Fyzika je kolem nás (Poloha a její změny)

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Ivo Volf – Miroslava Jarešová

Obsah

Slovo úvodem

Když se člověk ve fyzice dozví, že žije ve čtyřrozměrném prostoročase, může mít z toho nejprve trochu šok. Zkusme si však tuto větu blíže objasnit. Pokud se zamyslíme nad tím, jak je to např. s mapami, můžeme říci, že do rovinné plochy umíme zabudovat trojrozměrný svět. Pokud bychom se na nějakou rovinnou mapu podívali, uvidíme zde barevně znázorněné hory a nížiny, na přesnějších mapách nalezneme také údaje o nadmořské výšce (např. Sněžka 1602 m), popř. i vrstevnice. Tyto údaje nám nahrazují třetí prostorovou souřadnici. Analogickým způsobem je možno popsat také děje v reálném světě. V běžném životě víme, že se nestačí domluvit na schůzce tak, že si řekneme KDE se sejdeme; důležité je i to, KDY se sejdeme. Informace o setkání proto musí obsahovat údaj o poloze (tři souřadnice) a o době setkání (čtvrtá souřadnice). Místo v prostoru jsme popsali pomocí čtyř souřadnic: třemi prostorovými a jednou časovou – jinak řečeno provádíme popis v prostoročase.

Tato publikace je zaměřena na to, abychom si uvědomili, že pro přesný popis reality potřebujeme nejprve stanovit údaje o poloze a čase; ty se během jevů a dějů pochopitelně budou měnit. Čas běží neustále a lze ho „zastavit" např. jen na fotografii. Souřadnice polohy se měnit nemusí (těleso je v klidu) nebo se mění alespoň jedna z nich (nastane pohyb tělesa). Naším úkolem bývá často předpovídat další vývoj pohybu, a tak musíme nalézt funkční závislosti, jak změny souřadnic polohy závisí na čase. O tom jste se učili v kinematice; my se pokusíme v naší brožuře podívat na pohyb z trochu jiného pohledu.

Brožura, kterou vám předkládáme, je první díl celého cyklu „Fyzika je kolem nás". Mechanika bude rozpracována v 8 brožurách podle kapitol ve vaší učebnici. Důraz však klademe na slova „kolem nás". Tomu odpovídá jak výklad, tak také zvolené problémy k řešení. Problémy vybíráme sice jednoduché (pro zájemce o fyziku), ale přesto podstatně složitější než školní úlohy na procvičování probraných vzorců.

Pamatujme na to, že školská fyzika nejsou na sebe navazující vzorečky, které se musíte „našrotit", abyste zvládli písemky. Školská fyzika by se sice měla opírat o poznatky, ale podstatné je především použití těchto znalostí v praxi, tedy při řešení problémů. A na tom je založen náš přístup k mechanice.

Autoři

1 Popis polohy tělesa

V této části se budeme zabývat jen jednoduchými tělesy. Abychom si popis polohy i jejich změn ještě ulehčili, budeme popisovat tělesa velmi malých rozměrů, která ve fyzice nazýváme *hmotné body*. Tím bude těleso zcela jednoduše identifikováno co nejmenším počtem údajů. Z fyzikálního pohledu tedy tělesu ponecháme jeho hmotnost m; objem, hustota ani tvar nás nebudou zajímat – získáváme idealizovaný objekt: hmotný bod.

K popisu potřebujeme znát, kdy a kde se tento hmotný bod nachází. Proto popis polohy hmotného bodu vzhledem k přímce, na níž se nachází, musí obsahovat údaj o vzdálenosti a čase. Popis polohy hmotného bodu v rovině bude určen dvěma souřadnicemi pro polohu a časovým údajem, atd.

To znamená, že fyzika popisuje hmotné body a události s nimi spojené vždycky v prostoročase. Pro trojrozměrný prostor budeme udávat vždy tři prostorové souřadnice a časový údaj, tedy jak je nám již známo z hodin zeměpisu, potřebujeme k jednoznačnému určení polohy bodu na Zemi znát tři souřadnice: zeměpisnou šířku φ, zeměpisnou délku λ, nadmořskou výšku h a časový údaj t. K fyzikálnímu popisu mechanických dějů musíme přidat např. hmotnost m hmotného bodu, u těles objem a tvar, pro pohyby v blízkosti povrchu Země tíhové zrychlení $\boldsymbol{g}$, pro záření hustotu a tlak vzduchu aj.

K jednoznačnému stanovení události nebo děje v prostoročase potřebujeme mít určité výchozí a neměnné údaje. Proto vždy – ještě než začneme cokoli popisovat – musíme vymezit soustavu souřadnic.

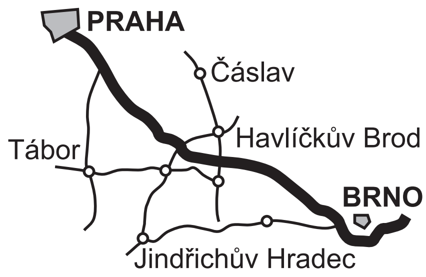
Aby naše práce byla zajímavější a prakticky použitelná, neoddělujeme popis polohy a změnu polohy striktně od sebe.

1.1 Jednorozměrný prostor

Havárii na dálnici D1 většinou identifikuje policie jednak délkovým údajem, dále pak údajem časovým.

K popisu polohy místa na dálnici stačí jediný údaj. Máme celkem tři možnosti pro stanovení soustavy lineárních souřadnic:

a) Počátek zvolíme na začátku dálnice v Praze; potom každé místo na dálnici má jednoznačně kladnou souřadnici $x > 0$ (viz obr. 2a)).

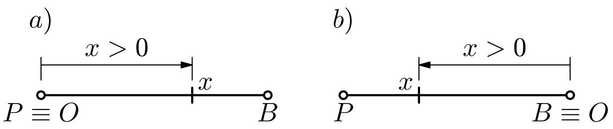


Obr. 1 Mapa dálnice D1

b) Počátek zvolíme na začátku dálnice v Brně; každý bod na dálnici má jednoznačně kladnou souřadnici $x > 0$ (viz obr. 2b)).

c) Počátek zvolíme v místě M mezi Prahou a Brnem; pak každé místo mezi M a Prahou má souřadnici $x < 0$, místo mezi M a Brnem má souřadnici $x > 0$ (viz obr. 2c)).

V posledním případě lze kladné a záporné souřadnice vyměnit, tj. místa mezi M a Prahou mají $x > 0$, mezi M a Brnem mají $x < 0$.



Obr. 2 Volba počátku soustavy souřadnic

Zbývá ještě časový údaj. Pro stanovení času na dálnici přijmeme platný středoevropský čas t, vycházející z měření času na 15° v.d., popř. platný letní středoevropský čas $t_1 = t + 1$ h.

Potom každé události na dálnici D1 můžeme přiřadit časoprostorové souřadnice $(x; t)$. Časové intervaly mezi událostmi, popsanými souřadnicemi $(x_1; t_1)$, $(x_2; t_2)$ určíme jako $\Delta t = t_2 - t_1$, vzdálenosti mezi polohami $\Delta x = x_2 - x_1$.

Příklad 1 – jízda po dálnici

Při jízdě po dálnici se řidič při průjezdu kolem značky 78 km podíval na hodinky a zjistil časový údaj 14 h 28 min 30 s. Po nějaké době jízdy přečetl údaje 93 km, 14 h 36 min 00 s. Určete, jakou vzdálenost řidič ujel, jaký čas přitom uplynul a jakou průměrnou rychlostí jel.

Řešení

Ujetá vzdálenost: $s = \Delta x = 93\ \text{km} - 78\ \text{km} = 15\ \text{km}$.
Uplynulý čas: $t = \Delta t = 14 : 36 : 00\ \text{h} - 14 : 28 : 30\ \text{h} = 7 : 30\ \text{min}$.
Průměrná rychlost $v_\text{p} = \dfrac{s}{t} = 33{,}3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 120\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

Na principu záznamu polohy hmotného bodu v jednorozměrném prostoru jsou založeny železniční a autobusové jízdní řády. Např. pro trasu Praha – Wien a zpět jsme vybrali dvousměrný expres Antonín Dvořák.

Tabulka 1 – jízdní řád expresu Antonín Dvořák

Stanice	**km**	**EC 71**	**EC 70**	**km**
Praha	0	——— 5:00	23:10 ———	404
Kolín	62	5:41 – 5:42	22:23 – 22:24	342
Pardubice	104	6:04 – 6:05	21:59 – 22:00	300
Česká Třebová	164	6:39 – 6:40	21:24 – 21:25	240
Brno	255	7:41 – 7:43	20:21 – 20:23	149
Břeclav	314	8:14 – 8:23	19:33 – 19:50	90
Wien	410	9:28 ———	——— 18:33	0

Poznámka:

Rozdíl ve vzdálenosti je způsoben jízdou po různých trasách v okolí Vídně.

Úloha 1 – jízda expresu 1

Zjistěte průměrné rychlosti expresu v jednotlivých úsecích tratě Praha – Wien a zpět. V kterém úseku jede expres nejrychleji? Jaká část z udané doby připadá na jízdu a jaká na zastávky? Jaká je průměrná rychlost expresu na celé trase Praha – Wien nebo Wien – Praha?

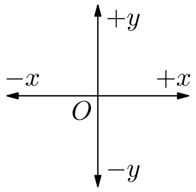
Úloha 2 - jízda expresu 2

Znázorněte graficky závislost dráhy na čase expresu pro oba směry (pro každý směr zvlášť). Předpokládejte, že expres jede v každém úseku rovnoměrným pohybem průměrnou rychlostí o velikosti, kterou jste určili v úloze 1. Dobu zastávek expresu s výjimkou zastávky v Břeclavi považujte za zanedbatelně malou vzhledem k době jízdy v jednotlivých úsecích.

1.2 Dvojrozměrný prostor

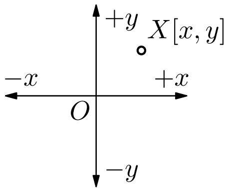
Velmi často nám pro orientaci v prostoru postačuje plán, mapa, globus – zkrátka dvojrozměrné zobrazení. Používají ho stavbaři při stavbě domu nebo při rekonstrukci inženýrských sítí, orientační běžci při závodech, turisté při přepravě na výletu, na mapách hledáme a nacházíme mnoho užitečných informací.

Při zobrazení světa do dvojrozměrného prostoru vycházíme z geometrických úvah. Zvolíme osu x (zpravidla zleva doprava), kterou rozdělíme bodem O (= origo – počátek) na dvě polopřímky $+x$ a $-x$. Bodem O vedeme kolmici na osu x – vznikne osa y (směrem nahoru $+y$, směrem dolů $-y$).



Obr. 3 Dvojrozměrný prostor

I když obě osy leží v této brožuře ve vodorovné rovině, říkáme zpravidla ose x *osa vodorovná*, ose y *osa svislá* (obr. 3). Je to pravděpodobně důsledek školní výuky a zobrazování na tabuli. Jestliže právě pracujete s počítačem a díváte se na monitor, dáte nám za pravdu.

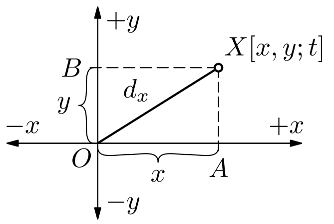


Obr. 4 Bod ve dvojrozměrném prostoru

Každý bod X, umístěný v rovinné soustavě souřadnic Oxy je přesně určen co do polohy uspořádanou dvojicí souřadnic $[x; y]$ (obr. 4).

Předpokládáme-li však, že se s časem může poloha bodu X měnit, musíme dodat ještě časový údaj t. Jednoznačné umístění bodu X je potom dáno *třemi* souřadnicemi v *dvoj*rozměrném prostoru, tj. můžeme psát $X[x, y; t]$.

Zde je příležitost definovat mechanický pohyb hmotného bodu: Čas t se mění (tempus fugit – čas běží a zastavíme ho pouze ve fotografii), ale obě další souřadnice se měnit nemusí ($x = konst.$, $y = konst.$ → hmotný bod je v klidu); jestliže se alespoň jedna ze souřadnic polohy mění, jde o mechanický pohyb.



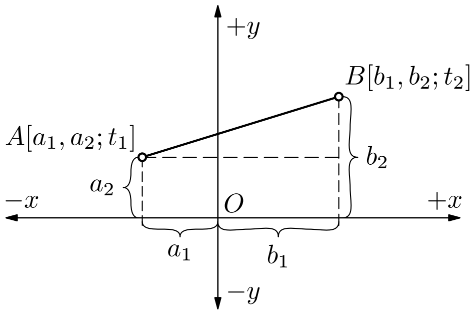
Obr. 5 Vzdálenost bodu od počátku

Z údajů polohy bodu X můžeme určit vzdálenost OX (vzdálenost bodu X od počátku soustavy souřadnic). Z obr. 5 plyne, že trojúhelníky OAX i OBX jsou pravoúhlé, a proto

$$|OX| = d_x = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Obecněji zvolíme-li v rovině Oxy dva body A, B se souřadnicemi $[a_1, a_2]$ a $[b_1, b_2]$, potom dokážeme stanovit délku úsečky

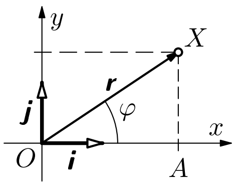
$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$



Obr. 6 Vzdálenost dvou bodů

Musíme dát dobrý pozor na znaménko u souřadnic; ve výrazu pro délku úsečky musíme určovat rozdíl souřadnic. Také zde dokážeme určit průměrnou rychlost pohybu mezi body A, B, a to $v_\mathrm{p} = \dfrac{|AB|}{\Delta t}$, kde $\Delta t = t_2 - t_1$.

V praktickém životě nahrazujeme často mírně zakřivené plochy rovinou, nemůžeme však dospět ke zcela přesným výsledkům. Možná, že by bylo vhodné sledovat polohu bodu $X[x, y; t]$ jen na základě jedné veličiny.



Obr. 7 Polohový vektor

Spojíme proto bod X s počátkem O, potom nám úsečka OX vymezuje tzv. *polohový vektor* $\boldsymbol{r}$, který v daném časovém okamžiku má souřadnice polohy x, y, tj. pro daný časový okamžik můžeme psát $\boldsymbol{r}(x, y)$. Zavedeme-li tzv. *jednotkové vektory* $\boldsymbol{i}$ ve směru osy x a $\boldsymbol{j}$ ve směru osy y (obr. 7), potom polohový vektor

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}.$$

Toto vyjádření nám později zjednoduší naše vyjadřování změn polohy metodou změn souřadnic polohového vektoru. Mohli bychom vyjít z toho, že trojúhelník OAX je pravoúhlý. Potom můžeme psát

$$\frac{x}{r} = \cos\varphi, \qquad \frac{y}{r} = \sin\varphi, \qquad \boldsymbol{r} = (r\cos\varphi)\boldsymbol{i} + (r\sin\varphi)\boldsymbol{j},$$

kde $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ značí velikost polohového vektoru.

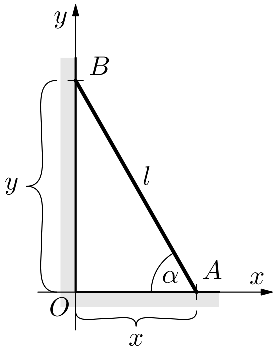
Poznámka

Je však třeba si uvědomit, že výše napsaný vztah platí pro určitý časový okamžik. Obecně tedy můžeme psát $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$.

Příklad 2 – žebřík

Žebřík je opřen ve vzdálenosti 1,8 m od svislé stěny domu a opírá se o parapet okna ve výšce 4,8 m. Určete délku žebříku a úhel sklonu.

Řešení



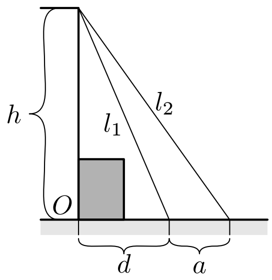
Obr. 8 Žebřík

Zavedeme soustavu souřadnic dle obr. 8. Žebřík je opřen na vodorovné podložce ve vzdálenosti $x = 1{,}8$ m, tedy v bodě $A[1{,}8 \text{ m}; 0]$, o stěnu je opřen ve vzdálenosti $y = 4{,}8$ m, v bodě $B[0; 4{,}8 \text{ m}]$. Délka l žebříku se určí pomocí Pythagorovy věty, tj.

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1{,}8^2 + 4{,}8^2} \text{ m} = 5{,}1 \text{ m}.$$

Úhel sklonu α se určí pomocí $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$, z čehož $\alpha = 69{,}5°$.

Úloha 3 – výška budovy



Obr. 9 Měření výšky budovy

Výšku h budovy obklopené drobnými stavbami nedokázali žáci gymnázia změřit, a tak je napadlo jiné řešení – pomocí provázku zjistili délky $l_1 = 42$ m, $l_2 = 48$ m a dokázali ještě změřit vzdálenost $a = 12$ m, ale ne již vzdálenost d (obr. 9). Stačí tyto naměřené údaje k tomu, aby se již dala určit výška h budovy? Pokud ano, vypočtěte ji.

Návod
Zvolte počátek soustavy souřadnic v nedostupném bodě O (obr. 9).

Úloha 4 – měření vzdáleností

Na adrese *www.mapy.cz* najděte možnosti, které vám Internet poskytuje:

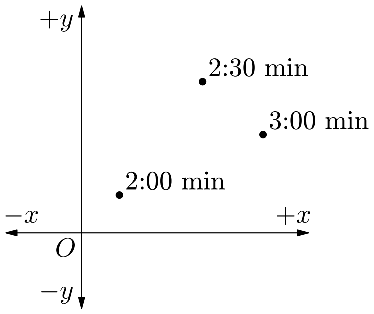
a) seznamte se se základní mapou, fotomapou a turistickou mapou okolí svého bydliště, dále také s mapou okolí své školy, kterou navštěvujete. Pokuste se orientovat ve fotomapě a využijte možností, které dávají funkce GPS a funkce Měření.

b) Prohlédněte si určitou lokalitu (např. Václavské náměstí v Praze, okolí Sněžky v Krkonoších, náměstí Svobody v Brně) a seznamte se s informacemi, které můžete získat užitím fotomapy.

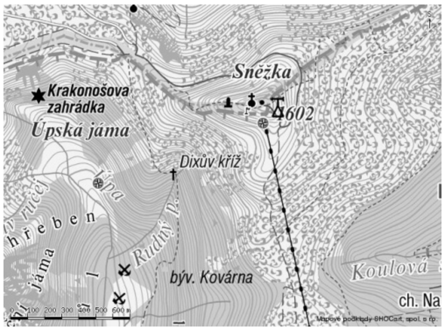
c) Podívejte se pomocí fotomapy na letiště Praha – Ruzyň a určete, jak dlouhé jsou rozletové a přistávací ranveje.

1.3 Kótované souřadnice v rovině

V praktickém životě se leckdy můžeme setkat s tím, že bychom potřebovali do dvojrozměrné soustavy vložit další souřadnici. Může to být časový údaj nebo údaj o výšce bodu nad rovinou Oxy, kterou vymezují osy souřadnic x, y, které obě zvolíme ve vodorovné rovině. V geometrii matematici vymysleli, jak toto technicky provést (obr. 10). Na první pohled by se zdálo, že třetí rozměr sdělený pomocí dodatkové informace je něco neobvyklého. Podíváme-li se však do turistické mapy (obr. 11), potom u řady významných bodů najdeme údaj o nadmořské výšce. Dokonce pro lepší představivost nacházíme na podrobnější mapě členitost terénu doplněnou o tzv. *vrstevnice* (spojnice míst o stejné nadmořské výšce), zpravidla výškovém rozdílu po 5 m či 10 m, a o šrafování, vyjadřujícím geometrii povrchu (prudké či pozvolnější stoupání).



Obr. 10 Vložení další souřadnice



Obr. 11 Turistická mapa

Zajímavé je na mapách znázorněných na serverech *www.mapy.cz* nebo na *www.googleearth.com* jednak měření vzdáleností, jednak velmi přesné údaje zjištěné přes GPS, které obsahují jednak stanovení zeměpisných souřadnic (zeměpisná délka λ, zeměpisná šířka φ), ale i nadmořské výšky.

Ať jde o kterýkoli způsob záznamu, zajímavá na něm je i skutečnost, že dokážeme do dvojrozměrného prostoru (tj. do roviny) znázornit další souřadnice nutné pro přesnější identifikaci ve čtyřrozměrném časoprostoru.

Příklad 3 – přesnost leteckého snímkování

Na serveru *www.mapy.cz* – letecké snímkování – se poloha bodu určuje s přesností na $0{,}001''$. Zjistěte, s jakou přesností lze pracovat s leteckým snímkováním na 50. rovnoběžce a 15. poledníku.

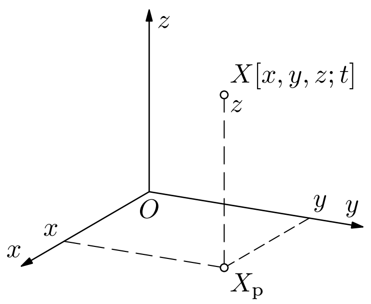
Řešení

Délka 15. poledníku je rovna asi 40 008 km – $R_\mathrm{p} \doteq 6\,367{,}5$ km, délka na 1° je 111,1 km, úhlu $1'$ odpovídá délka 1,852 km, na úhel $1''$ připadá asi 30,9 m. Přesnost na setiny úhlové vteřiny znamená údaj asi 0,3 m $\doteq$ 1 stopa. Ve směru východ – západ je přesnost na 50. rovnoběžce asi 20 m na 1 vteřinu.

Určete, s jakou přesností je možno pracovat s leteckým snímkováním na rovníku $R_\mathrm{e} = 6\,378{,}2$ km a 40. rovnoběžce.

1.4 Kartézské souřadnice

Podíváme-li se do volného dolního rohu místnosti (v obývácu, v učebně), můžeme pozorovat tři kolmice, jež se stýkají v jednom bodě, tzv. *počátku* zavedené soustavy souřadnic. Danému bodu X v daném časovém okamžiku t přiřadíme tři souřadnice polohy: z bodu X spustíme kolmici k rovině Oxy, její délka je zároveň souřadnice z, $z = |XX_\mathrm{p}|$ (je-li $z > 0$, je bod X nad rovinou, pro $z < 0$ je bod X pod rovinou Oxy). Nyní se nacházíme v rovině Oxy, v níž budeme popisovat polohu bodu X_p; získáme souřadnice x, y.



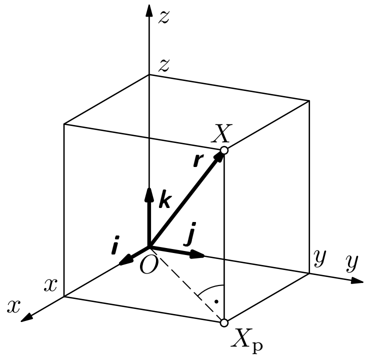
Obr. 12 Zavedení kartézské soustavy souřadnic

Celkově tedy máme pro polohu bodu X čtyři souřadnice x, y, z; t.

Obdobně jako v rovině zavedeme v trojrozměrném prostoru tři jednotkové vektory $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ a polohový vektor $\boldsymbol{r}$ (platí $|OX| = |\boldsymbol{r}|$). Dle obr. 13 zapíšeme

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k},$$

$$|OX| = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



Obr. 13 Kartézská soustava souřadnic

Analogicky jako v dvojrozměrném prostoru můžeme pro vzdálenost dvou bodů $A[a_1, a_2, a_3]$ a $B[b_1, b_2, b_3]$ v trojrozměrném prostoru psát (užitím vlastností kartézské soustavy souřadnic)

$$|AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Při popisu pohybu potom zjišťujeme, zda při časové proměně Δt došlo či nedošlo ke změně alespoň jedné ze tří souřadnic polohy.

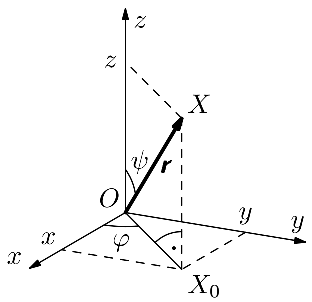
1.5 Doplněk 1 – sférické souřadnice

Označme úhel, který svírá polohový vektor s osou z jako úhel ψ, úhel průmětu do roviny Oxy s osou x jako φ. Potom můžeme psát

$$z = |XX_0| = r \cdot \cos\psi; \quad |OX_0| = r \cdot \sin\psi,$$

$$x = r \cdot \sin\psi \cdot \cos\varphi,$$

$$y = r \cdot \sin\psi \cdot \sin\varphi.$$



Obr. 14 Sférické souřadnice

Jak poznáme později při analytické geometrii, můžeme určit

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \sin^2\psi \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\psi \sin^2\varphi + r^2 \sin^2\psi = \\ &= r^2 \sin^2\psi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2 \cos^2\psi = \\ &= r^2 \sin^2\psi + r^2 \cos^2\psi = r^2, \end{aligned}$$

neboť $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ (což plyne z Pythagorovy věty).

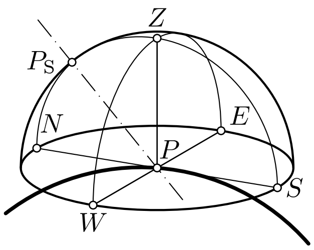
Vidíme, že pro bod X lze použít dvou možností zápisu polohy bodu X v soustavě souřadnic

$$(x, y, z; t) \text{ nebo } (r, \varphi, \psi; t).$$

Obě možnosti jsou ekvivalentní, protože můžeme ze znalosti souřadnic r, φ, ψ určit souřadnice x, y, z a naopak. Souřadnice x, y, z nazýváme *kartézské*. Souřadnice r, φ, ψ popisují bod na povrchu koule vzhledem k soustavě spojené se středem koule a nazýváme je *sférické*.

S použitím sférických souřadnic souvisí dvě praktické aplikace. Při pozorování oblohy pozorovatel na povrchu Země může popsat objekty na obloze pomocí několika měřitelných údajů. Nutno poznamenat, že astronomové dnes sice umějí docela dobře zjistit vzdálenost řady objektů na obloze, ale v minulosti měli tyto možnosti značně omezené, umisťovali všude nebeská tělesa na tzv. *nebeskou sféru*, která byla dostatečně daleko a pnula se nad místem pozorovatele, který stál ve středu této nebeské sféry. Nebeská sféra se otáčela kolem osy rotace, která spojovala tzv. *světový pól* s místem pozorovatele. Pozorovatel vycházel z úvahy, že vodorovná rovina omezuje nebeskou sféru kružnicí, jež se nazývá *matematický horizont* (tzv. *skutečný horizont* je čára na obvodu, která bere v úvahu reálné vzdálené předměty krajiny).

Svislice protíná nebeskou sféru v bodě Z (zenit = nadhlavník), svislá rovina obsahující body P, Z, P_S protíná matematický horizont v bodech N (severní bod obzoru), S (jižní bod obzoru) a pomocí průchodu Slunce touto rovinou určujeme tzv. *místní poledne*, na jehož základě definujeme tzv. *místní čas* v daném místě. Svislá rovina kolmá k této rovině protíná matematický horizont v bodech E (východní bod obzoru) a W (západní bod obzoru).



Obr. 15 Matematický horizont

Každý objekt na nebeské sféře je v daný okamžik charakterizován dvěma údaji, které pochopíme, budeme-li se dívat na oblohu starým námořním dalekohledem, upevněným otáčivě ve stojanu. Nejprve zaměříme dalekohled na severní bod obzoru a směrem pohybu hodinových ručiček otáčíme dalekohledem kolem svislé osy tak dlouho, až „trefíme směr na příslušný objekt“; tento úhel označíme A (azimut). Potom budeme osu dalekohledu zvedat směrem vzhůru, až se osový kříž dalekohledu dotkne objektu; úhel směru osy s vodorovnou rovinou označíme h (výška). Víme, že $0° \leq A \leq 360°$, $0° \leq h \leq 90°$ (pro zenit). Kvůli obecnosti musíme zvážit, že protipól zenitu je bod N (nadir, podnožník – ne podhlavník), jemuž odpovídá $h = -90°$. Výška objektu na nebeské sféře může dosahovat hodnot $-90° \leq h \leq 90°$.

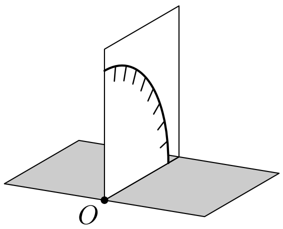
Protože nebeská sféra rotuje kolem světové osy $P_S P$, mění se průběžně s časem obě souřadnice A, h, a tak astronomové po nějaké době soustavu obzorníkových souřadnic opustili: zajímavé je, že pro dvě tzv. *stálice* se sice souřadnice A_1, A_2, h_1, h_2 mění, ale jejich rozdíly ΔA, Δh zůstávají stálé. Vybereme-li si vhodný referenční bod na obloze, hodí se pro rychlou orientaci.

Příklad 4 – Polárka

Odhadněte úhlovou výšku Polárky nad obzorem.

Řešení

Vezmeme papír a pomocí úhloměru označíme úhly po 5°. Papír přiložíme kolmo na vodorovnou desku (obr. 16) a hledíme přes papír směrem k Polárce. Přiložíme oko k místu O a špendlíkem propíchneme papír tak, že je přesně mezi okem a Polárkou. Přečteme údaj (asi 50°).



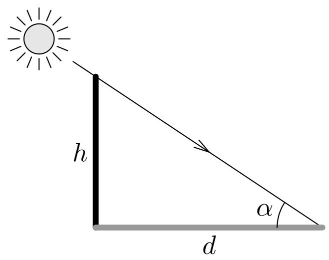
Obr. 16 Princip sextantu

Úloha 5 – úhlová výška Slunce

Zjistěte úhlovou výšku Slunce nad obzorem přesně v poledne (v letním období to bude asi ve 13 hodin). Využijte k tomu délku d stínu svislé tyče o délce h (obr. 17) a vztahu

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{d}.$$

Do Slunce se nedívejte!



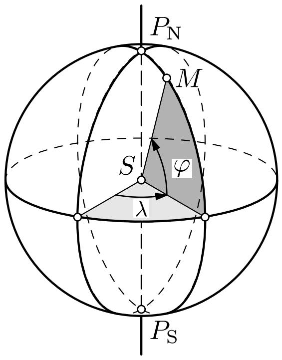
Obr. 17 Úhlová výška Slunce

1.6 Zeměpisné souřadnice

V hodinách zeměpisu se dozvídáme, že každému místu na povrchu Země odpovídají určité zeměpisné souřadnice. Jsou jimi *zeměpisná šířka* φ (dosahující $0° \leq \varphi \leq 90°$ s.š., $0° \leq \varphi \leq 90°$ j.š.), *zeměpisná délka* λ (dosahující $0° \leq \lambda \leq 180°$ v.d., $0° \leq \lambda \leq 180°$ z.d.) a samozřejmě tzv. *nadmořská výška* (k níž zvolíme jakousi základní (nulovou) referenční výšku a objekty nad touto úrovní mají $h > 0$ – Mont Blanc 4 807 m, objekty pod touto úrovní mají $h < 0$ – Mrtvé moře -412 m).

Podívejme se na zeměpisné souřadnice z pohledu fyzikálního. Tvar Země zjednodušíme na ideální kouli, a potom se pokusíme vysvětlit vztah zeměpisných a sférických souřadnic.

Země má osu rotace, která protíná povrch Země v bodech P_{N} (severní zeměpisný pól) a P_{S} (jižní zeměpisný pól), a prochází středem Země (obr. 18). Roviny kolmé k této ose vymezují na povrchu Země kružnice, které se nazývají *rovnoběžky*, o různých poloměrech. Poloroviny obsahující osu rotace a dané místo M protínají povrch Země v půlkružnicích, které nazýváme *poledníky* (meridiány). Ve všech místech jednoho poledníku dochází ve stejném okamžiku k horní kulminaci Slunce (tj. nastává poledne).



Obr. 18 Zeměpisné souřadnice

Poledník, procházející známou hvězdárnou v Greenwich v Londýně, označíme jako nulový. Úhel λ, který svírá rovina místního poledníku bodu M s rovinou poledníku Greenwichského, nazýváme zeměpisná délka. Ta dosahuje $0°$ až

180° v.d. směrem na východ, matematicky $\langle 0^\circ; 180^\circ \rangle$ a 0° až 180° z.d. směrem na západ, matematicky $\langle -180^\circ; 0^\circ \rangle$.

Úhel, který svírá spojnice MS daného místa se středem ideální koule s rovinou rovníku, se nazývá zeměpisná šířka φ a dosahuje 0° až 90° s.š., matematicky $\langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$ na severní polokouli a 0° až 90° j.š., matematicky $\langle -90^\circ; 0^\circ \rangle$ na jižní polokouli. V daný okamžik má tedy každý objekt jednu uspořádanou dvojici $(\lambda; \varphi)$. Problém je v tom, že kromě malých člunů na oceánech (ale i tam to nebude platit přesně), má určité místo ještě tzv. *nadmořskou výšku h*.

V souvislosti s pohybem objektů po povrchu Země se mohou souřadnice polohy měnit s časem a k jednoznačnému vyjádření se musíme vyjadřovat časoprostorově.

Změny polohových souřadnic nacházíme jednak na mapách, v moderní době nám je také udávají velmi přesně metody užívající měření GPS.

Příklad 5 – zeměpisná poloha

Podle údajů ze zeměpisného atlasu určete nejsevernější, nejjižnější, nejzápadnější a nejvýchodnější bod kontinentu Afrika.

Řešení

Dle atlasu je nejsevernější místo Binzart (Bizerta) – 10° v.d., 39° s.š., nejjižnější místo Cape Agulhas (Střelkový mys) – 20° v.d., 35° j.š., nejzápadnější místo Cap Vert u Dakaru – 17° z.d., 15° s.š., nejvýchodnější místo Tooxin – 52° v.d., 12° s.š..

Poznámka

V zeměpisné literatuře se uvádí, že nejsevernější bod je mys Rás Ben Sekka (Tunisko) – $37^\circ\ 21'$ s.š., nejjižnější bod je mys Cape Agulhas (JAR) – $34^\circ\ 52'$ j.š., nejzápadnější bod je mys Pointe des Almadies – 17° 38 z.d. a nejvýchodnější místo je mys Rás Hafun – $51^\circ\ 23'$ v.d..

Úloha 6 – zeměpisná poloha – Internet

Ověřte výsledky příkladu 5 pomocí Internetu na *www.googleearth.com*. Jak se výsledky liší?

Příklad 6 – vzdálenost na mapě

Zjistěte, jak daleko jsou letošní olympijské hry v Pekingu (Beijing) od místa jejich zrodu v Athénách. V atlasu zjistíte, že se zeměpisná šířka obou míst příliš neliší (Athény $\varphi_\mathrm{A} = 38^\circ$ s.š., Beijing $\varphi_\mathrm{B} = 40^\circ$ s.š.). Měření v atlasu proveďte na rovnoběžce 39°, porovnejte výsledky měření vzdálenosti v atlasu s výsledky měření pomocí glóbusu.

Řešení

Měřením ve školním zeměpisném atlasu vychází vzdálenost asi 7 800 km, měřením pomocí glóbusu vychází vzdálenost asi 7 900 km.

Úloha 7 – vzdálenost – Internet

Pokuste se ověřit výsledek příkladu 7 měřením na *www.googleearth.com*. Pokuste se o zdůvodnění případných rozdílů.

1.7 Jak čas závisí na poloze objektu?

Naše Země rotuje kolem své osy s dobou rotace 23 h 56 min 04 s, tj. 86 164 s. Od starověku víme, že tzv. *střední sluneční den*, tj. střední časový interval mezi dvěma po sobě následujícími horními kulminacemi Slunce je však roven 1 den = 24 h = 86 400 s.

Budeme-li se pohybovat po 50. rovnoběžce, zjistíme, že doba kulminace Slunce (pravé poledne), se bude časově posunovat – za dobu 24 h se Země otočí cca o 360°, což činí úhlovou rychlost 15°/h. Místa, jejichž zeměpisná délka se liší o 15°, si mohou volit čas rozdílný o 1 h. Tak vznikla myšlenka tzv. *pásmového času*. Za základ byl v r. 1884 doporučen čas na nultém – Greenwichském poledníku (tzv. *světový čas* - Universal Time UT nebo Greenwich Mean Time – GMT), zvaný někdy World Time WT.

Časová pásma pak využívají převážně časové údaje podle středního poledníku (0° v.d., 15° v.d., 30° v.d.). Z praktického důvodu však nesledují jen zeměpisnou délku, ale i hranice států nebo oblastí (např. v Austrálii se užívají tato časová pásma: Western Australia GT+8 h (113° – 129° v.d.), South Australia GT+9 h 30 min (129° – 141° v.d.), New South Wales GT+10 h (141° – – 154°).

Měli bychom si zjistit, zda v daných místech neplatí sezónní změna času (letní či zimní čas).

Poznámka:

Málokdo již dnes ví, že v minulosti byl nultý poledník posunut na západ tak, že procházel zvoleným místem na ostrově Ferro (Kanárské ostrovy, dnes Hierros), ale tento údaj najdete ještě na velmi starých mapách z konce 19. století.

Příklad 7 – časová pásma

Stanovte, jak se liší časové údaje v Praze a v Sydney či v San Francisku.

Řešení
Praha leží na $14°20'$ v.d. a v zimě v ní platí tzv. *středoevropský čas* GT + 1 h, Sydney na 151° a platí tzv. *východoaustralský čas* GT + 10 h, San Francisco na 122° z.d. a platí tzv. *pacifický čas* GT - 8 h. Podle zeměpisných údajů je rozdíl zeměpisných délek mezi Prahou a Sydney 137°, tj. časový rozdíl 9 h, pro San Francisco je rozdíl 137°, tj. časový rozdíl 9 h. Tyto údaje odpovídají. Pozor musíme dát při zavádění letního dekretového času.

Úloha 8 – pásmový čas

Na *www.wikipedia.com* si najděte heslo Pásmový čas (zone time) a prostudujte ho. Udělejte si přehled o změnách pásmového času. Jak můžete „předběhnout" čas?

Úloha 9 – let letadlem

Přesně ve 12:00 h vyletíte letadlem o průměrné rychlosti $900\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ z města Oslo do St Peterburgu. Zpět letí letadlo ze St Peterburgu v 19:00 h. Kdy doletíte do St Peterburgu a kdy zpět do Osla?

Příklad 8 – rychlost člunu

Chmurné futuristické předpovědi naznačují, že koncem léta 2015 by mohlo být kolem severního pólu volné moře. Přesně na místě 0° v.d. a 89° s.š. se nachází člun s výzkumníky, kteří chtějí ověřit, že tento den lze „zastavit čas", tj. dosáhnout toho, že se mohou pohybovat stejnou relativní rychlostí jako Slunce (a bude tedy stále 12:00 h). Jakou rychlost musejí vyvinout?

Řešení
Do severního pólu zbývá 1°, tj. 111 km, obvod kružnice, sledující 89. rovnoběžku, činí 697 km, což znamená získat rychlost $29\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 15{,}7$ uzlu. Toho lze motorovým člunem dosáhnout. Zbývá vyřešit problém s tzv. *datováním*. „Čas se zastaví", ale na datové čáře je nutno přičíst celý den. Toho tedy dosáhnout nelze.

Úloha 10 – vzdálenosti

Co je dál? Beijing od Athén nebo Kapské město od Stockholmu? Údaje o poloze si najděte v atlase nebo na *www.googleearth.com*. Jak je to s časovým rozdílem?

1.8 Doplněk 2 – o mapách...

V našem textu jsme se zatím zabývali určováním vzdáleností použitím map. Přesnost určení vzdálenosti tímto způsobem je však ovlivněna mapou, kterou k tomu použijeme, což je mj. také dáno tím, jakým způsobem je mapa vytvořena. Základním problémem, který je nutno při tvorbě mapy vyřešit, je promítnutí polohy bodu na zemském povrchu do roviny mapy. Než se začnou promítat polohy jednotlivých bodů na zemském povrchu, je třeba vytvořit tzv. *referenční plochu*. Členitý zemský povrch se proto nejprve nahrazuje tzv. *nulovou hladinovou plochou*. Nulové hladinové plochy jsou uzavřené plochy, které jsou v každém bodě kolmé k tíhové síle. Tyto nulové plochy pak vytvářejí základní plochu zemského tělesa, které se nazývá *geoid*. Jelikož geoid je pro svůj složitý tvar nevhodný k dalšímu matematickému zpracování, nahrazuje se *rotačním elipsoidem*, a protože tento zemský elipsoid má jen malé zploštění, nahrazuje se v mnoha případech koulí.

Přesně znázornit povrch výše popsaných ploch do roviny není možné, a proto se v praxi používají různé typy projekcí s ohledem na požadavky, které na mapy klademe. Pokud bychom chtěli zobrazit „malé území“, což je např. území naší republiky, použijeme *konformní zobrazení* [1] (nezkresluje úhly, přesné znázornění vzdáleností a ploch). Toto zobrazení se však nehodí pro mapy světa, to pak nežádoucím způsobem ovlivňuje přesnost určování velkých vzdáleností na mapě. Zabývat se tím však dále nebudeme (překročilo by to rozsah tohoto textu), ale přesto je nutné brát tuto skutečnost v úvahu.

Často se ukazuje jako vhodnější použít v této situaci glóbus, ale i ten má své přednosti i nedostatky. Mezi velké výhody patří např. vytvoření názorného geometrického modelu krajiny, lepší možnost měření velkých vzdáleností než na rovinné mapě. Budeme-li však mít pouze plošný glóbus, pak nastává situace, že se liší velikosti vrstevnic na glóbusu od velikostí vrstevnic na rovinné mapě, což je způsobeno odlišným způsobem promítání vrstevnic na rovinnou mapu a glóbus (tento problém je podrobněji rozebrán např. v [1]). V tomto případě je nutno použít rovinnou mapu. Při měření velkých vzdáleností dnes je velkým pomocníkem Internet, jak bylo již dříve uvedeno. Stačí otevřít prohlížeč *googleearth.com*, zadat do patřičných míst požadované údaje, počítač pak vše vyhodnotí a vypíše výsledek.

Prohlížeč *googleearth.com* poskytuje velmi kvalitní informace díky tomu, že na povrchem Země krouží ve výšce 681 km družice *GeoEye 1* a obletí Zemi dvanáctkrát za den. Bližší údaje o této družici je možno nalézt na Internetu, např. na stránkách *http://www.zive.cz/Clanky/ Google-nabidne-nejpodrobnejsi -satelitni-snimky-sveta/sc-3-a-143398/default.aspx*.

[1] Podrobně je možno nalézt např. v publikaci: [1] NOVÁK, V.; MURDYCH, Z. *Kartografie a topografie.* Praha: SPN, 1988.

Některé služby prohlížeče *googleearth.com* se však neobejdou bez použití *GPS*, čímž se budeme zabývat v následujícím doplňku 3.

1.9 Doplněk 3 – GPS

Na závěr této kapitoly si ještě něco řekneme o měření polohy a její změny dnes, neboli o **G**lobálním **P**olohovém **S**ystému (GPS).

GPS vyvinulo Ministerstvo obrany USA. Toto zařízení bylo původně vyvinuto pro vojenské účely. První družice systému GPS byla vypuštěna v roce 1978, avšak plně funkční se systém stal v roce 1995.

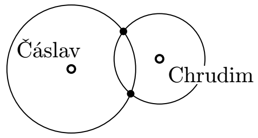
GPS se skládá ze 24 družic, kroužících okolo Země ve výšce asi 18 tisíc kilometrů. Tyto družice vysílají signály, které jsou zachyceny přijímači GPS, ten je pak využívá ke zjištění své polohy na Zemi. Poloha na Zemi je po zpracování dat uvedena pomocí zeměpisné délky, šířky a výšky nad povrchem Země.

Princip práce GPS

Jak již bylo dříve uvedeno, přijímač GPS vypočítává svou přesnou polohu pomocí měření z družicových rádiových signálů, které pak dále zpracovává.

Systém pracuje na geometrickém principu, který si nejprve popíšeme na příkladu v rovině, pak přejdeme do prostoru.

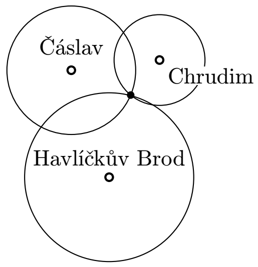
Představte si, že se nacházíte na nějakém vám neznámém místě. Potkáte člověka a zeptáte se ho, kde se nacházíte. On vám odpoví, že někde ve vzdálenosti 20 km od Čáslavi. Tato informace není příliš dostačující, protože geometricky to znamená, že jste někde na kružnici, jejíž střed je v Čáslavi a poloměr této kružnice je 20 km. Zeptáte-li se znovu na totéž dalšího člověka a ten vám odpoví obdobně, že jste ve vzdálenosti 14 km od Chrudimi, můžete již na základě těchto informací nakreslit dvě kružnice, které se protnou ve dvou bodech (obr. 38).



Obr. 38 Dvě kružnice

Nyní už víme, že přicházejí v úvahu dvě místa, kde bychom se mohli nacházet. Abychom zjistili, které z těch dvou míst to je, potřebujeme ještě třetí informaci. Když se objevil další člověk, odpověděl na otázku o naší poloze, že se nacházíme 27 km od Havlíčkova Brodu.

Sestrojíme tedy ještě třetí kružnici, a ta nám již poskytne přesnou informaci o naší poloze (obr. 39). Díky postupu tří kružnic zjistíme, že se nacházíme v blízkosti Sečské přehrady.



Obr. 39 Tři kružnice

Na stejném principu pracuje GPS. V tomto případě, protože jsme v prostoru, však místo tří kružnic budeme potřebovat čtyři kulové plochy, jejichž středy se budou nacházet na čtyřech nezávislých družicích. Pak bude ještě třeba zjistit poloměry těchto kulových ploch. Tedy přijímač GPS musí zjistit pomocí signálů a družic systému GPS svou přesnou vzdálenost od každé ze čtyř družic.

Jestliže přijímač GPS obdrží signály od čtyř družic, je schopen určit svou polohu v prostoru. Na základě údajů o Zemi pak přijímač vypíše na displeji zeměpisnou délku, šířku a výšku nad povrchem Země.

Tím, že si přijímač GPS naměřené údaje uchovává, může vypočítat také aktuální (okamžitou) rychlost, průměrnou rychlost a uraženou vzdálenost.

Z našich úvah dále vyplývá, že k tomu, aby přijímač GPS určil polohu objektu, potřebuje dva údaje: polohu nejméně čtyř družic systému GPS a vzdálenost mezi objektem a každou z těchto družic.

Zjištění polohy družic se opírá o skutečnost, že se pohybují asi 18 tisíc kilometrů nad povrchem Země (dále také uvažujeme, že atmosféra v této výšce nemá vliv). Pak je možno vzdálenost poměrně snadno odhadnout, protože přijímač má v paměti informace o pohybu všech družic v kterémkoli časovém okamžiku. Určitý problém zde ale přece jen nastává: gravitační působení Slunce a Měsíce v malé míře trajektorie pohybu družic ovlivňuje. Z tohoto důvodu Ministerstvo obrany USA sleduje přesun poloh družic a vysílá případné opravy do všech přijímačů GPS (jako součást signálu vysílaného družicí).

Při měření vzdálenosti se systém opírá o vztah $s = vt$, kde v je rychlost šíření rádiových vln, t je doba šíření vln z družice do přijímače. Zde ale nastává další problém, že rádiové vlny se sice ve vakuu šíří rychlostí světla c, ale atmosféra tento pohyb zpomaluje. Přijímač GPS odhaduje skutečnou rychlost signálu pomocí složitých matematických modelů zahrnujících v sobě i celou řadu atmosférických podmínek. Jako součást svého rádiového signálu vysílají družice i informace o počasí.

Kromě měření rychlosti je však třeba také změřit čas. K tomu je třeba, aby vysílač a přijímač měly synchronizované a přesné hodiny. Každá družice také k času přidává svůj kód, podle kterého přijímač rozpoznává signály jednotlivých družic.

Poznámka

Ve skutečnosti je to se synchronizací tak, že družice mají nejpřesnější atomové hodiny, zatímco přijímač GPS méně finančně nákladné hodiny křemíkové (z důvodů přijatelné ceny GPS přijímače). Přesnosti atomových hodin pak přijímač dosahuje tak, že měří chybu svého systému a podle ní upravuje výpočty.

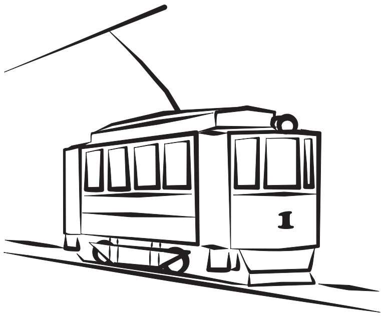
Na závěr je tedy možno říci, že přijímač GPS při své práci provádí značné množství výpočtů (výpočet přesné polohy každé družice, doba než signál dorazí z družice do přijímače, zjišťování chyby svých vnitřních hodin). Většina přijímačů pak kombinuje tyto údaje ještě např. s mapami, což značně usnadňuje jejich používání.

GPS přijímačů dnes existuje celá řada majících různou úroveň provedení a tomu odpovídajích cenových relacích. S ohledem na tuto skutečnost existují u některých přijímačů určitá rychlostní a teplotní omezení, která je třeba dodržovat, aby přijímač GPS správně fungoval ve vymezených podmínkách (*http://www.howstuffworks.com*).

2 Změny polohy a čas

Je zajímavé, že v praktickém životě se málokdy nastupuje do rozjetého dopravního prostředku nebo naopak se z jedoucího vozidla málokdy vystupuje.

Ve starých pražských tramvajích, které neměly dveře a nastupovalo se do otevřeného prostoru, to bylo dokonce přísně zakázáno a za tento přestupek byla udělována pokuta.



Obr. 19 Stará tramvaj

Na rozdíl od reality se žáci ve škole učí zvlášť o pohybu rovnoměrném přímočarém jako nejjednodušším modelu pohybu, ale s tímto pohybem se v dopravě setkáváme málokdy.

2.1 Průměrná rychlost

V některých případech je pro naše odhady důležité nebo výhodné zjednodušit pohyb tělesa natolik, že nás období rozjíždění z klidu a získávání určité rychlosti, popř. brzdění, změny rychlosti v důsledku toho, že je naší povinností přizpůsobit jízdu vozovce a dopravním podmínkám, zase tolik nezajímají. V těchto případech je důležité znát, jakou dráhu s těleso urazilo a jaký čas uplynul. Podíl těchto údajů $v_\mathrm{p} = \dfrac{s}{t}$ se nazývá *průměrná rychlost*. Z praxe víme, že např. při jízdě po dálnici se skutečná rychlost té průměrné může blížit, avšak pro případ jízdy členitým terénem vozidlo většinou této rychlosti nedosahuje.

Zapamatujme si základní poučku: *průměrnou rychlost tělesa vypočítáme, jestliže celkovou dráhu, kterou těleso urazilo, dělíme celkovou dobou, kterou na to spotřebovalo.*

Příklad 9 – let letadlem

Letecký speciál letí bez mezipřistání z Prahy do kanadského Vancouveru tak, že v podstatě sleduje 50. rovnoběžku. Celá trasa bez startovního a přistávacího manévru trvá necelých 10,5 h. Určete průměrnou rychlost letadla. Dále vyvstal dotaz, zda by nebylo ekonomičtější letět přes severní pól. Jak dlouho by trvala trasa při dosažení stejné průměrné rychlosti?

Řešení

Orientační údaje o poloze: Praha 50° s.š., 14,5° v.d., Vancouver 49° s.š., 123° z.d..

Úlohu budeme řešit vzhledem k rovnoběžce 49,5°. Délka rovnoběžky ($R = 6\,371$ km) je $l = 2\pi R \cos\varphi = 26\,000$ km, na 1° připadá 72,2 km, rozdíl zeměpisných délek je 137,5°, tj. 9 930 km. Průměrná rychlost $v_\mathrm{p} = 945\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$.

Trasa přes severní pól: délka poledníků je $l_{180} = 20\,002$ km, na 1° připadá 111 km, z Prahy na severní pól je to 40°, z pólu do Vancouveru 41°, tedy je to celkem 81°, tj. trasa 9 000 km. Časově je při stejné průměrné rychlosti doba letu 9 h 30 min.

Optimální trasa by měla být vedena po tzv. *loxodromě*, tj. kružnici o stejném poloměru jako je poloměr kulové Země, avšak v rovině, která obsahuje střed Země a obě zvolená místa.

Poznámka:

Tento výpočet je však jen přibližný, pokud bychom chtěli počítat přesněji, je třeba uvažovat s tím, že letadlo letí ve výšce 10 km nad mořem a provést příslušné přepočty údajů – proveďte sami.

Příklad 10 – cestování vlakem

Podle Internetového vyhledávače spojení lze cestu ze Stockholmu do Prahy vlakem absolvovat tak, že se nejprve vydáme ve 23:06 h do Hässleholmu, kam vlak NZ 1 dorazí ve 4:45 h po absolvování 508 km. V 5:42 h přesedneme do osobního vlaku Os 1019 a po 117 km dorazíme do Koebenhavnu, kde v 7:42 h přesedneme do expresu ICE 38 a po ujetí 662 km dorazíme ve 14:27 h do Berlína. V Berlíně přesedneme ve 14:35 h do expresu EC 379 Carl Maria von Weber, který nás doveze po ujetí 394 km v 19:18 h do stanice Praha – Holešovice. Určete průměrnou rychlost v jednotlivých úsecích i na celé trase.

Řešení

Stockholm – Hässleholm: $s_1 = 508$ km, $t_1 = 5$ h 39 min, $v_{\mathrm{p}1} = \dfrac{508\ \mathrm{km}}{5{,}65\ \mathrm{h}} =$ $= 90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Hässleholm – Koebenhavn: $s_2 = 117$ km, $t_2 = 2$ h, $v_{\mathrm{p}2} = 58{,}5\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Koebenhavn – Berlín: $s_3 = 662$ km, $t_3 = 6{,}75$ h, $v_{\mathrm{p}3} = 98\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Berlín – Praha: $s_4 = 394$ km, $t_4 = 4{,}72$ h, $v_{\mathrm{p}4} = 83{,}5\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Celkově $v_{\mathrm{p}} = \dfrac{1\,681\ \mathrm{km}}{20{,}2\ \mathrm{h}} = 83{,}2\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Úloha 11 – průměrná rychlost 1

Na trati Paříž- Lyon – Marseille jezdí rychlovlaky TGV; jeden z nich opouští Pařížské Lyonské nádraží v 6:16 h a v Marseille po ujetí trasy 499 km je v 9:33 h. Určete jeho průměrnou rychlost.

Úloha 12 – průměrná rychlost 2

Nejrychlejší expres na trati Moskva – St Peterburg urazí trať o délce 639 km za dobu 4:30 h. Jaká je jeho průměrná rychlost?

Úloha 13 – průměrná rychlost 3

Cyklista jel po trase 72 km tak, že cestu tam urazil za dobu 2 h 12 min, zpáteční absolvoval 60 km rychlostí 45 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a zbytek musel jít pěšky za 1,5 h. Určete

a) průměrnou rychlost v jednotlivých úsecích,
b) dobu pohybu,
c) průměrnou rychlost na celé trase.

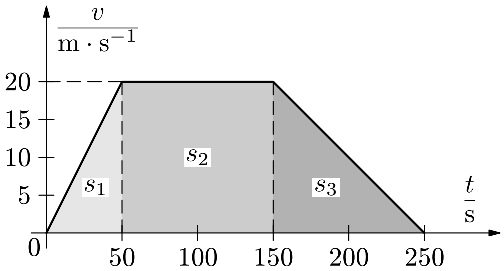
2.2 Jednoduchý model jednorozměrného pohybu

Při jízdě vlakem metra nebo jiného elektrovlaku se bude tento dopravní prostředek pohybovat takto: nejprve se po dobu 50 s rozjíždí, až dosáhne rychlosti 72 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, poté se 100 s pohybuje touto rychlostí a následujících 100 s brzdí, až zastaví v následující stanici. Pro lepší pochopení našich úvah si zakreslíme graf $v(t)$; tj. znázorníme, jak se mění rychlost v závislosti na čase. Proto ještě budeme předpokládat, že zvyšování i snižování rychlosti nastává lineárně se změnami času. V době od 50. do 150. sekundy se vozidlo pohybuje rovnoměrně a urazí dráhu $s_2 = v_0 t_2 = 2\,000$ m. Můžeme tedy pozorovat, že v grafu $v(t)$ (obr. 20) je dráha prezentována obsahem obdélníka s_2. Pro

úsek zrychlení $s_1 = \frac{1}{2}v_0t_1 = 500$ m (obsah trojúhelníku s_1), pro úsek zpomalení je $s_3 = \frac{1}{2}v_0t_3 = 1\,000$ m. Celková dráha, kterou elektrovlak urazil, je $s = s_1 + s_2 + s_3 = 3\,500$ m, a to za dobu $t = 250$ s.
Průměrná rychlost

$$v_\mathrm{p} = 14\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 50{,}4\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$

Při výpočtu průměrné rychlosti tedy můžeme říci, že lichoběžník z obr. 20 nahrazujeme obdélníkem (jehož jedna strana vyjadřuje čas) o stejně velkém plošném obsahu (tj. druhá strana obdélníku představuje průměrnou rychlost v_p).



Obr. 20 Pohyb vlaku metra

Příklad 11 – jízda metrem

Vlak metra (nebo jiný elektrovlak) zdolává trasu mezi dvěma stanicemi o vzdálenosti 1 800 m tak, že dosáhne největší rychlosti 54 km · h^{-1} a hned brzdí po stejné trase jako se rozjíždí. Jak dlouho trvá jízda mezi stanicemi a jaká je jeho průměrná rychlost?

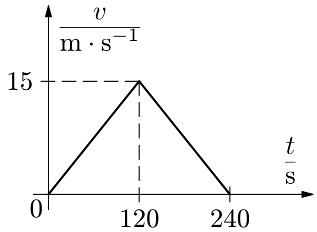
Řešení

Pro rozjíždění platí $s_1 = \frac{1}{2}v_0t_1$, z čehož

$$t_1 = \frac{2s_1}{v_0} = 120\ \mathrm{s}.$$

Analogicky bychom určili dobu zpomalování $t_2 = t_1 = 120$ s. Pro celkovou dobu pohybu t pak platí $t = t_1 + t_2 = 240$ s.
Průměrná rychlost pohybu je pak dána vztahem

$$v_\mathrm{p} = \frac{1\,800\ \mathrm{m}}{240\ \mathrm{s}} = 7{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 27\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}.$$



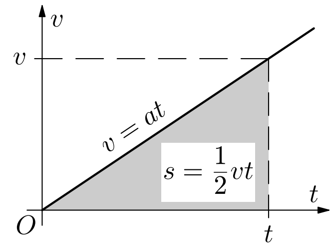
Obr. 21 Jízda metra mezi dvěma stanicemi

Vidíme, že v první části pohybu – při zrychlování – je rychlost lineární funkcí času (stručněji: rychlost vzrůstá rovnoměrně s časem), tedy $v \sim t$, což s použitím konstanty a zapíšeme $v = a \cdot t$, kde $a = \frac{v}{t}$ je tzv. *zrychlení pohybu* (akcelerace). Po dosažení největší rychlosti v_k se rychlost naopak zmenšuje lineárně s časem, tj. $v = v_\mathrm{k} - at$.

Pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí (obr. 21) tedy platí $v = at$,

$$s = \frac{1}{2}vt = \frac{1}{2}at \cdot t = \frac{1}{2}at^2.$$

Jde-li o pohyb, při němž se hmotný bod zrychluje z počáteční nenulové rychlosti v_0 (obr. 23), potom $v = v_0 + at$, a tedy



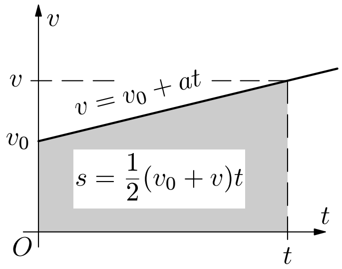
Obr. 22 Rovnoměrně zrychlený pohyb s počáteční rychlostí $v_0 = 0$

$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v)t = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + at)t = v_0t + \frac{1}{2}at^2.$$

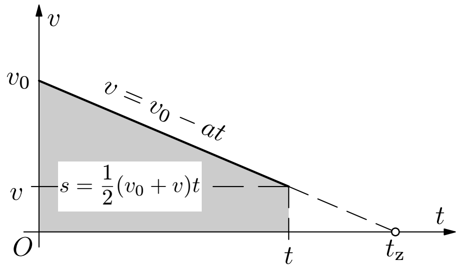
V případě rovnoměrně zpomaleného pohybu s počáteční rychlostí o velikosti v_0 (obr. 24) bude $v = v_0 - at$, a tedy

$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v)t = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 - at)t = v_0t - \frac{1}{2}at^2.$$

Podívejme se na situaci, když těleso zastaví. Ze vztahu $v = v_0 - at$ musí nutně vyjít okamžitá hodnota rychlosti $v = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, tedy $0 = v_0 - at_\mathrm{z}$. Odtud lze určit dobu nutnou k zastavení $t_\mathrm{z} = \dfrac{v_0}{a}$ a dráhu nutnou k tomuto zastavení $s_\mathrm{b} = v_0 \cdot \dfrac{v_0}{a} - \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{v_0^2}{a^2} = \dfrac{v_0^2}{2a}$.



Obr. 23 Rovnoměrně zrychlený pohyb s počáteční rychlostí v_0



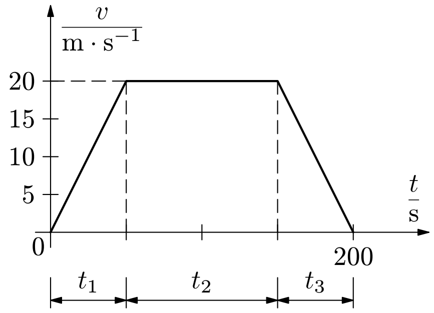
Obr. 24 Rovnoměrně zpomalený pohyb s počáteční rychlostí v_0

Příklad 12 – elektrická vlaková souprava

Elektrická vlaková souprava se rozjíždí i zastavuje na stejně dlouhé trase a od okamžiku, kdy se rozjíždí ze stanice, až do okamžiku zastavení urazí za dobu 3 min 20 s trasu 2,40 km, přičemž dosáhne nejvyšší rychlosti $72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Určete další parametry pohybu vlakové soupravy.

Řešení

Doba pohybu je $t = 200$ s, nejvyšší rychlost je $v_{\mathrm{m}} = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, dráha 2 400 m. Uvažujme nejprve (jako v minulém příkladu), že se vlaková souprava rozjíždí po dobu $t_1 = 100$ s, zastavuje po dobu $t_2 = 100$ s, koncová rychlost při rozjíždění (a počáteční rychlost při zpomalování) je v_{m}, potom dráha rozjíždění



Obr. 25 Pohyb vlaku

$s_1 = \frac{1}{2} v_{\mathrm{m}} t_1 = 1\,000$ m, dráha pro zpomalování $s_2 = 1\,000$ m, tedy celková dráha $s = s_1 + s_2 = 2\,000\ \mathrm{m} < 2\,400\ \mathrm{m}$?

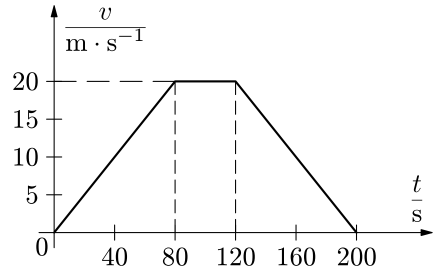
Zkusme naopak určit zrychlení $a_1 = a_2 = \frac{v_{\mathrm{m}}^2}{2s} = \frac{400}{4\,800}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0{,}083\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, potom doba rozjíždění $t_1 = \frac{2s}{v_{\mathrm{m}}} = \frac{4\,800}{20}\ \mathrm{s} = 240\ \mathrm{s} > t$! Musíme tedy vyjít z jiného modelu pohybu elektrické vlakové soupravy, a to dle úvahy na začátku této kapitoly: vlaková souprava se rozjíždí po dobu t_1, urazí dráhu s_1, pak jede rovnoměrným pohybem po dobu t_2 a urazí dráhu s_2; nakonec zpomaluje po dobu $t_3 = t_1$ a urazí dráhu $s_3 = s_1$. Proto platí $t_1 + t_2 + t_3 = 2t_1 + t_2 = t$ a $2s_1 + s_2 = s$. Musíme však psát také $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot v_{\mathrm{m}} t_1 + v_{\mathrm{m}} t_2 = s$.

Protože $t_1 + t_2 = \frac{s}{v_{\mathrm{m}}}$ a současně $2t_1 + t_2 = t$, dostaneme po úpravě $t_1 = t - \frac{s}{v_{\mathrm{m}}} = 200\ \mathrm{s} - \frac{2\,400}{20}\ \mathrm{s} = 80\ \mathrm{s}$.
Odtud $t_3 = t_1 = 80$ s, $t_2 = 40$ s,

$$s_1 = \frac{1}{2} v_{\mathrm{m}} t_1 = 800\ \mathrm{m},$$

$$s_2 = v_{\mathrm{m}} t_2 = 800\ \mathrm{m}.$$

Graf ve správných proporcích je pak znázorněn na obr. 26.



Obr. 26 Pohyb vlaku

Úloha 14 – automobil

Moderní automobily s posilovačem brzd dokážou vyvinout zpomalení $5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ až $7{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Určete, za jak dlouho a na jaké dráze zastaví automobil, jedoucí rychlostí $90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ ($120\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $144\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $180\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$) po dálnici, jestliže reakční doba (doba od zpozorování překážky na silnici po začátek brždění) je 1,2 s. Údaje sestavte do tabulky.

Úloha 15 – letadlo

Velké dopravní letadlo přistává rychlostí asi 240 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Po dobu 5 s po dotyku s ranvejí vyrovnává rovnováhu a potom brzdí tak, že se během 50 s zastaví. Jak dlouhou brzdnou dráhu potřebuje k bezpečnému přistání? Jaké je zpomalení letadla?

2.3 Několik problémů o rychlosti

V této části si shrneme dosavadní probrané poznatky při řešení různých problémů.

Úloha 16 – cyklisté

Mladí cyklisté si vytyčili trasu tak, že 40% trasy jeli po rovině stálou rychlostí 28,8 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, v dalším úseku o délce 40% trasy jeli do mírného kopce rychlostí 18 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a zbytek trasy z mírného kopce až do místa startu rychlostí 45 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Jakou průměrnou rychlostí jeli po celé trase? Potom však změnili směr na opačný, ale jednotlivé rychlosti dosahované na rovině, do kopce a s kopce udržovali stejně velké jako v původním směru. Jak se změnila průměrná rychlost? Jaký byl poměr dob, za něž urazili vytyčenou trasu?

Úloha 17 – nákladní vlak

Nákladní vlak o délce 420 m se rozjížděl z nádraží se zrychlením 0,2 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, až dosáhl rychlosti 54 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, což bylo v okamžiku, kdy lokomotiva vjížděla na most o délce 180 m. Po mostu se vlak pohyboval rovnoměrně. V okamžiku, kdy poslední vagón vlaku opouštěl most, musel strojvůdce začít brzdit a po době 120 s se zastavil v následující stanici. Jak dlouho vlak jel a jakou vzdálenost urazil? Nakreslete graf závislosti změny rychlosti vlaku na čase.

Úloha 18 – puk

Puk se po ledové ploše může pohybovat s mírným zpomalením. Hráč stojí proti hrazení a úderem uvedl puk do pohybu počáteční rychlostí o velikosti 6,0 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ ve vzdálenosti 12,0 m od hrazení. Puk dopadne kolmo na hrazení rychlostí o velikosti 3,6 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ a odrazí se rychlostí o velikosti 3,0 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ zpět směrem k hráči. Kde se puk zastaví? K řešení si nakreslete graf závislosti velikosti rychlosti na čase. Dobu trvání nárazu puku na hrazení zanedbejte.

Úloha 19 – sprinter

Sprinter na krátké tratě (např. 100 m) se při startu z bloků nejprve rovnoměrně zrychleně rozbíhá tak, že za 5,5 s urazí 33 m a po zbývající části trati běží rovnoměrně touto dosaženou rychlostí. Nakreslete graf závislosti velikosti rychlosti na čase a určete, za jak dlouho uběhne dráhu 100 m.

Úloha 20 – sprinter – rekordman

Rekordmani na světovém žebříčku (na 100 m) uběhnou prvních 33 m za 4,8 s. Jakého výsledku dosáhnou, běží-li až do cíle rovnoměrně?

Následující úloha se poněkud liší od úloh předchozích, kdy jsme pohybující se objekty nahrazovali hmotnými body. V případě následující úlohy je již nutné uvažovat s rozměry pohybujících se objektů.

Úloha 21 – trambus

Rozměrný náklad, kterým je převážen stavební jeřáb, má délku 32 m a jede stálou rychlostí 45 km · h^{-1}. Trambus s vlekem o celkové délce 18 m dojíždí tento náklad rychlostí 54 km · h^{-1}. Ve vzdálenosti 24 m za koncem nákladu řidič trambusu zkontroluje, zda je volná trasa, a začne předjíždět. Předjíždění ukončí v okamžiku, kdy zadní část trambusu je ve vzdálenosti 20 m před nákladem. Určete, jak dlouho trvá předjíždění a jaké vzdálenosti obě vozidla urazí.

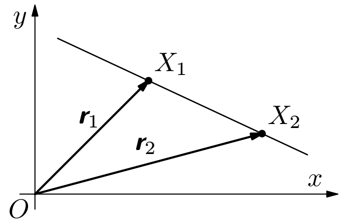
2.4 Rovinný nerovnoměrný pohyb

Ukázali jsme si, že v rovině můžeme okamžitou polohu hmotného bodu poměrně snadno vyjádřit pomocí tzv. *polohového vektoru* $\boldsymbol{r}(t)$, který se může s časem měnit. Vyjádříme-li

$$\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j},$$

potom $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j}$.
Protože změna nastává za dobu Δt, pak

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j}.$$



Obr. 27 Polohový vektor

Jestliže si stanovíme, že $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = v_\mathrm{x}$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = v_\mathrm{y}$, potom

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = v_\mathrm{x}\boldsymbol{i} + v_\mathrm{y}\boldsymbol{j}.$$

Předpokládejme dále, že hmotný bod se pohybuje po přímce X_1X_2. Potom můžeme pomocí $\dfrac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ vymezit pojem rychlosti, a to jak co do velikosti, tak i co do směru, tedy vektor rychlosti

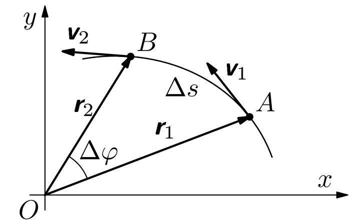
$$\boldsymbol{v} = v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j}.$$

Pokud $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{konst}$, bude se jednat o pohyb rovnoměrný přímočarý.

V případě, že $\boldsymbol{v}_1 \neq \boldsymbol{v}_2$, ale $\boldsymbol{v}_1 \parallel \boldsymbol{v}_2$, půjde o pohyb přímočarý, ale nerovnoměrný.

Pro $|\boldsymbol{v}_2| > |\boldsymbol{v}_1|$ jde o pohyb zrychlený, pro $|\boldsymbol{v}_2| < |\boldsymbol{v}_1|$ o pohyb zpomalený.

Může se stát, že $|\boldsymbol{v}_1| = |\boldsymbol{v}_2|$, ale během doby Δt se změní směr rychlosti – půjde o pohyb rovnoměrný, ale křivočarý (nejjednodušší bude pohyb po kružnici).



Obr. 28 Rychlost

Obecně můžeme napsat $\dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \dfrac{\Delta v_y}{\Delta t}\boldsymbol{j} = a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j}$. Veličině $\boldsymbol{a} = \dfrac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$ říkáme *zrychlení*. Pro velmi krátkou dobu Δt, tedy pro $\Delta t \to 0$ s zavádíme okamžitou rychlost a okamžité zrychlení.

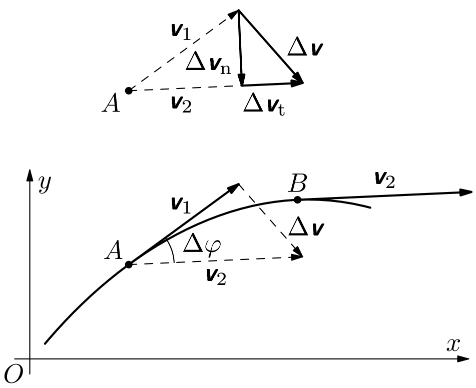
Okamžité zrychlení má tedy dvě složky $\boldsymbol{a}(a_x, a_y)$, které směřují v závislosti na soustavě souřadnic. To však nám nepřináší většinou nové informace.

Někdy je lepší zjistit změnu rychlosti $\Delta \boldsymbol{v}$, *kde* $\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$ (obr. 29) *ve směru tečny k trajektorii v daném bodě a ve směru její normály.* Velikost změny v tečném směru

$$|\Delta \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}_2| - |\boldsymbol{v}_1|,$$

která vypovídá o změně velikosti zrychlení, tzv. *tečné zrychlení* potom má velikost

$$|\boldsymbol{a}_t| = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$



Obr. 29 Změna rychlosti

Další změna je ve směru kolmém ke směru rychlosti (tzv.*normálový směr*), jež vede k tzv. *normálovému* (dostředivému) zrychlení $\boldsymbol{a}_n$. Pro velmi malé $\Delta t \to 0$ můžeme dle obr. 28, 29 psát $\Delta\varphi = \dfrac{\Delta v}{v} = \dfrac{\Delta s}{r}$, z čehož $\Delta v = \dfrac{v}{r}\Delta s$, kde r je *poloměr křivosti* trajektorie v daném bodě (veličina $\dfrac{1}{r}$ se nazývá *křivost*).

Potom
$$a_\mathrm{n} = \frac{\Delta v_\mathrm{n}}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}.$$
Pokud bychom zavedli místo jednotkových vektorů ve směru rovinných souřadnic $\boldsymbol{i}$ a $\boldsymbol{j}$ jiné dva vektory, a to $\boldsymbol{t}^0$ – jednotkový tečný vektor, pak můžeme psát, že $\boldsymbol{a}_\mathrm{t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \boldsymbol{t}^0$, $\boldsymbol{n}^0$ – jednotkový normálový vektor, pak platí, že $\boldsymbol{a}_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} \cdot \boldsymbol{n}^0$. Zrychlení pohybu je potom dáno vztahem
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\mathrm{t} + \boldsymbol{a}_\mathrm{n} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \boldsymbol{t}^0 + \frac{v^2}{r} \cdot \boldsymbol{n}^0.$$
Velikost zrychlení je dána vztahem
$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{r}\right)^2}.$$

Příklad 13 – automobil v zatáčce

Automobil jede v zatáčce o poloměru $r = 50$ m a v průběhu 5 s zvýší svou rychlost z hodnoty $v_0 = 18\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ na $v = 54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Určete zrychlení pohybu a dráhu, kterou při tom automobil urazí.

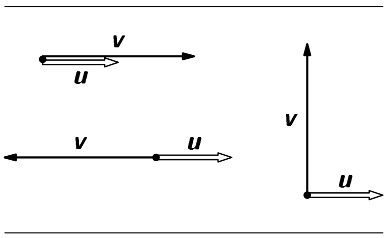
Řešení

Tečné zrychlení má velikost $a_\mathrm{t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10}{5}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Normálové zrychlení na počátku úseku má velikost $a_\mathrm{n0} = \frac{v_0^2}{r} = \frac{5^2}{50}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, normálové zrychlení na konci úseku má velikost $a_\mathrm{n} = \frac{v^2}{r} = \frac{15^2}{50}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} =$ $= 4{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Velikost celkového zrychlení
$$a_0 = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n0}^2} = \sqrt{2^2 + 0{,}5^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 2{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}},$$
$$a = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2} = \sqrt{2^2 + 4{,}5^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 4{,}9\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$
Dráha, kterou při tom automobil urazil, je pak dána vztahem
$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v) \cdot t = 50\ \mathrm{m}.$$

2.5 Skládání pohybů

Pokud jede loďka po klidné vodě po jezeře stálou rychlostí 2,0 m$\cdot$s^{-1}, nemáme potíže při řešení problému, za jak dlouho přepluje vzdálenost 600 m: $t = \frac{s}{v} = 300\ \mathrm{s} = 5\ \mathrm{min}$.

Jestliže se však loďka nachází na hladině vody v řece, jejíž proud teče rychlostí o velikosti $u = 0{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, potom se loďka vzhledem ke břehům pohybuje různou rychlostí v závislosti na směru pohybu loďky vzhledem k proudu řeky (obr. 30).



Obr. 30 Pohyb loďky

Ve všech třech případech dle obr. 30 (tj. pohyb po proudu, proti proudu a kolmo na směr pohybu proudu) dochází ke skládání rychlostí, což můžeme vektorově zapsat ve tvaru

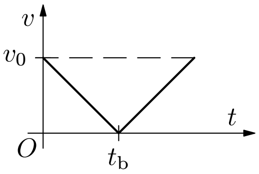
$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{vysl}} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}.$$

Při pohybu loďky rychlostí $\boldsymbol{v}$ po proudu platí pro velikost výsledné rychlosti $|\boldsymbol{v}_{\mathrm{vysl}}| = v+u$, proti proudu $|\boldsymbol{v}_{\mathrm{vysl}}| = v-u$ $(v > u)$ a při pohybu kolmo k proudu $|\boldsymbol{v}_{\mathrm{vysl}}| = \sqrt{v^2+u^2}$.

Toto ovšem není výčet všech možností, které mohou nastat. Loďku lze také nasměrovat šikmo proti proudu tak, aby výsledný pohyb byl kolmý ke břehům řeky; takový pohyb je často optimální (v praxi je proud řeky v různých místech různý a přeplout řeku na správné místo na druhém břehu vyžaduje dobrou navigaci – např. při pohybu na místech, kde nejsou mosty).

Často se také setkáváme se situacemi, kdy jeden pohyb myšlenkově rozložíme na dva jednodušší pohyby, které dokážeme lépe popsat. Příkladem takového pohybu může být vrh svisle vzhůru (v našich úvahách nebudeme uvažovat odpor prostředí). V tomto případě vyhodíme malé těleso svisle vzhůru počáteční rychlostí o velikosti v_0. Těleso však současně také padá směrem dolů rychlostí o velikosti $v_{\mathrm{p}} = gt$.

Potom využijeme „skládání pohybů“: $v = v_0 - gt$, $s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. Rychlost klesá, až se těleso zastaví v největší výšce (za dobu t_{b} od začátku vrhu) a pak začne padat dolů volným pádem. Platí $0 = v_0 - gt_{\mathrm{b}}$, z čehož $t_{\mathrm{b}} = \frac{v_0}{g}$. Potom $h_{\max} = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_0^2}{g^2} = \frac{v_0^2}{2g}$.



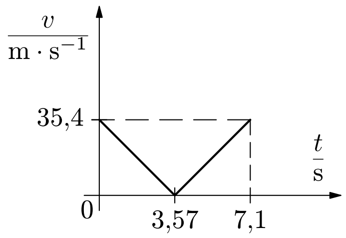
Obr. 31 Rychlost vrhu svisle vzhůru

Příklad 14 – tenisový míček

Tenisový míček po odpálení svislým směrem počáteční rychlostí o velikosti v_0 vystoupil až do výšky 62,5 m. Jakou měl počáteční rychlost? Za jak dlouho dopadl na zem? Odpor prostředí zanedbejte, $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Řešení

Pro pohyb bez odporu prostředí platí $v = v_0 - gt$, $s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$. Počáteční rychlost určíme ze vztahu $h_\mathrm{m} = \frac{v_0^2}{2g}$, z čehož $v_0 = \sqrt{2gh_\mathrm{m}} = 35{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Doba pádu je $t_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2h_\mathrm{m}}{g}} = 3{,}57$ s, celková doba pohybu pak je $T = 7{,}1$ s.



Obr. 32 Rychlost pohybu tenisového míčku

Příklad 15 – hopík

Z balkónu ve třetím patře hodil chlapec míček – hopík směrem dolů počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$. Míček opustil ruku ve výšce 15 m, dopadl na betonovou podložku a odrazil se rychlostí rovnou 0,8 rychlosti dopadu tak, že vyskočil zase do původní výšky, takže ho chlapec chytil do ruky. Určete velikost rychlosti v_0.

Řešení

Úlohu budeme řešit „odzadu“. Po odrazu získal míček rychlost $v_2 = \sqrt{2gh} = 17{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, rychlost dopadu byla $21{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Kdyby padal míček z původní výšky volným pádem, dopadl by na zem rychlostí $v_1 = 17{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Diferencí $(21{,}4 - 17{,}1)\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ je dána velikost počáteční rychlosti v_0.

Úloha 22 – tenisový míček

Při tenisu odpálil hráč míček ve výšce $h = 2{,}4$ m vodorovným směrem a míček dopadl mimo hřiště ve vodorovné vzdálenosti 24,5 m od podávajícího. Jak velká byla počáteční rychlost míčku? Jakou rychlostí dopadl míček na hřiště?

Úloha 23 – loďky 1

Pavel a Hanka si půjčili lodičku k projížďce po řece. Říční proud má rychlost o velikosti $u = 0{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, veslováním dokáže Pavel udržet rychlost o velikosti $v = 0{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ vůči klidné vodní hladině. Jak dlouho a jak daleko po proudu nebo proti proudu může loďka plout, aby se stihli vrátit za 60 minut zpět do přístaviště?

Úloha 24 – loďky 2

Za stejných podmínek jako v úloze 23 se vydal Pavel s Hankou ve směru kolmo k břehům řeky, která má v daném místě šířku 120 m. V kterém místě přistanou? Jak dlouho trvá, než se dostanou přes řeku?

Úloha 25 – pohyb Měsíce

Předpokládejme, že se střed Měsíce pohybuje kolem středu Země stálou rychlostí po kružnici tak, že poloměr trajektorie je 384 400 km a doba oběhu 27,32 dne. Střed Země se pohybuje kolem středu Slunce po trajektorii tvaru téměř kružnice o poloměru $149{,}6 \cdot 10^6$ km za dobu 365,24 dne. Jakou největší a jakou nejmenší rychlostí se pohybuje střed Měsíce vzhledem ke středu Slunce?

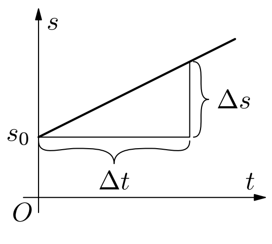
2.6 Graf závislosti dráhy na čase a rychlost pohybu

Rovnoměrný pohyb

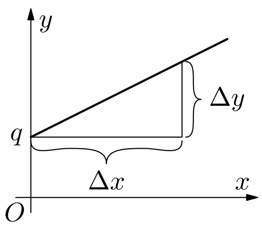
Představme si automobil, který vyjel z místa označeného jako počátek a jede rovnoměrným pohybem po dálnici. Při své jízdě míjí kilometrickou značku. V okamžiku, kdy automobil míjí kilometrickou značku (na které je obecně nějaký údaj s_0), zmáčkne spolujezdec řidiče v automobilu stopky a od tohoto okamžiku začne měřit dobu jízdy automobilu. Za dobu t bude automobil projíždět kolem další kilometrické značky. Protože se automobil pohybuje rovnoměrně rychlostí o velikosti v, můžeme vyjádřit dráhu, kterou automobil urazil od počátku, vztahem

$$s = vt + s_0.$$

Tento pohyb je možno také popsat pomocí grafu závislosti dráhy na čase (obr. 33).



Obr. 33 Závislost dráhy na čase



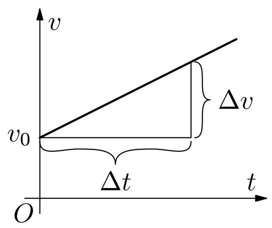
Obr. 34 Graf přímky

Graf na obr. 33 je grafem lineární funkce. Připomeňme si z matematiky její vyjádření ve tvaru $y = kx + q$ (obr. 34). Koeficient $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ vyjadřuje sklon (přesněji směrnici) přímky. Analogicky také na obr. 33 koeficient $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ (fyzikálně rychlost) také vyjadřuje sklon přímky, tentokrát závislosti dráhy na čase v rovnici $s = vt + s_0$.

Rovnoměrně zrychlený pohyb

Představme si, že řidič našeho automobilu se při své jízdě po dálnici dostane do časové tísně a začne ji řešit tím, že začne rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením o velikosti a zvyšovat rychlost automobilu.

Vztah pro rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu pak je $v = at + v_0$. Pokud bychom znázornili tuto závislost pomocí grafu, dostaneme graf znázorněný na obr. 35.
Obdobně jako v předchozím případě můžeme říci, že velikost zrychlení pohybu $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ opět určuje sklon přímky.



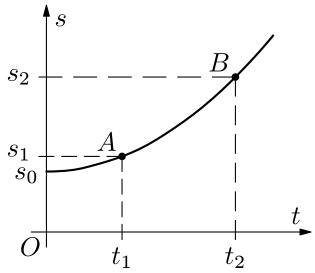
Obr. 35 Graf závislosti rychlosti na čase

Pokud bychom dále vyjádřili závislost dráhy na čase, dostaneme již dříve uváděný vztah

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0,$$

což je kvadratická funkce v proměnné t. Graf této funkce je znázorněný na obr. 36. Pokud bychom na této parabole zvolili nějaké dva body a spojili je, dostaneme přímku.

Sklon této přímky je dán vztahem $\dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v$. Pokud bychom bod B čím dál více přibližovali k bodu A, bude se sklon této přímky postupně měnit, a sečna paraboly přejde postupně v tečnu. Pokud bychom toto popsali fyzikálně, znamená to postupný přechod od rychlosti průměrné k rychlosti okamžité. Jinak řečeno: sklon tečny pak určuje velikost okamžité rychlosti v daném čase.



Obr. 36 Graf závislosti dráhy na čase

Představme si nyní, že máme nějaké zařízení (např. videokameru), pomocí které můžeme sejmout např. časový průběh rovnoměrně zppomaleného pohybu malého míčku vrženého svisle vzhůru. Záznam získaný videokamerou je pak možno analyzovat pomocí nějakého programu (např. AVISTEP) a získaná data přenést do Excelu: obdržíme dva řádky dat – se souřadnicemi y a jim odpovídajícími časy t. Z těchto dat je pak možno vytvořit např. bodový graf $y = f(t)$. Dále je pak možno těmito body grafu proložit křivku a pomocí regresní funkce v Excelu získat její matematické vyjádření. Z koeficientů tohoto vyjádření je pak již možno odečíst údaje o rychlosti a zrychlení pohybu. Ukažme si to nyní na následujícím příkladu.

Příklad 15 – vrh míčku

Z videozáznamu pohybu míčku byla získána následující data:

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$\frac{h}{m}$	0	0,56	1,03	1,42	1,72	1,94	2,07	2,12

a) Sestrojte z těchto údajů bodový graf v Excelu.

b) Určete rovnici regrese jako polynomu 2. stupně.

c) Z rovnice regresní funkce zjistěte počáteční rychlost a zrychlení pohybu.

d) Napište rovnici rychlosti pohybu v závislosti na čase.

e) Sestrojte tečnu ke grafu v čase 0,3 s (ručně na papíře do vytisknutého grafu).

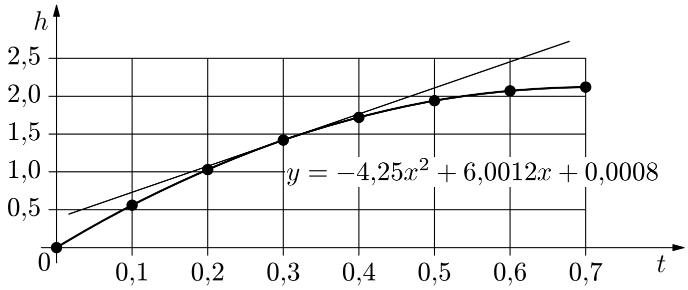
f) Ze sklonu tečny určete velikost okamžité rychlosti pohybu a porovnejte ji s hodnotou získanou výpočtem.

Řešení

Při vytváření grafu v Excelu postupujeme následujícím způsobem: vytvoříme graf - XY bodový, pak vybereme v menu Graf - Přidat spojnici trendu (typ trendu a regrese - polynomický 2.stupně). Přitom nesmíme zapomenout nastavit: Možnosti - Zobrazit rovnici regrese (obr. 37).

Obecná rovnice pohybu má tvar $h = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Porovnáním koeficientů této rovnice s rovnicí regresní funkce (kde si sami musíme upravit názvy proměnných), tj. $h = 0{,}0008 + 6{,}0012t - 4{,}25t^2$, dostaneme $a = 2 \cdot (-4{,}25)\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = -8{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $v_0 = 6{,}00\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Časovou závislost rychlosti pohybu je pak možno přepsat do tvaru $v = v_0 + at$, tj. $\{v\} = 6{,}00 - 8{,}5\{t\}$. Po dosazení hodnoty $t = 0{,}3$ s dostaneme $v = 3{,}45\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Přibližně stejný výsledek bychom měli také obdržet ze sklonu nakreslené tečny (zkuste sami).



Obr. 37 Graf závislosti výšky nad povrchem země na čase

Úloha 26 – volný pád míčku s odporem prostředí

Analýzou videozáznamu volného pádu míčku z výšky 3,00 m byly získány tyto údaje:

$\frac{t}{\mathrm{s}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\frac{h}{m}$	3,00	2,96	2,84	2,64	2,36	2,01	1,56	1,04	0,44

a) Sestrojte z těchto údajů bodový graf v Excelu.

b) Určete rovnici regrese jako polynomu 2. stupně.

c) Z rovnice regresní funkce zjistěte počáteční rychlost a zrychlení pohybu.

d) Napište rovnici rychlosti pohybu v závislosti na čase.

e) Sestrojte tečnu ke grafu v čase 0,5 s.

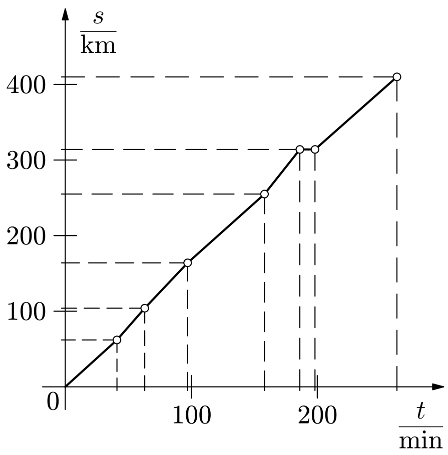
f) Ze sklonu tečny určete velikost okamžité rychlosti pohybu a porovnejte ji s hodnotou získanou výpočtem.

Výsledky úloh

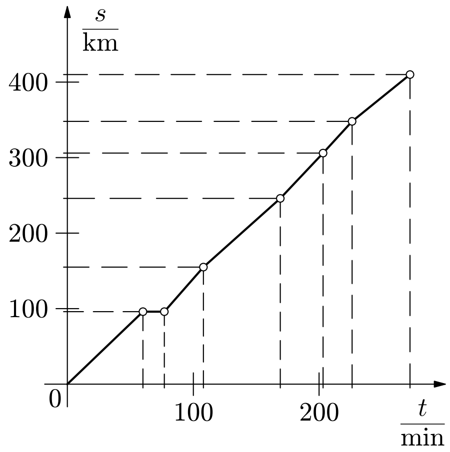
1.

Trasa	Délka trasy / km	Čas tam / min	v_{p1} tam / $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$	Čas zpět / min	v_{p2} zpět / $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$
Praha – Kolín	62	41	91	46	81
Kolín – Pce	42	22	115	23	110
Pce – Č. Třeb.	60	34	106	34	106
Č. Třeb. – Brno	91	61	90	61	90
Brno – Břeclav	59	31	114	31	114
Zast. v Břec.		9		17	
Břeclav – Wien	96	65	89	60	96
Praha – Wien	410	268	92	277	89
Ostat. zast.		5		5	

2.



Obr. 40 Jízda tam



Obr. 41 Jízda zpět

3. Po volbě soustavy souřadnic dle obr. 9 můžeme psát, $l_2^2 = (d + a)^2 + h^2$, $l_1^2 = d^2 + h^2$, což je soustava dvou rovnic o dvou neznámých d a h. Jejím řešením dostaneme $d = \dfrac{l_2^2 - l_1^2 - a^2}{2a} = 16{,}5\ \mathrm{m}$, $h = \sqrt{l_1^2 - d^2} = 38{,}6\ \mathrm{m}$.

4. c) Návod: pomocí vyhledávače *www.mapy.cz* si nalezněte mapu Prahy, dále pak přejděte na Ruzyňské letiště, otevřte si program „Měření“. Pomocí tohoto programu lze již změřit požadované vzdálenosti.

5. Např. $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{138\ \mathrm{cm}}{160\ \mathrm{cm}}$, z čehož $\alpha = 49°$.

6. Dle *www.googleearth.com* není nejsevernější místo Binzart, ale výběžek v jeho blízkosti – $37°20'21''$ s.š., $23°42'51''$ v.d., nejjižnější místo – mys – $34°58'16''$ j.š., $20°0'13''$ v.d., nejzápadnější místo není Dakar, ale výběžek v blízkosti Dakaru – $14°44'36''$ s.š., $17°31'45''$ z.d., nejvýchodnější místo je výběžek v blízkosti Tooxinu – $11°49'59''$ s.š., $51°17'16''$ v.d..

7. Pomocí *www.googleearth.com* vychází 7 630 km – zde je měření ovlivněno různými výškovými pohledy, při práci s atlasem, kde jsme se omezili jen na určitou rovnoběžku. Podrobněji o tom pojednává Doplněk 2.

9. Vzdálenost Oslo – St Petergurg zjištěná pomocí mapy je 1 030 km, cesta letadlem trvá 1,15 hod., přičteme-li 1 hod. na změnu časového pásma, pak do St Peterburgu letadlo doletí ve 14 hod 9 min. Vyletí-li letadlo ze St Peterburgu v 19:00 hod, pak do Osla doletí vzhledem k časovému posunu v 19 hod 9 min.

Pomocí Internetu (*www.googleearth.com*) je vzdálenost Oslo – St Peterburg 1 090 km, cesta letadlem pak trvá 1,21 hod.. Vzhledem k čas. pásmu letadlo doletí do St Peterburgu ve 14 hod 13 min. Vyletí-li letadlo ze St Peterburgu v 19:00 hod, pak do Osla doletí vzhledem k časovému posunu v 19 hod 13 min.

10. Podle mapy vzdálenost Athény ($23,5°$ v.d.) – Beijing ($117°$ v.d.) je 7 400 km (časový posun je +8 hod - (+2 hod) = +6 hod), Cape Town ($20°$ v.d.) – Stockholm ($18°$ v.d.) je 9 840 km (není časový posun).

Podle Internetu je vzdálenost Athény – Beijing 7 626 km, vzdálenost Stockholm – Cape Town je 10 324 km. Dále je tedy Kapské město.

11. $v_\mathrm{p} = 152\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

12. $v_\mathrm{p} = 142\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

13. a) $v_\mathrm{p1} = 33\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $v_\mathrm{p2} = 45\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $v_\mathrm{p3} = 8\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$;
b) $t = 5$ hod 2 min; c) $v_\mathrm{p} = 28{,}6; \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

14. $s = v_0 t_\mathrm{r} + \dfrac{v_0^2}{2a}$.

Pro $a_1 = 5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$:

$\frac{v}{\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$	25	35	40	50
$\frac{s}{\mathrm{m}}$	92,5	164,5	208	310

Pro $a_2 = 7{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$:

$\frac{v}{\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$	25	35	40	50
$\frac{s}{\mathrm{m}}$	72	124	155	227

15. $s = v_0 t_1 + \frac{1}{2} v_0 t_2 = (67 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 67 \cdot 50)\ \mathrm{m} = 2\,010\ \mathrm{m}$.

16. Původní směr: $s_1 = 0{,}4s$; $s_2 = 0{,}4s$; $s_3 = 0{,}2s$; $v_1 = 28{,}8\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; $v_2 = 18\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; $v_3 = 45\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{\dfrac{0{,}4s}{v_1} + \dfrac{0{,}4s}{v_2} + \dfrac{0{,}2s}{v_3}} = \frac{v_1 v_2 v_3}{0{,}4 v_2 v_3 + 0{,}4 v_1 v_3 + 0{,}2 v_1 v_2} = 24{,}7\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

Opačný směr: $s_1' = 0{,}2s$; $s_2' = 0{,}4s$; $s_3' = 0{,}4s$; $v_1' = 18\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; $v_2' = 45\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; $v_3' = 28{,}8\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

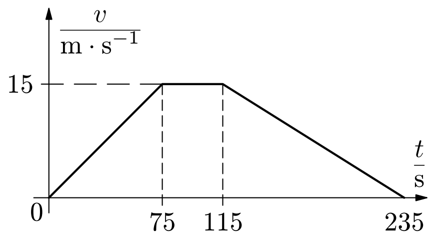
$$v_\mathrm{p}' = \frac{s}{\dfrac{0{,}4s}{v_1'} + \dfrac{0{,}4s}{v_2'} + \dfrac{0{,}2s}{v_3'}} = \frac{v_1' v_2' v_3'}{0{,}4 v_2' v_3' + 0{,}4 v_1' v_3' + 0{,}2 v_1' v_2'} = 24{,}7\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

17.

$t_1 = \dfrac{15}{0{,}2}\ \mathrm{s} = 75\ \mathrm{s}$;

$t_2 = \dfrac{420 + 180}{15}\ \mathrm{s} = 40\ \mathrm{s}$; $t_3 = 120\ \mathrm{s}$;

$s_3 = \dfrac{1}{2} v t_3 = \dfrac{1}{2} \cdot 15 \cdot 120\ \mathrm{m} = 900\ \mathrm{m}$.



Obr. 42 Pohyb vlaku

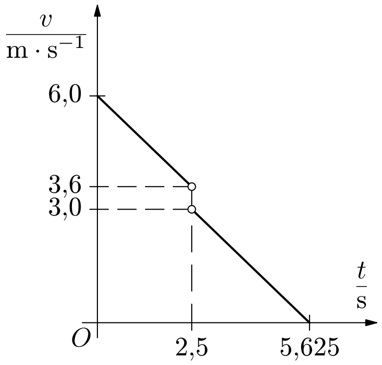
18. $s_1 = \dfrac{1}{2}(v_0 + v_1) t_1$,

z čehož $t_1 = \dfrac{2s}{v_0 + v_1} = \dfrac{2 \cdot 12}{6 + 3{,}6}\ \mathrm{s} = 2{,}5\ \mathrm{s}$;

$v_2 = 3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$;

$a = \dfrac{v_1^2 - v_0^2}{2s} = -0{,}96\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$;

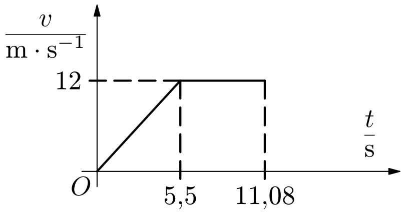
$t_2 = -\dfrac{v_2}{a} = -0{,}96\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$; $s_2 = 4{,}7\ \mathrm{m}$.



Obr. 43 Pohyb puku

19. $s_1 = 33\ \mathrm{m}$; $t_1 = 5{,}5\ \mathrm{s}$; $s_2 = 67\ \mathrm{m}$; $v_\mathrm{k} = \dfrac{2s_1}{t_1} = 12\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $t_2 = \dfrac{s_2}{v_\mathrm{k}} = 5{,}58\ \mathrm{s}$; $t = t_1 + t_2 = 11{,}08\ \mathrm{s}$ (obr. 44).

20. $s_1 = 33\ \mathrm{m}$; $t_1 = 4{,}8\ \mathrm{s}$; $s_2 = 67\ \mathrm{m}$; $v_\mathrm{k} = \dfrac{2s_1}{t_1} = 13{,}75\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $t_2 = \dfrac{s_2}{v_\mathrm{k}} = 4{,}87\ \mathrm{s}$; $t = t_1 + t_2 = 9{,}67\ \mathrm{s}$.



Obr. 44 Pohyb sprintera

21. $\Delta s = (24 + 32 + 18 + 20)\ \mathrm{m} = 94\ \mathrm{m}$; $\Delta v = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$; $\Delta t = \dfrac{\Delta s}{\Delta v} = 37{,}6\ \mathrm{s}$;

$s_1 = 470$ m; $s_2 = 564$ m.

22. $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 0{,}7$ s, $v_0 = \dfrac{24{,}5}{0{,}7}$ $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 35$ $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$,$v_y = gt = \sqrt{2hg} = 6{,}9$ $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $v_{\mathrm{celk}} = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = 35{,}7$ $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

23. $t = t_1 + t_2 = \dfrac{s}{v+u} + \dfrac{s}{v-u}$, z čehož $s = \dfrac{v^2 - u^2}{2v}t = 1\,080$ m. Potom $t_1 = \dfrac{s}{v+u} = \dfrac{v-u}{2v}t = \dfrac{1}{4}t = 15$ min, $t_2 = \dfrac{s}{v-u} = \dfrac{v+u}{2v}t = \dfrac{3}{4}t = 45$ min.

24. $t = 1200{,}8$ s $= 150$ s $= 2{,}5$ min, vodorovná vzdálenost počátku a konce plavby měřená po proudu řeky je $l = 0{,}4 \cdot 150$ m $= 60$ m, loďka urazila dráhu $s = \sqrt{u^2 + v^2}\,t = 134$ m.

25. Střed Měsíce obíhá kolem středu Země rychlostí o velikosti $v_{\mathrm{M}} = 3\,680$ $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, střed Země kolem středu Slunce rychlostí o velikosti $v_{\mathrm{Z}} = 107\,200$ $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Maximální rychlost pohybu Měsíce vůči středu Slunce pak je $v_{\max} = v_{\mathrm{Z}} + v_{\mathrm{M}} = 110\,900$ $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, minimální rychlost je $v_{\min} = v_{\mathrm{Z}} - v_{\mathrm{M}} = 103\,500$ $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

26. Rovnice regrese získaná pomocí Excelu je $y = -4{,}0184x^2 + 0{,}0164x + 2{,}9987$, potom $a = -8{,}0$ $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $v_0 = 0{,}0$ $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $h_0 = 3{,}0$ m; $v = 0{,}8t$; v čase 0,5 s je $v = 4$ $\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.