je 15 m a délka dráhy dosahuje 75 m. Pokuste se určit sklon dráhy k vodorovnému směru. Nezodpovědný mladík si přinesl skateboard a pokoušel se sjet po toboganu dolů (jde o případ, že se tření minimalizuje a třecí síla je nulová). Všichni ostatní si sedli na zadní část svého těla a v sedě či v leže sjíždějí za spoluúčasti tření takřka rovnoměrným pohybem (po ustálení) stálou rychlostí $1{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Určete rychlost skateboardisty.

Obr. 24 Tobogan

Úloha 15 – panelový dům

Jak vysoký je panelový dům s rovnou střechou, když na něj chlapec dokáže vyhodit míček, který získal počáteční rychlost $15\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? Míček opouští ruku chlapce ve výšce 1,8 m nad zemí.



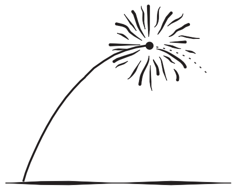
Obr. 25 Hod

Úloha 16 – brzdění automobilu

Automobil o hmotnosti 1 200 kg jede po dálnici stálou rychlostí $126\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. V dálce zpozoroval řidič benzínovou pumpu a začal brzdit stálou silou o velikosti 2 000 N. Za jak dlouho a na jaké dráze dokáže zabrzdit? Proč se asi s předstihem umisťují informační značky u vozovky?

Úloha 17 – ohňostroj

Při ohňostroji vyletí raketa do určité výšky, kde se rozprskne na všechny strany. Předpokládejme, že rozprsknutí nastane v nejvyšším bodě dráhy rakety, která se ve svislém směru již nepohybuje a vodorovná složka je minimální. Určete, jakou rychlostí by jednotlivé části dopadly na povrch země při zanedbání odporových sil.



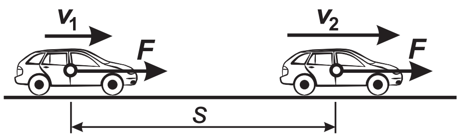
Obr. 26 Ohňostroj

6 Úlohy o pohybu, řešené pomocí ZZE

Do této kapitoly jsme zařadili několik problémů, jejichž řešení s využitím Newtonova pohybového zákona či jen se základy kinematiky činí řadu potíží, zatímco energetický postup je velmi jednoduchý. Také styl této kapitoly bude poněkud jiný: uvádíme obecné řešení naznačených problémů a doplňujeme je úlohami pro samostatné řešení.

a) Určení síly nutné ke zvýšení rychlosti. Automobil o hmotnosti m se pohybuje stálou rychlostí $\boldsymbol{v}_1$ po přímé vodorovné silnici a poté, co urazil dráhu s, se jeho rychlost zvýšila na $\boldsymbol{v}_2$.

Nebudeme-li uvažovat změny odporových sil, potom na dráze s se změnila pohybová energie vozidla z hodnoty $\frac{1}{2}mv_1^2$ na $\frac{1}{2}mv_2^2$ účinkem síly $\boldsymbol{F}$, která konala na dráze s práci $W = F \cdot s$.

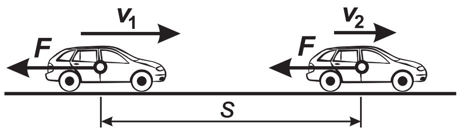


Obr. 27 Rozjíždění automobilu

Potom $F \cdot s = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$ a odtud hledaná síla $F = \frac{m}{2s}(v_2^2 - v_1^2)$.

b) Jaká musí být brzdná síla $\boldsymbol{F}$, aby se na dráze s snížila velikost rychlosti v_1 na hodnotu v_2 ($v_2 < v_1$)?

Problém lze řešit stejně, výsledná rovnice $F \cdot s = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$ ukazuje, že síla vychází „záporně“, tj. jde o sílu směřující proti směru pohybu.

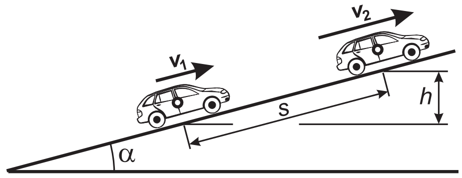


Obr. 28 Brzdění automobilu

c) Jaká síla působí při zrychlování letadla z klidu $v_1 = 0$ na rychlost o velikosti v_2 na ranveji na dráze s? Problém řešíme pro $v_1 = 0$, tedy $F = \frac{m}{2s} v_2^2$.

Obr. 29 Start letadla

d) Jakou silou musí působit motor vozidla, aby se nejen rychlost zvyšovala, ale vozovka má přitom stoupání $p = \sin\alpha = \frac{h}{s}$? Síla působící na vozidlo změní jednak energii pohybovou $\Delta E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$, dále také zvýší energii polohovou $\Delta E_\mathrm{p} = mgh$, kde $h = s \cdot p$. Potom



Obr. 30 Auto jedoucí do kopce

$$F \cdot s = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + mgsp,$$

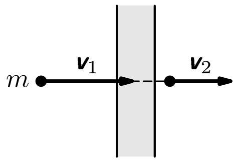
$$F = \frac{m}{2s}(v_2^2 - v_1^2) + mgp.$$

e) Při prostřelování prkna o tloušťce d působí na střelu o hmotnosti m stálá odporová síla $\boldsymbol{F}$. Přitom se rychlost střely sníží z hodnoty v_1 na hodnotu v_2. Pro velikost odporové síly F platí

$$F \cdot d = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2,$$

z čehož

$$F = \frac{m}{2d}(v_2^2 - v_1^2).$$



Obr. 31 Střela

Protože $v_2 < v_1$, jde o sílu směřující proti pohybu střely. Známe-li střední odporovou sílu působící proti pohybu střely, můžeme určit i vzdálenost x, do níž se střela dostane v případě, že prkno nebude prostřeleno. Potom

$$x = \frac{m}{2F}(v_2^2 - v_1^2) \text{ (Pozor, síla } F < 0\text{)},$$

neboli lépe

$$x = -\frac{m}{2F}(v_1^2 - v_2^2).$$

Největší vzdálenost je d, přičemž $v_2 = 0$. Tím můžeme určit minimální rychlost střely, nutnou k prostřelení prkna:

$$v_\mathrm{min} = \sqrt{\frac{2Fd}{m}}.$$

f) Určete rychlost kuličky matematického kyvadla o hmotnosti m, kterou vychýlíme do výšky h nad rovnovážnou polohu popř. tak, že vlákno svírá se svislým směrem úhel α (obr. 32).

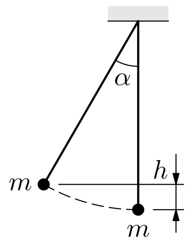
V krajní poloze má kulička výšku h, tedy $E_{\mathrm{p1}} = mgh$, a rychlost nulovou, tj. $E_{\mathrm{k1}} = 0$. Když se kulička dostane zpět do rovnovážné polohy, je $E_{\mathrm{p2}} = 0$, $E_{\mathrm{k2}} = \frac{1}{2}mv^2$.
Podle zákona o zachování mechanické energie

$$0 + mgh = \frac{1}{2}mv_x^2 + mgx,$$

a tedy

$$v_x = \sqrt{2g(h - x)}.$$

Odtud však plyne, že polohu kuličky je nutno omezit na $x \leq h$.



Obr. 32 Matematické kyvadlo

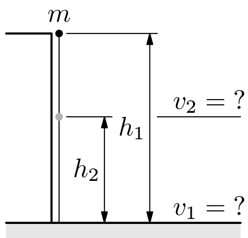
g) Rychlost dopadu v_1 tělesa o hmotnosti m s nulovou počáteční rychlostí z výšky h_1 (volný pád), určíme ze vztahu

$$mgh_1 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv_1^2,$$

z čehož

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}.$$

Budeme-li výšky h_1, h_2 (viz obr. 33) měřit od povrchu země, a místo dopadu bude mít výšku h_2 nad povrchem země, platí



Obr. 33 Volný pád

$$mgh_1 + 0 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2,$$

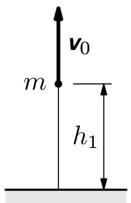
z čehož

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}.$$

h) Těleso o hmotnosti m bylo odpáleno svislým směrem vzhůru rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ ve výšce h_1 (vrh svisle vzhůru).
Počáteční mechanická energie tělesa je $E_0 = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_0^2$, v nejvyšší poloze má těleso mechanickou energii $E_1 = mgh_{\max}$, ve výšce h_2 má těleso mechanickou energii $E_2 = mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$.
Ze zákona o zachování mechanické energie vyplývá, že

$$E_0 = E_1 = E_2.$$

Z rovnosti $E_0 = E_1$ vyplývá



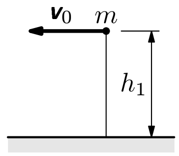
Obr. 34 Vrh svisle vzhůru

$$mgh_{\max} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_1, \text{ z čehož } h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} + h_1.$$

Případně z rovnosti $E_2 = E_0$ vyplývá, že

$$mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_0^2, \text{ z čehož}$$
$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{v_0^2 - 2g(h_2 - h_1)}.$$

i) Stejné vztahy platí i pro vrh vodorovný.



Obr. 35 Vrh vodorovný

Počáteční mechanická energie je $mgh_1 + \frac{1}{2}mv_0^2$, mechanická energie při dopadu je $0 + \frac{1}{2}mv^2$, mechanická energie ve výšce h_2 je $mgh_2 + \frac{1}{2}mv_2^2$.

Opět ze zákona o zachování mechanické energie určíme velikost dopadové rychlosti

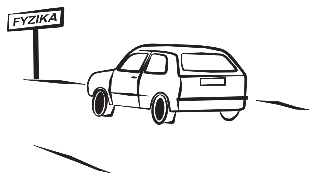
$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_0^2, \text{ tedy } v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_1},$$

případně můžeme také určit velikost rychlosti v_2 ve výšce h_2 nad povrchem země, tj.

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_1, \text{ z čehož } v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_1 - h_2)}.$$

Úlohy k samostatnému řešení – 6

Úloha 18 – brzdění před značkou obce



Obr. 36 Auto vjíždějící do obce

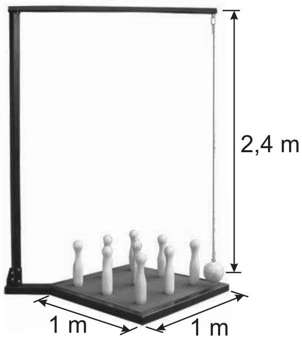
Automobil o hmotnosti 1000 kg jede po silnici mimo uzavřenou obec stálou rychlostí 90 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, v obci je povolena rychlost 50 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Při brzdění se vyvine stálá síla 1000 N. Jak daleko před značkou místního označení musí řidič začít brzdit?

Úloha 19 – cihly na stavbě

Předpokládejme, že hmotnost cihly je 6,0 kg. Cihly potřebné při stavbě druhého podlaží podává nejprve jeden pomocník tak, že ze země vyhodí cihlu do patra výšky 4,0 m, odtud druhý do druhého patra do výšky 3,0 m. Pracovník cihlu přijímající vždy počká na okamžik, kdy má cihla nejmenší rychlost. Určete rychlost, kterou cihla opouští ruku (prvního i druhého pracovníka).

Úloha 20 – ruské kuželky

Ruské kuželky je společenská hra, při níž se z daného „prostoru“ vyrážejí sestavené kuželky pomocí koule, upevněné na lanku (obr. 37). Koule se uvádí do pohybu tak, že se při napjatém lanku o délce 240 cm (měříme od místa závěsu do středu koule) vychýlí lanko o úhel α (koule se zvedne tak, že se její těžiště přemístí o výšku h oproti původní rovnovážné poloze) a následně uvolní. Při neopatrné manipulaci byla koule uvolněna předčasně a při průchodu rovnovážnou polohou narazila do holenní kosti instruktora. Jaká byla rychlost setkání, bylo-li $h = 80$ cm? Jaký úhel svírala koule se svislou polohou, je-li $l = 2{,}4$ m?



Obr. 37 ruské kuželky

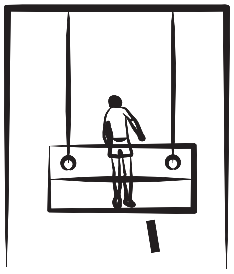
Úloha 21 – startující airbus

Airbus o hmotnosti 360 t může na zastavení využít ranveje o délce nejvýše 2,0 km, přičemž rychlost, při níž se odpoutá od zemského povrchu, dosahuje 270 až 324 km $\cdot$ h^{-1}. Jakou nejmenší tahovou sílu musí motory vyvinout?

Obr. 38 Startující airbus

Úloha 22 – neopatrý myč [2]

Při mytí oken a průhledných ploch vysokých domů se používá plošina, která je zavěšena na lanech. Neopatrný myč upustil ve výšce 38 m nad terénem plastovou nádobku s ironem o hmotnosti přibližně 0,50 kg. Jak velkou rychlostí nádobka dopadla na zem a jaká byla její kinetická energie?

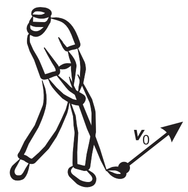


Obr. 39 Mytí oken

[2] Muž umývající okna a průhledné plochy vysokých domů.

Úloha 23 – golfový míček

Při hře odpálil golfista míček rychlostí 30 m·s^{-1} šikmo vzhůru. Míček stoupal nejprve vzhůru a pak až do okamžiku dopadu zpět na „green“ (trávník) klesal. Největší dosažená výška byla 25 m. Jaké rychlosti v této výšce míček dosáhl, jak dlouho byl ve vzduchu a v jaké vzdálenosti dopadl na trávník?



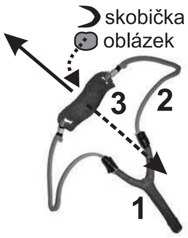
Obr. 40 Golfový míček

7 Komplexní úlohy

Nyní obrátíme pozornost na několik obtížnějších problémů, při jejichž řešení můžeme využít zákona o zachování mechanické energie. Nejprve musíme doplnit naše poznatky.

Příklad 18 – klukovská zbraň: prak

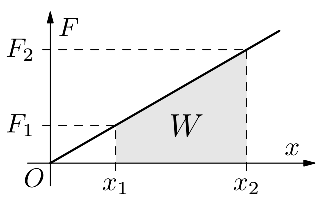
Mechanická energie souvisí i s jevy pružnosti. Ve starších „klukovských“ knížkách se někdy píše o „praku“. Tato klukovská zbraň (obr. 41) se skládá z dřevěné části (1), u níž je připojeno pryžové vlákno (2), v jehož polovině býval umístěn kousek kůže (3), do níž se vkládal kámen.[3] Při napínání vlákna bylo třeba vykonat práci W, vlákno bylo v napjatém stavu, který popisuje tzv. *elastická energie* (energie pružnosti). Odhadněte velikost rychlosti, s jakou může být pomocí praku vystřelen kámen.



Obr. 41 Prak

Řešení

Při napínání vlákna silou $\boldsymbol{F}$ tato síla způsobuje prodloužení x. Experimentálně je možno zjistit, že velikost napínací síly F rovnoměrně roste s prodloužením x, tj. $F = kx$ (toto platí při pružných deformacích). Nejprve vlákno trochu napneme, při prodloužení x_1 platí $F_1 = kx_1$. Pak pokračujeme v napínání tak, že $F_2 = kx_2$.



Obr. 42 Napínání vlákna

[3]Někdy se přímo na vlákně umísťovaly papírové nebo kovové „skobičky“.

Práci vykonanou při napínání pak určíme jako obsah plochy znázorněné na obr. 42, tj.

$$W = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}k(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2.$$

Veličinu $\frac{1}{2}kx^2$ označíme $E_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}kx^2$, jde o energii pružnosti vlákna.

Při střelbě prakem vložíme kámen do místa 3 a vlákno natáhneme. Délky levé i pravé části pryžového vlákna jsou l_0, po prodloužení $l_0 + x$, takže energie pružnosti $E_{\mathrm{el}} = 2 \cdot \frac{1}{2}kx^2 = kx^2$. Ze zákona o zachování mechanické energie na počátku $E_1 = kx^2 + 0$. Poté, co prak ukončí zrychlování kamene, dostaneme $E_0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$. Z rovnosti $E_1 = E_2$ dostaneme $kx^2 = \frac{1}{2}mv^2$, z čehož

$$v = \sqrt{\frac{2k}{m} \cdot x}.$$

Předpokládejme, že silou 20 N prodloužíme pryžové vlákno o 12 cm, tj. $k = \frac{F}{x} = 167\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$. Potom kamenu o hmotnosti 100 g udělí prak rychlost

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 167}{0{,}1}x} = 57{,}8\sqrt{x}.$$

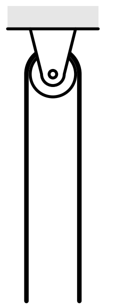
Při prodloužení vlákna o dvakrát 0,1 m (na každé straně), bude kámen vystřelen z praku rychlostí o velikosti $v = 18{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Poznámka

Více informací o konstrukci a práci s prakem je možno nalézt např. na *http://petrkle.wz.cz/ruzne/prak.php.* Při manipulaci s prakem je však třeba si uvědomit, že tato zbraň je nebezpečná pro okolí a že je třeba dodržovat bezpečnostní předpisy, abychom touto zbraní neohrožovali své okolí.

Příklad 19 – lano volně visící přes kladku

Lano o hmotnosti m a délce l je volně přehozeno přes malou kladku, jejíž rotační pohyb (a tedy i kinetickou energii) nebudeme uvažovat. Lano je v rovnovážné poloze, když na každé straně kladky visí jeho polovina. Za jeden konec lana zatáhneme, tím dojde k porušení rovnováhy – na jedné straně kladky bude viset lano o délce $\left(\frac{l}{2} + \Delta x\right)$, na druhé straně $\left(\frac{l}{2} - \Delta x\right)$. V důsledku toho se lano začne pohybovat. Určete, jakou rychlostí opustí lano kladku.



Obr. 43 Kladka

Řešení

Při pohybu lana se původní poloha jeho těžiště změní z polohy T_1 na T_2 (obr. 44). Referenční polohu budeme vztahovat k ose kladky. Počáteční polohová energie lana

$$E_{\mathrm{p1}} = -mg\frac{l}{4}$$

se změní na

$$E_{\mathrm{p2}} = -mg\frac{l}{2}.$$

Počáteční pohybová energie lana je

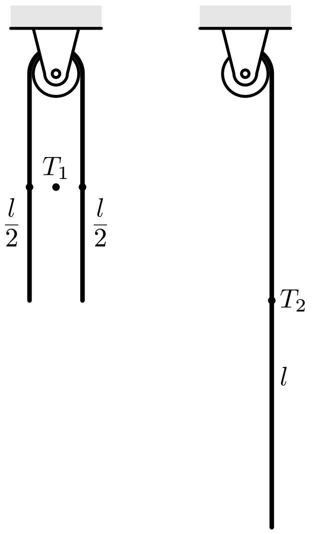
$$E_{\mathrm{k1}} = 0,$$

na konci bude mít lano pohybovou energii

$$E_{\mathrm{k2}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

Podle zákona o zachování mechanické energie platí

$$-mg\frac{l}{4} + 0 = \frac{1}{2}mv^2 - mg\frac{l}{2}.$$



Obr. 44 Pohyb lana na kladce

Tuto rovnici dále upravíme na tvar

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\frac{l}{4},$$

pak vyjádříme velikost rychlosti v, kterou lano opouští kladku. Dostaneme

$$v = \sqrt{\frac{1}{2}gl}.$$

Poznámka 1

V tomto modelu jsme neuvažovali odporové síly. Je zřejmé, že uvážíme-li odporové síly a rotační pohyb kladky, potom skutečná velikost rychlosti $v_{\mathrm{s}} < v$.

Poznámka 2

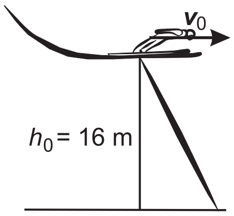
Energetické řešení dané úlohy je přístupné našemu čtenáři, ovšem řešení na základě pohybových zákonů vede k nutnosti znát základy vyšší matematiky.

Příklad 20 – adrenalinové lyžování

Při „adrenalinovém lyžování“ se lyžař (obr. 45), hazardující se svým zdravím a životem, rozjíždí z malého svahu, který je ukončen krátkou vodorovnou plošinkou (obr. 46). Pod ní je velmi strmý sráz, který budeme modelovat prudkým svahem. Po rozjezdu dosáhne lyžař na hraně plošinky rychlosti 8,0 m·s^{-1} a na svah dopadne v hloubce 16 m pod plošinkou.

Obr. 45 Adrenalinové lyžování

Určete rychlost dopadu lyžaře a vzdálenost místa dopadu od okraje plošinky. Zamyslete se nad tím a pokuste se vysvětlit, proč je adrenalinové lyžování zdraví a životu nebezpečné.



Obr. 46 Skok ze srázu

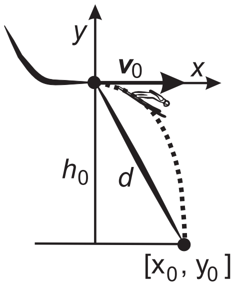
Řešení

Vztažnou soustavu spojíme s okrajem plošinky (obr. 47). Na okraji plošinky má lyžař kinetickou a potenciální energii danou níže uvedenými vztahy:

$$E_{\mathrm{p1}} = 0; \qquad E_{\mathrm{k1}} = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

O $h_0 = 16$ m níže pak bude

$$E_{\mathrm{p2}} = -mgh_0; \qquad E_{\mathrm{k2}} = \frac{1}{2}mv^2.$$



Obr. 47 Dopad ze srázu

Podle zákona o zachování mechanické energie bude platit

$$E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{p1}} = E_{\mathrm{k2}} + E_{\mathrm{p2}}.$$

Po dosazení níže výše uvedených vztahů pro jednotlivé energie, dostaneme

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - mgh_0,$$

z čehož
$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} \doteq 19{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$
Souřadnice místa dopadu $y_0 = -16$ m, $x_0 = v_0 \cdot t$, kde $t = \sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}$, tedy $x_0 = 14{,}3$ m. Vzdálenost místa dopadu od okraje plošinky pak bude
$$d = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 21{,}5\ \mathrm{m}.$$

Poznámka 1

V našem modelu jsme neuvažovali s odporem prostředí. Pohyb způsobuje tíhová síla lyžaře o hmotnosti 80 kg (i s lyžemi), potom $F_\mathrm{G} = 800$ N, odporová síla je přibližně $F_0 \approx 140$ N. V reálné situaci je však nutno s odporovou silou uvažovat, a proto rychlost dopadu i vzdálenost budou menší.

Poznámka 2

Více informací o adrenalinovém lyžování je možno nalézt na Internetu, kde např. na stránkách *http://www.speedski-cz.com/photogalery/* je možno nalézt i obrazovou galerii týkající se tohoto sportu, z těchto stránek je také stažen obr. 45. Po prohlédnutí těchto stránek už jistě naleznete odpověď na otázku, proč je adrenalinové lyžování zdraví a životu nebezpečné.

Úlohy k samostatnému řešení – 7

Úloha 24 – skok z můstku s normovým bodem 25 m

Věž skokanského můstku má výšku 25 m a skokan na lyžích může tedy v nejnižší poloze můstku získat rychlost $\boldsymbol{v}_0$. Víte-li, že skokan o hmotnosti 80 kg dopadne na svah v hloubce 42 m od místa výskoku, určete rychlost dopadu skokana. Vysvětlete, proč by měl dopadnout na svah a ne na vodorovnou závěrečnou rovinku. Jestliže po dopadu na svah se už rychlost skokana nebude zvětšovat, určete průměrnou sílu nutnou k zabrzdění na trase 80 m. Vyslovte předpoklady pro řešení.

Úloha 25 – skákající míček

Když uvolníme malý míček ve výšce $h_0 = 2{,}00$ m nad podlahou, dopadne rychlostí o velikosti v_0, ale odrazí se od podlahy rychlostí o velikosti $v_1 = 0{,}80\, v_0$. Určete, do jaké výšky míček po odrazu vyskočí. Jak bude míček „poskakovat“ dále, platí-li $v_{n+1} = 0{,}80\, v_n$? Nakreslete graf závislosti $v = f(t)$ pro prvních šest odrazů.

Co dodat na závěr ...

Chceme-li modelovat reálné situace, se kterými se můžeme běžně setkat, je třeba si vždy uvědomit, do jaké míry lze daný děj nahradit „ideálním modelem“. Vezmeme-li v úvahu např. již dříve uvažovaný skok na lyžích, pak ve většině případů tuto situaci modelujeme jako vodorovný vrh s dopadem na šikmou plochu. Uvědomme si však, že pokud bychom se modelováním, např. skoků na lyžích, chtěli zabývat podrobněji a chtěli se více přiblížit realitě, pak s tímto modelem již nevystačíme. Popišme si ve stručnosti přesněji, co se všechno při skocích na lyžích vlastně odehrává.

„Skok na lyžích ze skokanského můstku se obecně skládá z pěti fází: nájezdové, odrazové, letové, doskokové a dojezdové. Při nájezdové fázi se závodník snaží získat co největší rychlost na přímé dráze nájezdu a v přechodovém oblouku. Po startu závodník zaujme aerodynamické postavení, aby snížil odpor vzduchu na minimum. Nájezdové postavení je i výchozím postavením pro odraz. Trvání nájezdu závisí na normovaném bodu můstku a pohybuje se v rozpětí 5 až 10 s. Odrazová fáze je nejkratší, trvá 0,2 až 0,3 s, ale zároveň nejdůležitější fází skoku. Účinný odraz musí být razantní, ve vertikálním směru k rovině odraziště, ukončený přesně na hraně odraziště. Při odrazu se závodník snaží snížit odpor vzduchu na minimum, získat optimální rotaci těla v prostoru proti působícímu odporu vzduchu a účelně zařadit pohyb paží. Skloubení těchto požadavků do pohybové akce, realizované ve velké rychlosti 80 až 115 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a v minimálním čase, klade na skokana velké fyzické a psychické nároky a vyžaduje dlouhodobou systematickou přípravu. Odrazem se skokan dostává do letové fáze. Při letu využívá aerodynamických sil a snaží se nastavit tělo a lyže do optimální polohy, aby prodloužil letovou křivku a dosáhl delšího skoku. Při letu jemně koriguje polohu těla a lyží podle měnících se povětrnostních podmínek i měnícího se sklonu letové křivky. Trvání letové fáze opět závisí na normovém bodu můstku, pohybuje se v rozmezí 2,5 až 5,0 s. Vývoj skokanské výzbroje a výstroje v posledních letech zvýšil podíl letové fáze na výsledném výkonu (pozn. autorů – jde o výkon?). Fáze ukončující let se nazývá doskok. Skokan získává kontakt s pevnou podložkou a snaží se udržet rovnováhu. Vysune jednu nohu vpřed, sníží postoj a upaží. Letová fáze i doskok jsou určeny pravidly a ovlivňují hodnocení stylu skoku. Poslední fází je dojezd.“ [4]

Z výše uvedeného je možno učinit jeden podstatný závěr: čím lépe umíme fyziku, tím více jsme schopni tvořit přesnější modely daných reálných situací.

Bez nadsázky je tedy možno říci, že v řadě případů, a nemusí to být jen skoky na lyžích, se kterými se v životě setkáváme, fyzika usnadňuje řešení různých situací a pokud budeme chtět, může nám i pomáhat ...

[4] Převzato z publikace: *Encyklopedie tělesné kultury.* Olympia. Praha 1988.

Řešení úloh

1. 1,9 kJ; 30,4 kJ; 6,25%.
2. Odporová síla 7,5 N; 67,5 N; celková tahová síla 37,5 N; 97,5 N; práce 1,35 MJ; 3,51 MJ; doba pohybu v prvním případě 2 hod, ve druhém 40 min.
3. 51-krát; 2 000 J; 15,6 N.
4. Celková síla byla 37,5 N při rychlosti 5 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, tedy výkon 187,5 W; ve druhém případě 97,5 N při rychlosti 15 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, tedy výkon 1 462 W (výkon trénovaného sportovce).
5. a) Při přemístění 1 kg uhlí do výšky 15 m se vykoná práce 150 J; 1 kWh = = 3 600 000 J. Vykonat uvedenou práci lze při přemístění 24 000 kg = 24 t. b) Jestliže v kbelíku uneseme 16 kg uhlí, pak jde o 1 500 kbelíků (4 kbelíky denně – dva ráno a dva večer – 375 dní – déle než celý rok!)
6. $P = F \cdot v = 5{,}0$ kW; $a = 0{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$; $s = 156$ m; $W = 62{,}5$ kJ.
7. $W = 90$ kJ; $P = 180$ W – pro jednoho lyžaře.
8. 214,9 kJ.
9. Hladinu nulové polohové energie umístíme na podlaze sklepa. Polohová energie vody je dána výškou těžiště, $h_{\mathrm{T}} = 0{,}40$ m. objem vody je 76,8 $\mathrm{m^3}$, hmotnost vody je 76 800 kg, $E_{\mathrm{p1}} = 307\,200$ J, $E_{\mathrm{p2}} = 1\,382\,400$ J. Je nutno vykonat práci $W = \Delta E_{\mathrm{p}} = 1\,075\,200$ J. Doba čerpání 320 min = 5 h 20 min = 19 200 s. Sací výkon čerpadla 56 W.
10. Výkon $P = \dfrac{\Delta E_{\mathrm{p}}}{t} = \varrho \cdot Q_{\mathrm{V}} \cdot g \cdot h$, odtud $h = \dfrac{P}{\varrho \cdot g \cdot Q_{\mathrm{V}}}$, číselně 1000 m. Tak vysokou hráz s přítokem a odtokem vody nelze postavit.
11. Rychlost přistání je 66,7 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$; pohybová energie letadla v okamžiku „dosednutí“ na dráhu $E_{\mathrm{k}} = 267$ MJ. Brzdicí síla $F = \dfrac{\Delta E_{\mathrm{k}}}{s}$; číselně $F_1 = 222{,}5$ kN; $F_2 = 133{,}5$ kN. Zpomalení je $a_1 = 1{,}85\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, zastaví za 36 s; při zpomalení $a_2 = 1{,}11\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ zastaví za 60 s.
12. Práce tahové síly $W = F \cdot s$ se projeví zvětšením pohybové energie $\dfrac{1}{2}mv^2$. Potom $v = \sqrt{\dfrac{2Fs}{m}}$; v prvním případě $v_1 = 8{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 31{,}2\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$, ve druhém případě $v_2 = 6{,}2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 22{,}5\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$.
13. $E_{\mathrm{kp}} = \dfrac{1}{2}mv_{\mathrm{p}}^2$; $E_{\mathrm{ka}} = \dfrac{1}{2}mv_{\mathrm{a}}^2 < E_{\mathrm{kp}}$. Podíl $E_{\mathrm{kp}} : E_{\mathrm{ka}} = \left(\dfrac{v_{\mathrm{p}}}{v_{\mathrm{a}}}\right)^2 = \left(\dfrac{r_{\mathrm{a}}}{r_{\mathrm{p}}}\right)^2 = 4$.
14. Délka trasy $l = 75$ m, převýšení $h = 15$ m, sklon dráhy $p = \sin\alpha = \dfrac{h}{l} = 0{,}20$; úhel sklonu $\alpha = 11{,}5°$. Rychlost v dolní části určíme na základě porovnání energií: $v = \sqrt{2gh} = 17{,}3\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 62{,}3\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Mladík byl opravdu nezodpovědný.

15. Výška domu je 11,3 m + 1,8 m = 13,1 m.

16. Pohybová energie automobilu $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$ se brzděním zmenšuje, práce nutná k zabrzdění $W = F \cdot s$. Odtud $s = \frac{mv^2}{2F} = 368$ m. Dobu brzdění stanovíme buď $t = \frac{2s}{v} = \frac{mv}{F} = 21$ s nebo pomocí vztahu $t = \frac{v}{a} = 21$ s, kam za zrychlení dosadíme $a = \frac{F}{m} = 1{,}67\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

17. Polohová energie rakety ve výšce h je $E_\mathrm{p} = mgh$ pohybovou energii budeme považovat za nulovou. V okamžiku rozprsknutí se budou mít všechny části rakety stejně velké rychlosti, ale budou se pohybovat různými směry. Platí $mgh + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$ – ukazuje se, že energie dosedajících částí rakety je pro všechny části stejná.

18. $s = \frac{m}{2F}(v_1^2 - v_2^2) = 216$ m.

19. První pracovník: $\frac{1}{2}mv_1^2 + 0 = mgh_1$, odkud $v_1 = \sqrt{2gh_1} = 8{,}95\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; druhý pracovník $v_2 = \sqrt{2gh_2} = 7{,}75\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

20. $mgh + 0 = \frac{1}{2}mv^2 + 0$, $v = \sqrt{2gh} = 4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; $\cos\alpha = \frac{l-h}{l} = 0{,}67$; $\alpha = 48°$.

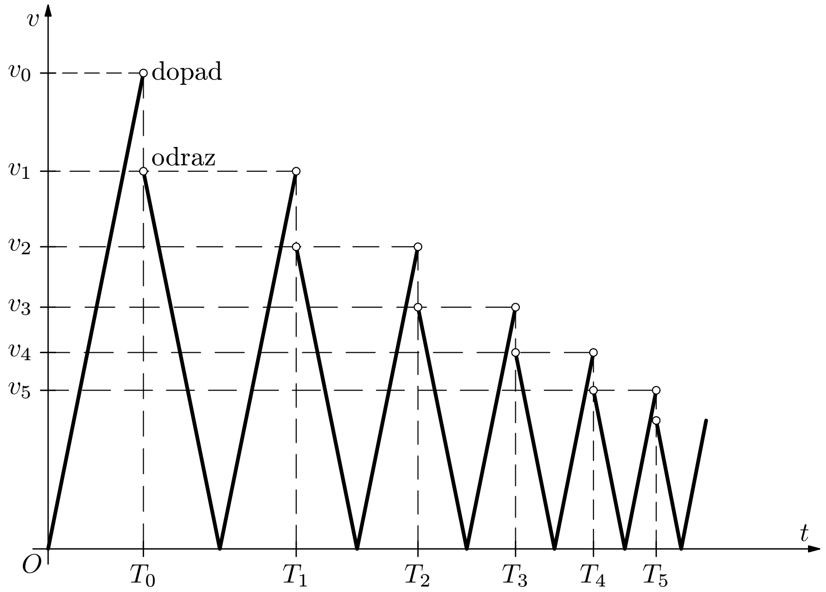
21. Pro $v_1 = 270\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ je $F_1 = \frac{mv_1^2}{2s} = 506$ kN, což představuje výkon 38 MW a zrychlení $1{,}4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; je-li $v_2 = 324\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, potom $F_2 = 729$ kN, výkon 65,6 MW, zrychlení $2{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. $F_\mathrm{min} = F_1$. Letadla však zpravidla vystačí s trasou podstatně kratší.

22. Ze zákona o zachování mechanické energie stanovíme $mgh + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2$; $v = \sqrt{2gh} = 27{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, pohybová energie $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = mgh = 190$ J. Ve skutečnosti nelze zanedbat odpor prostředí, rychlost dopadu i energie budou menší.

23. Ze zákona o zachování mechanické energie platí $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2$, odkud $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$, $v = 20\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Míček se pohyboval vrhem šikmým. Nejprve stoupal do výšky 25 m, pak po stejnou dobu klesal, tj. ve směru svislém $h = \frac{1}{2}gt^2$, $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2{,}24$ s, celková doba pohybu je 4,5 s. Míček dopadl ve vzdálenosti $s = v \cdot 2t = 90$ m. Ve skutečnosti je nutno vzít v úvahu odpor vzduchu, který výrazně snižuje rychlost míčku, a také doba stoupání a doba klesání míčku se liší. Náš model používá jen přibližný odhad reálné situace.

24. Označme h_1 výšku věže skokanského můstku, h_0 hloubku dopadu skokana. Podle zákona o zachování mechanické energie platí $\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh_1$, z čehož $v_0 = \sqrt{2gh_1}$. Dále také platí $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - mgh_0$, z čehož $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = \sqrt{2g(h_1 + h_0)} = 36{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Svah pro dopad musí být šikmý, aby se co nejvíce snížila kolmá složka dopadové rychlosti a tím se podstatně snížila velikost kolmé tlakové síly, kterou skokan při svém dopadu na podložku působí. Při výpočtu brzdné síly budeme počítat pouze její průměrnou hodnotu, protože velikost aerodynamické síly se v průběhu pohybu mění v závislosti na změně rychlosti pohybu. Platí $F \cdot s = \frac{1}{2}mv_1^2$, z čehož $F = \frac{mv_1^2}{2s} = \frac{mg(h_1 + h_0)}{s} = 670\ \mathrm{N}$.

25. Ze zákona o zachování mechanické energie $v_0 = \sqrt{2gh_0} = 6{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, potom $h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = 0{,}80^2 \frac{v_0^2}{2g} = 0{,}80^2 h_0 = 1{,}28$ m. Platí-li $v_{n+1} = 0{,}80\, v_n = 0{,}80^n\, v_0$, dostaneme obdobným postupem jako pro první odraz vztah $h_{n+1} = 0{,}80^2\, h_n = 0{,}80^{2n}\, h_0$. Pro dobu dopadu platí $T_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 0{,}63$ s, pro $n = 1, 2, \ldots$. Obdobně jako v předchozích případech lze odvodit pro dobu
$T_n = T_{n-1} + 2 \cdot 0{,}8^n\, T_0$, pro $n = 1, 2, \ldots$; pro $n = 0$ je $T_n = T_0$.



Obr. 48 Skákající míček