Fyzika je kolem nás (Síla a tuhé těleso)

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Miroslava Jarešová – Ivo Volf

Obsah

Několik slov úvodem

Doposud jsme se setkávali se situacemi, kdy jsme těleso mohli nahradit hmotným bodem. Hmotný bod pro nás představoval model situace, kdy jsme veškerou hmotnost těles soustředili do jednoho konkrétního bodu a zanedbávali rozměry tělesa. V praktickém životě to však tímto způsobem pokaždé řešit nelze.

Obr. 1 Skok z letadla

Pokud bychom se podívali např. na různé pohyby v přírodě, jako jsou třeba sportovní skoky z letadla, nemůžeme si nevšimnout, že skokan v průběhu pohybu mění svoji polohu – různě se natáčí. Pokud bychom se podívali z velké dálky, pak bychom viděli skokana téměř jako hmotný bod a když bychom sledovali jeho trajektorii pohybu, nepoznali bychom, zda se jedná o nějaký balík hozený z letadla, nebo zda se jedná o pohyb člověka. My se však na tento pohyb budeme dívat zblízka – pak už nutně musíme vnímat „krásu“ skoku člověka i s jeho rozměry (obr. 1).

Jak již bylo uvedeno v úvodu, nelze při řešení problémů v běžném životě v řadě situací zanedbat ani rozměry ani tvar tělesa. Často je nutné také uvažovat s tím, že se těleso otáčí.

Pro zjednodušení našich úvah budeme předpokládat, že síly působící na těleso budou mít jen pohybové účinky, tj. nezmění ani tvar ani objem tělesa. Skutečné těleso tedy nahradíme myšlenkovým modelem, který nazveme *tuhé těleso*.

O tuhém tělese tedy můžeme říci, že je to *ideální těleso, jehož tvar ani objem se účinkem libovolně velkých sil nezmění.*

V této brožuře se budeme zabývat tuhým tělesem, především se však zaměříme na silové účinky spojené s pojmem tuhé těleso. Před studiem tohoto textu by bylo vhodné, abyste již měli probrány základy dynamiky. Pak by bylo vhodné seznámit se se základními pojmy ze statiky tuhého tělesa (nikoliv pohyb tuhého tělesa, ale jen statiku). Velmi dobře je toto vysvětleno např. v [1]. Při řešení úloh není třeba se učit odvozené vztahy nazpaměť, je třeba, abyste se zaměřili na pochopení fyzikálních souvislostí a porozumět, že vše vychází ze správně nakresleného obrázku se silovým rozborem, pak napsat jednotlivé rovnice a řešit…

Cílem tohoto textu je zvládnout metodiku skládání a rozkladu sil v různých situacích, se kterými je možno se v praktickém životě setkat. Přáli bychom si, abyste toto zvládli co nejlépe.

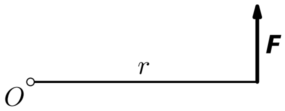
1 Moment síly vzhledem k ose otáčení

V této kapitole se zaměříme na základní pojmy souvisejícími se silovým působením na tuhé těleso. Před studiem tohoto textu je třeba ovládat základy dynamiky. Bylo by vhodné, projít si také základní pojmy v souvislosti se statikou tuhého tělesa podrobně vysvětlené např. v [1].

Každý z vás se už jistě houpal na houpačce vyrobené ze silnějšího prkna (fošny), které je uprostřed podepřeno (obr. 2). Pokud mají obě děti přibližně stejnou hmotnost, sedí každé z nich na jednom konci. Mohou se však také tak dobře houpat i s některým ze svých rodičů? A když ano, tak jak to udělat? Řada z vás už asi intuitivně cítí, že v tomto případě není podstatná pouze velikost síly, ale také poloha působiště síly vzhledem k ose otáčení.

Obr. 2 Houpačka

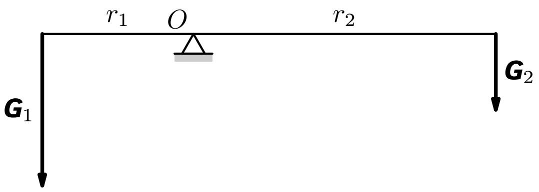
Vektorová veličina, která nám umožňuje takové situace fyzikálně popsat, se nazývá *moment síly* $\boldsymbol{M}$ [1] a jeho velikost se vypočte jako součin $M = Fr$ (obr. 3).



Obr. 3 Moment síly

Orientaci momentu působící síly určíme užitím *pravidla pravé ruky*: *Položíme-li pravou ruku na těleso tak, aby prsty ukazovaly směr otáčení tělesa, pak vztyčený palec ukazuje směr momentu síly.*
Na obr. 3 tedy moment síly směřuje před nákresnu.

Pokud bychom se nyní vrátili k houpačce, mohli bychom tuto situaci popsat také matematicky (obr. 4).



Obr. 4 Síly, kterými dítě s otcem působí na houpačku

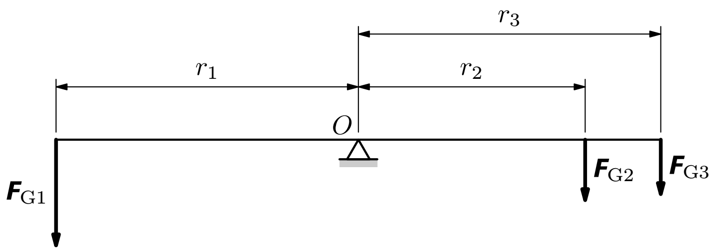
Aby nastala rovnováha, musí dítě sedět dále od osy O otáčení než otec, a tedy momenty sil vzhledem k ose otáčení musí být v rovnováze, tj. musí mít opačný směr a velikost, což se dá matematicky vyjádřit ve tvaru

$$G_1 r_1 = G_2 r_2.$$

[1] Podrobněji je možno se s tímto pojmem seznámit např. v [1].

Příklad 1 – houpačka

Představme si situaci, která je znázorněná na obr. 2. Na levé straně houpačky sedí jedno dítě (vlevo na obr. 2), na druhé straně houpačky dvě děti. Z obr. 2 je zřejmé, že dítě na levé straně „převážilo“ děti na pravé straně. Vážením jsme zjistili, že dítě vlevo má hmotnost $m_1 = 35$ kg, dítě vpravo blíž k ose otáčení má hmotnost $m_2 = 20$ kg. Dále jsme měřením zjistili, že $\dfrac{r_2}{r_1} = 0{,}8$, $\dfrac{r_3}{r_1} = 1{,}0$ (obr. 5). Jaká je nanejvýš hmotnost m_3?



Obr. 5 Síly, kterými působí děti na houpačku

Řešení

Aby byla splněna podmínka na obrázku, musí platit $F_{\mathrm{G1}}r_1 \geq F_{\mathrm{G2}}r_2 + F_{\mathrm{G3}}r_3$. Po dosazení za $r_2 = 0{,}8r_1$, $r_3 = r_1$ dostaneme $F_{\mathrm{G1}}r_1 \geq F_{\mathrm{G2}} \cdot 0{,}8r_1 + F_{\mathrm{G3}}r_1$, tedy

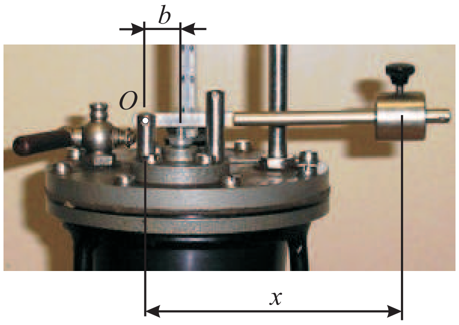
$$F_{\mathrm{G1}} \geq 0{,}8F_{\mathrm{G2}} + F_{\mathrm{G3}},$$

$$m_1 \geq 0{,}8m_2 + m_3, \qquad m_3 \leq m_1 - 0{,}8m_2.$$

Po dosazení za hmotnosti dostaneme $m_3 \leq (35-0{,}8\cdot 20)$ kg, a tedy $m_3 \leq 19$ kg. Třetí dítě může mít hmotnost nejvýše 19 kg.

Příklad 2 – Pappinův kotlík

Na obr. 6 je znázorněna část Pappinova kotlíku. Pohybem závaží tvaru válečku o hmotnosti $m = 50$ g na páce je možno regulovat hodnotu tlaku pod pístem. Určete nejmenší a největší hodnotu tlaku pod pístem (v násobcích atmosférického tlaku). Průměr pístu pod pákou je $d = 0{,}5$ cm; rozsah x, ve kterém je možno pohybovat válečkem je od $x = 4{,}5$ cm do 11,0 cm; $b = 12$ mm. Hmotnost páky zanedbejte, hodnota atmosférického tlaku je $p_{\mathrm{a}} = 0{,}1$ MPa.



Obr. 6 Pappinův kotlík

Řešení

Označme $\boldsymbol{F}$ sílu působící na píst. Platí

$mg \cdot x = F \cdot b$, z čehož $F = \frac{x}{b} mg$.

Pro dané hodnoty:

$F_1 = \frac{4{,}5}{1{,}2} \cdot 0{,}05 \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 1{,}8\ \mathrm{N}$,

$F_2 = \frac{11{,}0}{1{,}2} \cdot 0{,}05 \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 4{,}5\ \mathrm{N}$.

Hodnoty příslušných tlaků jsou:

$$p_1 = \frac{F_1}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{1{,}8}{\frac{\pi \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2}{4}}\ \mathrm{Pa} = 0{,}09\ \mathrm{MPa} = 0{,}9\, p_\mathrm{a};$$

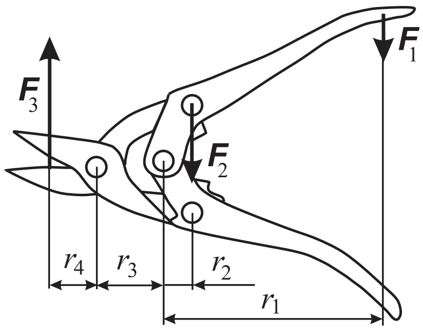
$$p_2 = \frac{F_2}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4{,}5}{\frac{\pi \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2}{4}}\ \mathrm{Pa} = 0{,}23\ \mathrm{MPa} = 2{,}3\, p_\mathrm{a}.$$

Tím jsme vypočetli rozsah přetlaků uvnitř Pappinova kotlíku. Hodnoty tlaků uvnitř jsou tedy o $p_\mathrm{a} = 0{,}1$ MPa větší, tedy mají rozsah od 1,9 p_a do 3,3 p_a.

Příklad 3 – nůžky na plech

Na obr. 7 jsou znázorněny nůžky na plech. Z obrázku je zřejmé, že je zde použit „dvojnásobný“ pákový převod. V důsledku toho několikanásobně se zvětší střižná síla vzhledem k síle, kterou působíme na páku nůžek rukou. Odhadněte, kolikrát se vlivem pákových převodů zvětší síla oproti síle, kterou vyvíjíme při stříhání.

Obr. 7 Nůžky na plech



Obr. 8 Nůžky na plech – síly

Řešení

V rámci zjednodušení obrázku budeme zakreslovat místo dvou sil působících proti sobě vždy pouze jednu z těchto stejně velkých sil.

Z obr. 8 můžeme odečíst, že $\frac{r_1}{r_2} = 5$, $\frac{r_2 + r_3}{r_4} = 2$. Dále také platí $F_1 r_1 = F_2 r_2$ a $F_2(r_2 + r_3) = F_3 r_4$.

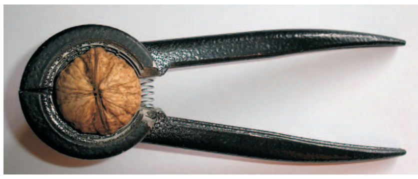
Z výše uvedených vztahů vyplývá, že $\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{5}$, $\frac{F_2}{F_3} = \frac{r_4}{r_2 + r_3} = \frac{1}{2}$.

Tedy můžeme psát $\frac{F_1}{F_3} = \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{F_2}{F_3} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$.

Vlivem pákového převodu nůžek se velikost síly působící na koncích ramen nůžek může 10krát zvětšit.

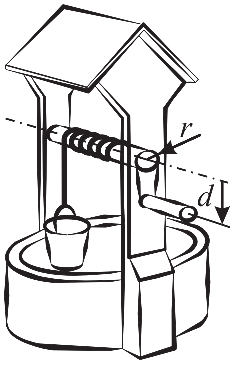
Cvičení 1

1. Odhadněte poměr mezi silou, kterou musíte působit na konci louskáčku na ořechy, a silou, kterou je třeba rozlousknout ořech (obr. 9).



Obr. 9 Louskáček na ořechy

2. Odhadněte velikost síly, jakou musíte působit na kliku rumpálu (obr. 10), je-li $d = 0{,}4$ m a $r = 0{,}1$ m a je-li hmotnost vědra i s vodou 15 kg. Jak velkou práci vykonáte při zvednutí vědra z hloubky 10 m? Kolikrát se otočí kolo rumpálu při zvedání vědra?



Obr. 10 Rumpál

3. Odhadněte velikost síly, jakou musíte působit na koncích držadel na kolečku, abyste zvedli kolečko s pytlem cementu. Hmotnost zvedané části kolečka odhadněte na 12 kg, hmotnost pytle cementu je 50 kg. Předpokládejte, že na držadla kolečka působíte pouze silami ve svislém směru. Jak velkou silou působí každá ruka na držadlo kolečka ve svislém směru (obr. 11)? Chybějící údaje pro řešení odhadněte pomocí obr. 11.

Obr. 11 Kolečko

2 Skládání a rozklad sil

V minulé kapitole jsme si zavedli pojem tuhé těleso. V této části si ukážeme několik úloh, se kterými se můžeme v souvislosti s tuhým tělesem setkat. Jde především o řešení problémů souvisejících se skládáním a rozkladem sil.
Při skládání a rozkladu sil budeme využívat následující poznatky[2]:

a) výslednice několika sil je jejich vektorovým součtem,

b) vzhledem k libovolně zvolené ose je moment výslednice vektorovým součtem momentů jednotlivých sil,

Je-li tuhé těleso v *rovnovážném stavu*, je výslednice všech sil, které na těleso působí nulová a také výsledný moment je nulový vzhledem k libovolné ose.

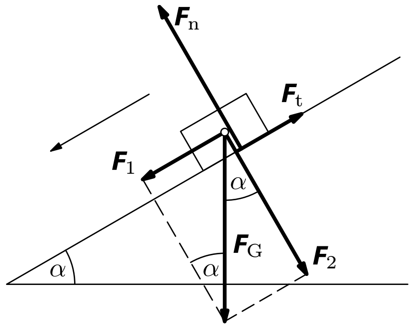
Při řešení úloh také budeme při vzájemném silovém působení těles používat *zákon akce a reakce*.

2.1 Skládání a rozklad různoběžných sil

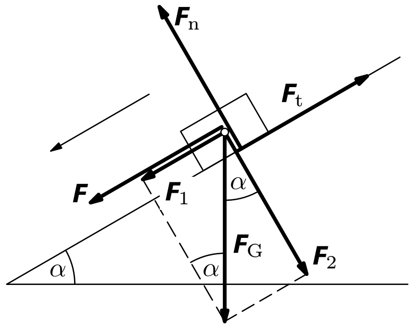
Podívejme se nyní na několik situací, kdy je třeba skládat a rozkládat síly.

2.1.1 Nakloněná rovina

Nejprve si připomeneme, jaké vztahy platí pro posuvný pohyb tělesa na nakloněné rovině, bude-li se těleso na nakloněné rovině pohybovat samovolně. Na těleso působí Země tíhovou silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G}}$ ve svislém směru, nakloněná rovina reakční kolmou tlakovou silou $\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}$ a třecí síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}$ ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou (obr. 15).



Obr. 15 Nakloněná rovina – pohyb samovolně směrem dolů



Obr. 16 Nakloněná rovina – pohyb směrem dolů s další silou

[2]Podrobně je možno se s těmito poznatky seznámit např. v [1], my se v našem textu zaměříme spíš na řešení úloh.

Při samovolném pohybu směrem dolů je výslednice $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ těchto sil je vektorovým součtem těchto sil, tj.

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{v} = \boldsymbol{F}_\mathrm{G} + \boldsymbol{F}_\mathrm{n} + \boldsymbol{F}_\mathrm{t}.$$

Nyní provedeme rozklad sil na složky tak, jak je uvedeno na obr. 15. Dostaneme

$$F_1 = mg \sin\alpha, \qquad F_\mathrm{n} = mg\cos\alpha, \qquad F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{n}.$$

Vzhledem k tomu, že se těleso ve směru kolmém k nakloněné rovině nepohybuje, platí ještě rovnice $F_2 = F_\mathrm{n}$. Potom $F_\mathrm{t} = mgf\cos\alpha$. Pohybová rovnice je pak dána vztahem

$$ma = mg\sin\alpha - mgf\cos\alpha,$$

z čehož

$$a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha). \tag{1}$$

Provedeme diskusi vztahu (1).

1. Bude-li $a > 0$, potom $\sin\alpha - f\cos\alpha > 0$, z čehož $\operatorname{tg}\alpha > f$, těleso se pohybuje po nakloněné rovině rovnoměrně zrychleně směrem dolů.

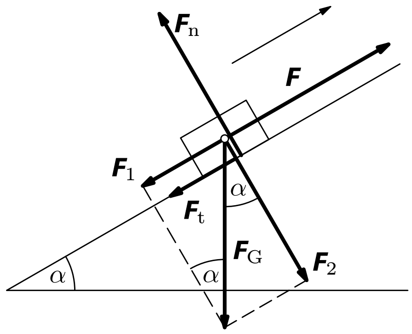
2. Bude-li $a = 0$, potom $\sin\alpha - f\cos\alpha = 0$, z čehož $\operatorname{tg}\alpha = f$, těleso se pohybuje po nakloněné rovině směrem dolů rovnoměrně.

3. Bude-li $\sin\alpha - f\cos\alpha < 0$, z čehož $\operatorname{tg}\alpha < f$, pak pohyb nemůže nastat. K uvedení tělesa do pohybu je třeba, aby na těleso působila ještě další dostatečně velká síla $\boldsymbol{F}$, rovnoběžně s nakloněnou rovinou směrem dolů (obr. 16). Při působení další síly $\boldsymbol{F}$ pak platí $\boldsymbol{F}_\mathrm{v} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_\mathrm{G} + \boldsymbol{F}_\mathrm{n} + \boldsymbol{F}_\mathrm{t}$. Velikost zrychlení pohybu je pak dána vztahem

   $$a = \frac{F}{m} + g(\sin\alpha - f\cos\alpha).$$

   Má-li i v tomto případě být $a \geq 0$, potom musí být

   $$F \geq mg(f\cos\alpha - \sin\alpha).$$



Obr. 17 Nakloněná rovina – pohyb směrem nahoru

V případě pohybu tělesa po nakloněné rovině směrem nahoru ještě musí na těleso působit síla $\boldsymbol{F}$ (obr. 17). Výslednice $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ těchto sil je opět vektorovým součtem těchto sil, tj.

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{v} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_\mathrm{G} + \boldsymbol{F}_\mathrm{n} + \boldsymbol{F}_\mathrm{t}.$$

Pohybovou rovnici bychom pak napsali obdobně jako v případě pohybu směrem dolů. Postupovali bychom analogicky jako v případě pohybu po nakloněné rovině směrem dolů za působení síly $\boldsymbol{F}$.

Zrychlení pohybu je pak dáno vztahem

$$a = \frac{F}{m} - g(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Aby těleso stoupalo vzhůru po nakloněné rovině, musí být $a \geq 0$, a tedy

$$F \geq mg(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Při rovnoměrném pohybu po nakloněné rovině vzhůru je tedy $a = 0$, potom

$$F = mg(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Příklad 4 – lyžař jedoucí s kopce

Lyžař o hmotnosti 80 kg jede ze svahu, který svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 15°$. Lyžař se pohybuje samovolně po svahu dolů až dosáhne rychlosti o velikosti 30 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$, na které se pohyb ustálí. Jaká musí být hodnota součinitele f smykového tření, které působí na skluznici lyží, aby pohyb lyžaře byl rovnoměrný? Uvažujte, že kromě třecí síly, působí na lyžaře také odporová síla vzduchu, pro jejíž velikost platí $F = \frac{1}{2}C\varrho S v^2$, kde $C = 0{,}5$, $S = 0{,}6\ \mathrm{m^2}$, $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, v je velikost rychlosti pohybu lyžaře vzhledem ke svahu.

Řešení

Při ustáleném pohybu platí $mg(\sin\alpha - f\cos\alpha) - \frac{1}{2}C\varrho S v^2 = 0$, z čehož

$$f = \frac{2mg\sin\alpha - C\varrho S v^2}{2mg\cos\alpha} = 0{,}05.$$

Příklad 5 – lyžař jedoucí na vleku do kopce

Lyžař z předchozí úlohy jede na vleku do svahu, který má tentokrát sklon $\alpha = 20°$.

Uvažujme, že tažné lano má lyžař ze strany (obr. 18). Směr vlečného lana budeme uvažovat, že je téměř rovnoběžný se svahem a tažným lanem. Určete, jakou silou je napínáno vlečné lano, jede-li lyžař rovnoměrným pohybem. Lyžař se pohybuje „pomalu“, takže sílu odporu vzduchu při pohybu zanedbáme.

Obr. 18 Lyžař na vleku 1

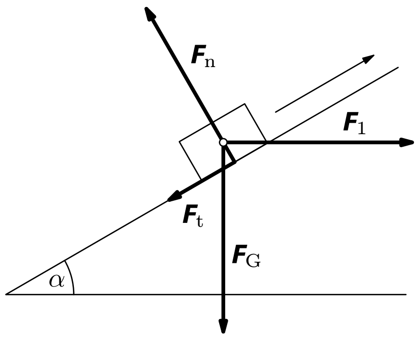
Řešení

Při jízdě rovnoměrným pohybem do kopce platí pro velikost síly, kterou je napínáno vlečné lano (obr. 17) vztah

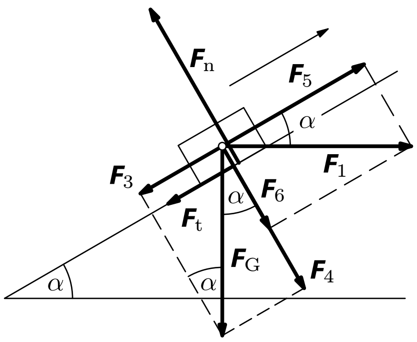
$$F = mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) = 80 \cdot 9{,}81 \cdot (\sin 20^\circ + 0{,}05 \cdot \cos 20^\circ)\ \mathrm{N} = 305\ \mathrm{N}.$$

2.1.2 Síly působící na šroubu

Než zformulujeme problém sil působících na šroubu, vyřešíme ještě úlohu týkající se pohybu na nakloněné rovině, která, jak zjistíme, s tímto problémem velmi úzce souvisí. Určíme velikost vodorovně působící síly $\boldsymbol{F}_1$, která „utáhne" břemeno o hmotnosti m na nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel α. Součinitel smykového tření mezi břemenem a nakloněnou rovinou je f.



Obr. 19 Síly působící na břemeno



Obr. 20 Rozklad sil

Nejprve si zakreslíme síly, které na těleso působí (obr. 19). Tyto síly pak rozložíme do dvou navzájem kolmých směrů: rovnoběžného s nakloněnou rovinou, kolmého na nakloněnou rovinu (obr. 20). Budeme uvažovat, že břemeno se pohybuje na nakloněné rovině rovnoměrně.

Ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou platí

$$-F_\mathrm{t} - F_3 + F_5 = 0.$$

Ve směru kolmém na nakloněnou rovinu je

$$F_\mathrm{n} - F_4 - F_6 = 0.$$

Tyto dvě rovnice doplníme ještě vztahem pro smykové tření $F_\mathrm{t} = F_\mathrm{n} \cdot f$.
Podle obr. 20 pak dále můžeme psát $F_3 = F_\mathrm{G}\sin\alpha$, $F_5 = F_1\cos\alpha$, $F_4 = F_\mathrm{G}\cos\alpha$, $F_6 = F_1\sin\alpha$, což dále dosadíme do výše uvedených vztahů. Dostaneme

$$\begin{aligned} -F_\mathrm{n} \cdot f - F_\mathrm{G}\sin\alpha + F_1\cos\alpha &= 0, \\ F_\mathrm{n} - F_\mathrm{G}\cos\alpha - F_1\sin\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Dále budeme postupovat tak, že z druhé rovnice vyjádříme $F_n = F_G \cos\alpha + F_1 \sin\alpha$ a dosadíme do první rovnice, tj.

$$(F_G \cos\alpha + F_1 \sin\alpha) \cdot f - F_G \sin\alpha + F_1 \cos\alpha = 0.$$

Z této rovnice pak vyjádříme

$$F_1 = \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\alpha - f\sin\alpha} F_G. \tag{2}$$

Poznámka

1. V technické praxi se často zavádí tzv. *třecí úhel* φ, který se definuje pomocí vztahu $\operatorname{tg}\varphi = f$. Pokud bychom čitatele i jmenovatele ve vztahu (2) vydělili $\cos\alpha$, dostaneme

$$F_1 = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + f \cdot \dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha} - f \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} F_G = \frac{\operatorname{tg}\alpha + f}{1 - f \cdot \operatorname{tg}\alpha} F_G = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\alpha} F_G.$$

Tento vztah je možno dále zjednodušit užitím tzv. *součtového vzorce*

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(\alpha + \varphi),$$

se kterým se v matematice seznámíte později (vzorec je možno nalézt v [2] nebo v [3]). Vztah (2) se pak výrazně zjednoduší na tvar

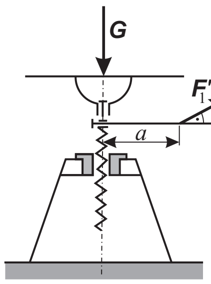
$$F_1 = F_G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \tag{3}$$

2. Budeme-li břemeno po nakloněné rovině spouštět, změní se směr třecí síly na opačný, což se ve vztahu (2) projeví ve znaménku třecího úhlu, tj. ve vztahu (3) je třeba zaměnit φ za $-\varphi$ a dostaneme vztah

$$F_2 = F_G \operatorname{tg}(\alpha - \varphi). \tag{4}$$

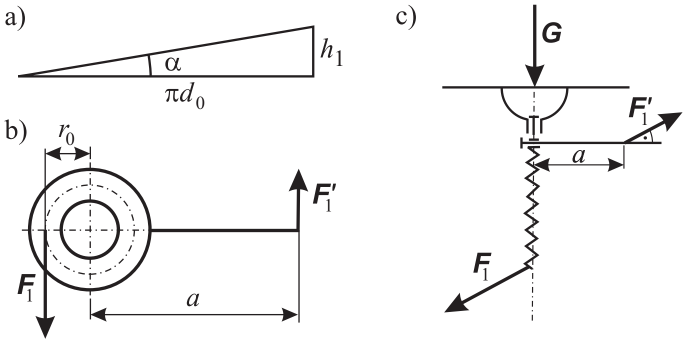
Šroubový zdvihák

Zvedat (spouštět) nějaké břemeno pomocí šroubového zdviháku si lze představit jako pohyb tělesa po nakloněné rovině s vodorovnou silou, protože šroubovici si lze po rozvinutí představit jako nakloněnou rovinu, jejíž úhel s vodorovnou rovinou je dán vztahem $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h_1}{\pi d_0}$, kde h_1 je tzv. *stoupání závitu*, d_0 je tzv. *střední průměr závitu* (obr. 22), $r_0 = \dfrac{d_0}{2}$ pak je střední poloměr závitu.



Obr. 21 Šroubový zdvihák 1

Připomeňme si, že pro zvedání platí vztah $F_1 = F_\mathrm{G}\,\mathrm{tg}(\alpha+\varphi)$, pro spouštění platí vztah $F_2 = F_\mathrm{G}\,\mathrm{tg}(\alpha-\varphi)$.



Obr. 22 Šroubový zdvihák 2

Příklad 6 – šroubový zdvihák

Šroubovým zdvihákem, jehož šroub má střední průměr 65 mm, budeme zdvihat břemeno o hmotnosti 50 kg. Jak velkou silou F_1' musíme působit na páce, jejíž rameno má délku $a = 500$ mm, při rovnoměrném zdvihání břemene, je-li stoupání šroubu $h_1 = 10$ mm (jedná se o šroub s plochým závitem). Součinitel smykového tření mezi závity zvedáku je $f = 0{,}1$ (obr. 21, 22).

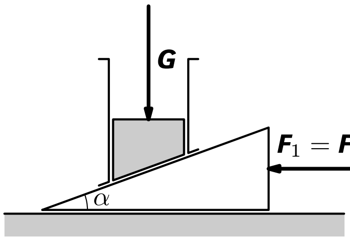
Řešení

Nejprve vypočteme úhly α a φ. Pro úhel α platí vztah $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{h_1}{\pi d_0} = \dfrac{10}{\pi\cdot 65}$, z čehož $\alpha = 2{,}80°$. Třecí úhel φ je dán vztahem $f = \mathrm{tg}\,\varphi = 0{,}1$, z čehož $\varphi = 5{,}71°$. Z rovnováhy na páce vyplývá, že $F_1' = \dfrac{r_0}{a}F_1$. Užitím vztahu (3) dostaneme $F_1 = \mathrm{tg}(2{,}80° + 5{,}71°)\cdot 50\cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 73\ \mathrm{N}$. Potom

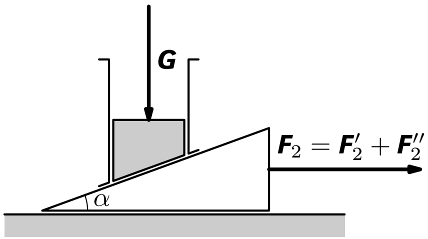
$$F_1' = \frac{32{,}5}{500}\cdot 73\ \mathrm{N} = 4{,}7\ \mathrm{N}.$$

2.1.3 Pohyb na klínu

Při silovém rozboru pohybu na klínu musíme brát v úvahu dvě situace: pohyb klínu po vodorovné rovině a pohyb klínu po nakloněné rovině (obr. 23, 24). V našich úvahách nebudeme uvažovat s hmotností klínu, jehož tíha je zanedbatelná vzhledem k zatížení klínu břemenem (tlakovou silou). V rámci zjednodušení budeme také předpokládat, že součinitel smykového tření f je pro obě stykové plochy stejný. Tření mezi vedením špalíku a špalíkem nebudeme uvažovat.



Obr. 23 Zarážení klínu



Obr. 24 Vytahování klínu

Zarážení klínu

Zarážení klínu je analogické pohybu po nakloněné rovině nahoru působením vodorovné síly. V této kapitole jsme již dříve odvodili vztah $F_1' = G \cdot \mathrm{tg}(\alpha + \varphi)$. Pro pohyb klínu po vodorovné rovině platí pro sílu mezi klínem a vodorovnou rovinou vztah $F_1'' = G \cdot f$. Pro velikost celkové síly tedy platí vztah

$$F_1 = F_1' + F_1'' = G \cdot \mathrm{tg}(\alpha + \varphi) + G \cdot f = G \cdot [\mathrm{tg}(\alpha + \varphi) + f].$$

Vytahování klínu

Vytahování klínu odpovídá pohybu po nakloněné rovině dolů působením vodorovné síly. Platí vztah $F_2' = G \cdot \mathrm{tg}(\alpha - \varphi)$. Pro pohyb klínu po vodorovné rovině platí pro sílu mezi klínem a vodorovnou rovinou vztah $F_2'' = G \cdot f$. Pro velikost celkové síly tedy platí vztah

$$F_2 = F_2' + F_2'' = G \cdot \mathrm{tg}(\alpha - \varphi) - G \cdot f = G \cdot [\mathrm{tg}(\alpha - \varphi) - f].$$

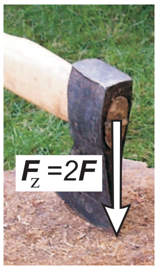
Poznámka

1. U všech doposud uvažovaných jednoduchých strojů jsme uvažovali, aniž bychom to nějak dále rozebírali, že břemeno zůstane ve své poloze, i když na ně už nebudeme působit jakoukoli silou. Tato vlastnost se nazývá *samosvornost*.

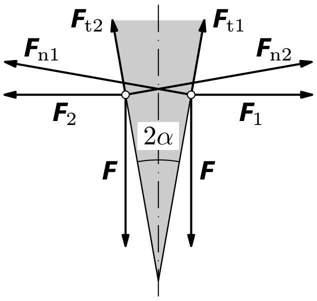
2. Podmínku samosvornosti lze odvodit ze situace, že budeme břemeno spouštět. Při spouštění totiž musíme vyvinout sílu opačného smyslu než při zvedání, tj. $F_2 = G \cdot \mathrm{tg}(\alpha - \varphi) \leq 0$, z čehož lze odvodit podmínku $\alpha \leq \varphi$.

2.1.4 Štípání dříví sekyrkou

Štípání dříví sekyrkou je další případ pohybu na nakloněné rovině. V tomto případě se bude jednat situaci, kdy se bude pohybovat dvojice nakloněných rovin, a to vlivem síly, která bude působit svisle dolů. Výslednice sil na jednotlivých plochách budou mít vodorovný směr a budou-li dostatečně velké, mohou roztrhnout požadovaný špalek dřeva. Udělejme si nyní silový rozbor této situace. Budeme uvažovat pohyb sekyrky směrem svisle dolů. Při štípání dřeva bude na sekyrku působit síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{z} = 2\boldsymbol{F}$. Vzhledem k symetrii sekyrky tuto sílu rozložíme tak, že na každé šikmé ploše sekyrky bude působit pouze její polovina, tj. pro každou plochu budeme počítat se silou $\boldsymbol{F}$ (obr. 25, 26).



Obr. 25 Štípání sekyrkou



Obr. 26 Síly působící na sekyrku

Podle obr. 26 je tedy možno říci, že na pravou plochu sekyrky působí síla $\boldsymbol{F}$ a kolmá tlaková síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}1}$; mezi touto plochou a dřevem pak působí proti směru pohybu sekyrky síla třecí $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}1}$. Výslednice $\boldsymbol{F}_1$ má vodorovný směr a způsobí roztržení dřeva. Stejnou úvahu je možno provést také pro levou šikmou plochu. My tento problém budeme řešit pro každou z těchto ploch zvlášť. Tíhu sekyrky v našich úvahách vzhledem k velikosti ostatních sil zanedbáme.

V dalším postupu bychom měli provést rozklad těchto sil do dvou navzájem kolmých směrů na každé ploše, jako v případě pohybu po nakloněné rovině svisle vzhůru působením vodorovné síly jako v části 2.1.2. Postup by byl analogický jako v části 2.1.2 (proveďte sami). Měli byste dospět k výsledku

$$F_1 = F_2 = \frac{\cos\alpha - f\sin\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha}\,F = \frac{1}{2}\,\frac{\cos\alpha - f\sin\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha}\,F_\mathrm{z}.$$

Pokud bychom tento výraz upravili užitím vztahu pro třecí úhel $\mathrm{tg}\,\varphi = f$, dostaneme vztah

$$F_1 = \frac{F}{\mathrm{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{1}{2}\,\frac{F_\mathrm{z}}{\mathrm{tg}(\alpha + \varphi)}. \tag{5}$$

Všimněte si, že tento vztah je analogickou obdobou vztahu (2).

Příklad 7 – štípání dříví

Uvažujte, že máte sekyrku, jejíž klín má úhel $2\alpha = 10°$. Součinitel smykového tření za pohybu mezi dřevem a ocelí sekyrky je $f = 0{,}4$. Vypočtěte poměr mezi silou, jakou působíte sekyrkou při nárazu na poleno $\boldsymbol{F}_{\mathrm{z}}$ a vodorovnou silou $\boldsymbol{F}_1$, která způsobí roztržení polene.

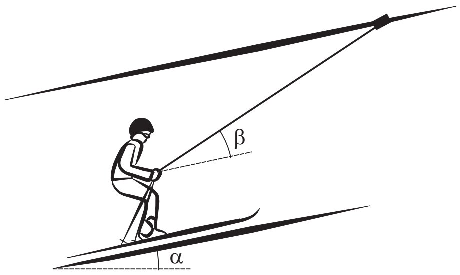
Řešení

Při řešení použijeme vztah (5), třecí úhel $\varphi = 22°$, $\alpha = 5°$. Dostaneme

$$\frac{F_1}{F_{\mathrm{z}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}(5° + 22°)} = 0{,}98 \doteq 1.$$

Cvičení 2

4. Uvažujte lyžaře z příkladu 4, který jede na jiném vleku, do kopce, který svírá s vodorovnou rovinou úhel $\alpha = 30°$, tažné lano je opět rovnoběžné se svahem, vlečné lano svírá s rovinou svahu úhel $\beta = 15°$ (obr. 27). Určete velikost síly, kterou je napínáno vlečné lano v tomto případě, pohybuje-li se lyžař rovnoměrně.



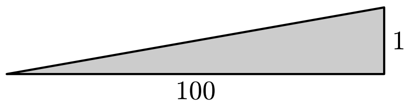
Obr. 27 Lyžař na vleku 2

5. Odvoďte vztah (4). Použijte postup analogický postupu při odvození vztahu (3).

6. Vypočtěte velikosti sil F_1 a F_2, které „utáhnou" břemeno o hmotnosti 100 kg po nakloněné rovině s úhlem $\alpha = 15°$, je-li součinitel smykového tření mezi nakloněnou rovinou a břemenem 0,1. Břemeno budeme nejprve rovnoměrně zvedat po nakloněné rovině vodorovnou silou $\boldsymbol{F}_1$ a pak následně rovnoměrně spouštět dolů působením vodorovné síly $\boldsymbol{F}_2$.

7. Odvoďte vztah (5) pomocí rozkladu sil z obr. 26.

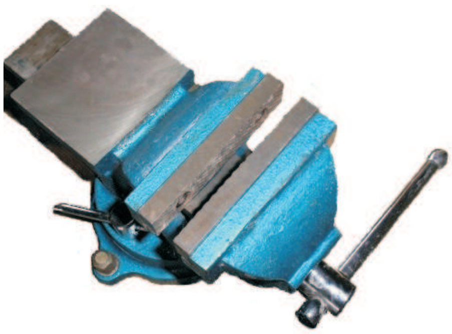
8. Klín, znázorněný na obr. 28, má při zaražení vyvinout tlakovou sílu 2 kN. Součinitel smykového tření je 0,15 (ocel – ocel). Určete, jak velkou silou F_1, je třeba působit na klín ve vodorovném směru, abychom ho zarazili a jak velkou silou F_2, abychom ho zase vytáhli ven. Klín má úkos 1:100. Ověřte také, zda je splněna podmínka samosvornosti, že se klín po zaražení samovolně neuvolní.



Obr. 28 Klín

9. Jakou silou musíme působit na konec páky šroubového lisu při utahování a povolování, abychom při středním průměru závitu $d_0 = 64$ mm a stoupání $h_1 = 6$ mm vyvinuli tlakovou sílu 5 kN? Délka páky je 50 cm. Součinitel smykového tření je 0,1. Ověřte, zda je lis samosvorný.

10. Stolní svěrák, znázorněný na obr. 28, je tvořen šroubem s plochým závitem o stoupání 5 mm a středním průměru 48 mm. Vlivem otáčení páky ve vzdálenosti 10 cm od osy otáčení uvádíme do pohybu jednu ze dvou rovnoběžných čelistí, které se v případě upínání součástky k sobě začnou přibližovat a nakonec součástku pevně sevřou. Součinitel smykového tření mezi závity šroubu a vedením šroubu je 0,1. Jak velkou silou budou působit čelisti při upnutí součástky, jestliže na kliku působíme silou 50 N?



Obr. 29 Stolní svěrák

2.2 Skládání a rozklad rovnoběžných sil

Příklad 8 – cyklista na lávce

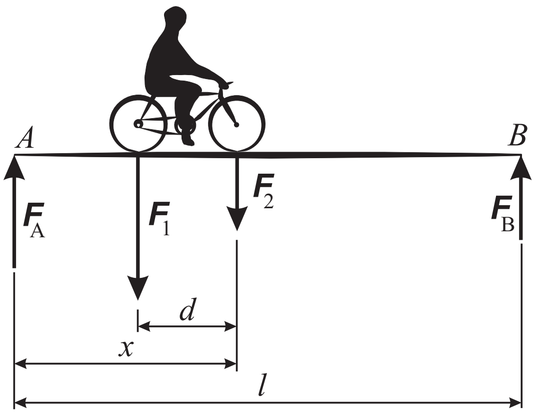
Cyklista o hmotnosti 60 kg i s kolem přejíždí po lávce o délce 10 m rychlostí 9 km · h^{-1}, g = 9,81 m·s^{-2}. Zatížení jednotlivých kol je v poměru 1 : 2 (více je zatíženo zadní kolo). Osy kol mají vzdálenost d = 1 m. Určete, jak se v průběhu pohybu cyklisty mění zatížení jednotlivých konců lávky v závislosti na čase. Při řešení uvažujte pouze situaci, že se cyklista nachází na lávce s oběma koly (nikoliv jen jedním kolem) bicyklu.

Obr. 30 Lávka

Určete dobu od okamžiku vjezdu cyklisty oběma koly na lávku, kdy je zatížení obou konců lávky stejně veliké. Vypočtěte také dobu, za kterou cyklista přejede lávku. Znázorněte také graficky závislost zatížení okrajů lávky v závislosti na čase. (Vše pouze pro situaci, že cyklista je oběma koly bicyklu na lávce.)

Hmotnost lávky v tomto výpočtu neuvažujte.

Řešení



Obr. 31 Síly, kterými bicykl působí na lávku

Vzhledem k bodu A platí:

$$F_2 \cdot x + F_1 \cdot (x - d) = F_B \cdot l.$$

Podle zadání je $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{2}{1}$, dále také platí $F_1 + F_2 = F_{\mathrm{G}}$, z čehož $F_1 = \dfrac{2}{3}F_{\mathrm{G}}$, $F_2 = \dfrac{1}{3}F_{\mathrm{G}}$. Po dosazení do výše uvedené rovnice dostaneme

$$\frac{1}{3}F_{\mathrm{G}} \cdot x + \frac{2}{3}F_{\mathrm{G}} \cdot (x - d) = F_{\mathrm{B}} \cdot l,$$

z čehož $F_{\mathrm{B}} = \dfrac{3x - 2d}{3l}F_{\mathrm{G}}$, $\{F_{\mathrm{B}}\} = -39{,}24 + 58{,}86\{x\}$. Vzhledem k tomu, že se cyklista pohybuje rovnoměrně, můžeme pro x psát: $x = d + vt$ (v čase $t = 0$ se cyklista zadním kolem „dotýká“ bodu A). Po dosazení dostaneme vztah

$$\{F_{\mathrm{B}}\} = 19{,}62 + 147{,}15\{t\}.$$

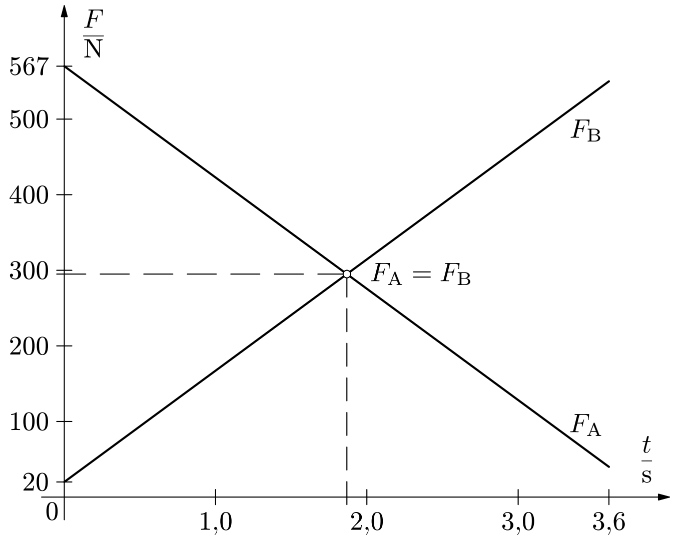
Pro F_{A} pak platí, že

$$F_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{G}} - F_{\mathrm{B}} = F_{\mathrm{G}} - \frac{3x - 2d}{3l}F_{\mathrm{G}}, \qquad \{F_{\mathrm{A}}\} = 568{,}98 - 147{,}15\{t\}.$$

Grafy „ukončíme“ v situaci, že se cyklista bude „dotýkat“ předním kolem lávky v bodě B. Stejné zatížení na obou koncích lávky nastane, je-li $F_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{B}}$, tedy platí, že

$$568{,}98 - 147{,}15t = 19{,}62 + 147{,}15t,$$

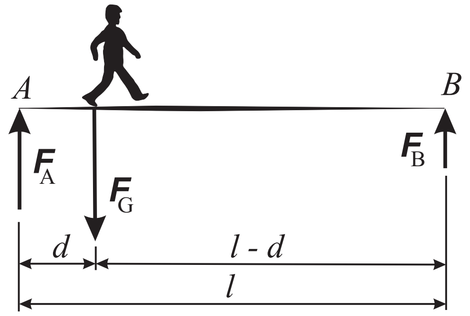
z čehož $t = 1{,}87\ \mathrm{s} \doteq 1{,}9\ \mathrm{s}$. Cyklista přejede lávku výše popsaným způsobem za dobu $T = \dfrac{l - d}{v} = \dfrac{10 - 1}{\dfrac{9}{3{,}6}}\ \mathrm{s} = 3{,}6\ \mathrm{s}$.



Obr. 32 Graf závislosti zatěžujících sil na čase

Příklad 9 – chodec na lávce

Přes lávku o délce 6 m jde chodec o hmotnosti 80 kg. Délka kroku chodce je 0,75 m. Určete, jak se změní zatížení konců lávky v závislosti na pohybu chodce (jeho jednotlivých krocích) (obr. 33). Uvažujte, že při dokončení kroku spočívá tíha chodce na noze, kterou má právě na zemi, $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.



Obr. 33 Síla, kterou chodec působí na lávku

Řešení

Na začátku chůze po lávce je lávka zatížena pouze na jednom konci, tj. $F_\mathrm{A} = 785$ N, $F_\mathrm{B} = 0$ N. Pak chodec učiní první krok – na konci 1. kroku je veškerá tíha chodce soustředěna na jedné noze ve vzdálenosti d od bodu A. Během chůze po lávce vykoná chodec $n = \dfrac{l}{d} = 8$ kroků.

Na konci 1. kroku: dle obr. 33 platí $F_\mathrm{A} \cdot d = F_\mathrm{B} \cdot (l - d)$ a zároveň $F_\mathrm{A} + F_\mathrm{B} = F_\mathrm{G}$, z čehož $\dfrac{F_\mathrm{A}}{F_\mathrm{B}} = \dfrac{l-d}{d} = \dfrac{l}{d} - 1 = \dfrac{6}{0{,}75} - 1 = 7$. Potom $F_\mathrm{A} = \dfrac{7}{8} \cdot 80 \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 687\ \mathrm{N}$, $F_\mathrm{B} = \dfrac{1}{8} \cdot 80 \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 98\ \mathrm{N}$.

Na konci 2. kroku: obdobně jako na konci 1. kroku platí $F_\mathrm{A} \cdot 2d = F_\mathrm{B} \cdot (l - 2d)$ a zároveň $F_\mathrm{A} + F_\mathrm{B} = F_\mathrm{G}$, z čehož $\dfrac{F_\mathrm{A}}{F_\mathrm{B}} = \dfrac{l-2d}{2d} = \dfrac{l}{2d} - 1 = \dfrac{6}{2 \cdot 0{,}75} - 1 = 3$. Potom $F_\mathrm{A} = \dfrac{3}{4} \cdot 80 \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 589\ \mathrm{N}$, $F_\mathrm{B} = \dfrac{1}{4} \cdot 80 \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 196\ \mathrm{N}$.

Po dalším kroku: obdobně jako na konci předchozího kroku platí

$$F_\mathrm{A} \cdot 3d = F_\mathrm{B} \cdot (l - 3d)$$

a zároveň $F_\mathrm{A} + F_\mathrm{B} = F_\mathrm{G}$, z čehož $\dfrac{F_\mathrm{A}}{F_\mathrm{B}} = \dfrac{l-3d}{3d} = \dfrac{l}{3d} - 1 = \dfrac{6}{3 \cdot 0{,}75} - 1 = \dfrac{5}{3}$.

Potom $F_\mathrm{A} = \dfrac{5}{8} \cdot 80 \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 491\ \mathrm{N}$, $F_\mathrm{B} = \dfrac{3}{8} \cdot 80 \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 294\ \mathrm{N}$.

Po n-tém kroku: obdobně jako na konci předchozího kroku platí

$$F_\mathrm{A} \cdot nd = F_\mathrm{B} \cdot (l - nd)$$

a zároveň $F_\mathrm{A} + F_\mathrm{B} = F_\mathrm{G}$, z čehož $\dfrac{F_\mathrm{A}}{F_\mathrm{B}} = \dfrac{l-nd}{nd} = \dfrac{l}{nd} - 1 = \dfrac{8}{n} - 1$.

Chodec přejde lávku po 8 krocích. Když je chodec na konci lávky, dostaneme $F_\mathrm{A} = 0\ \mathrm{N}$, $F_\mathrm{B} = 785\ \mathrm{N}$.

V průběhu jednotlivých kroků klesá velikost síly na začátku lávky po každém kroku o 98 N, o tutéž hodnotu velikost síly na druhém konci lávky stoupá.

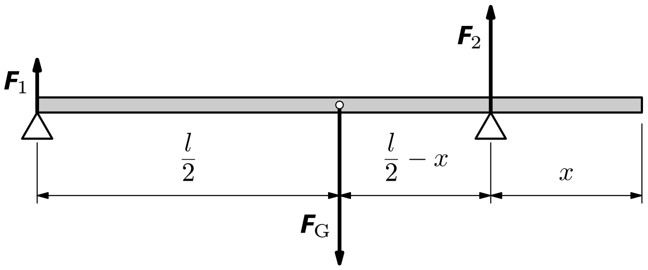
Příklad 10 – trámy

Obr. 34 Trámy

Dřevěné trámy ze suchého dřeva o hustotě $500\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ až $600\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ mají délku 8 m a průřez 16 cm × 14 cm. Odhadněte hmotnost trámu. Odhadněte, zda trám uzvedne jeden tesař a kde ho uchopí. Odhadněte, zda trám unesou dva tesaři. Záleží na tom, zda ho budou držet oba tak, že každý stojí na konci trámu nebo 1 metr od konce? Jakou zátěž bude představovat trám pro každého ze dvou tesařů, bude-li jeden držet trám zcela na konci a druhý 2 metry od druhého konce? Jednou trám nesli tesaři po delší trase, a tak vzadu chytil jeden z nich trám zcela na konci a další dva tesaři si přibili příčnou laťku kolmo k délce trámu a v tomto místě nesli trám oba společně. Kde měli umístit tyčku, aby všichni nesli stejně?

Řešení

Objem trámu je $V = 0{,}16 \cdot 0.14 \cdot 8\ \mathrm{m^3} = 0{,}18\ \mathrm{m^3}$. Hmotnost trámu odhadneme pomocí vztahu $m = \varrho \cdot V$, po dosazení $m = (90$ až $108)$ kg. Pro další výpočty budeme uvažovat $m = 100$ kg. Pokud by měl trám nést jeden tesař, musel by ho uchopit v těžišti, tj. ve vzdálenosti 4 m od jednoho z konců, ale takhle těžký trám by asi neunesl. Dva tesaři trám unesou, zátěž pro každého z nich bude $\dfrac{mg}{2}$ bez ohledu na to, zda trám nesou každý na jednom konci nebo každý ve vzdálenosti 1 m od konce. Jiná situace by nastala, pokud by jeden tesař nesl trám na konci a druhý 2 m od konce, což je schematicky znázorněno na obr. 35.



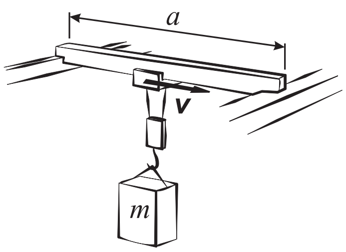
Obr. 35 Přenášení trámu

Z obr. 35 vyplývá podmínka rovnováhy: $F_1 \cdot \frac{l}{2} = F_2 \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right)$, po dosazení za $l = 8$ m a $x = 2$ m dostaneme $\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{2}$. Protože zároveň platí, že $F_1 + F_2 = F_G$, dostaneme $F_1 = 333$ N, $F_2 = 667$ N. V případě, že by trám nesli tři tesaři nesoucí stejně velkou zátěž, pak bychom mohli psát $F_1 = F$, $F_2 = 2F$. Po dosazení do obecné podmínky pro rovnováhu dostaneme

$$F \cdot \frac{l}{2} = 2F \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right), \text{ z čehož } x = \frac{l}{4} = 2 \text{ m}.$$

Cvičení 3

11. Mostový jeřáb o nosnosti 10 tun má na háku zavěšeno břemeno o hmotnosti $m = 5$ tun. Jeřábová kočka se pohybuje po mostu o šířce $a = 20$ m rychlostí o velikosti $v = 0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Stanovte, jak se mění zatížení na obou koncích mostu v závislosti na čase.



Obr. 36 Mostový jeřáb

12. Určete namáhání lan, na kterých je zavěšeno břemeno na háku jeřábu v předchozí úloze, víte-li, že úhel, který svírají lana mezi sebou je 120°.

13. Osobní automobil má přední nápravu zatíženou silou 6 800 N, zadní nápravu silou 8 900 N. Vzdálenost mezi osami náprav (tzv. *rozvor*) je 2 450 mm. Určete vzdálenost vektorové přímky těchto sil od přední nápravy.

3 Těžiště tělesa

Než tento pojem zavedeme, zkuste provést následující pokus. Vezměte smeták s násadou a provázek. Na jednom konci provázku udělejte oko a provlékněte jím násadu smetáku, druhý konec provázku upevněte někde ve výšce, např. přivažte k větvi stromu (obr. 37).

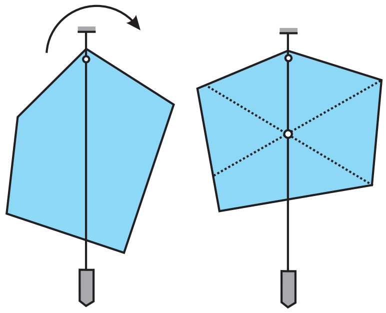
Obr. 37 Smeták

Nyní postupně měňte polohu oka vůči násadě smetáku a snažte se dostat tyč smetáku do vodorovné polohy.

V okamžiku, kdy se vám to povede, pak můžeme říci, že nastala rovnováha a že výslednice všech momentů tíhových sil je nulová. Jinak řečeno: nastala rovnováha momentů tíhových sil působících na smeták – nalezli jste x-ovou souřadnici *těžiště*.

Co tedy přesně znamená, když o nějakém předmětu řekneme, že má těžiště? Umístíme-li těleso určitým způsobem např. tak, že jej v nějakém bodě zavěsíme, pak zaujme stabilní rovnovážnou polohu, ve které se otáčivý účinek tíhových sil působících na jednotlivé části tělesa ruší.

Vektorová přímka výsledné tíhové síly – – těžnice – tedy prochází bodem závěsu. Výslednou tíhovou sílu můžeme ovšem přenést do libovolného bodu těžnice. Pro libovolný bod těžnice platí momentová věta. Abychom zavěšováním určili působiště tíhové síly jednoznačně, musíme měnit bod závěsu, čímž se mění poloha těžnice v tělese. Všechny těžnice pak procházejí týmž bodem – těžištěm tělesa (obr. 38).

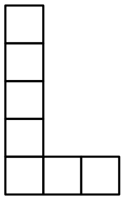


Obr. 38 Zjišťování polohy těžiště

V případě některých geometricky jednoduchých homogenních útvarů a těles však máme problém hledání polohy těžiště značně zjednodušen: využíváme symetrie těchto těles, např. těžiště tenké homogenní čtvercové desky (dále jen desky) tvaru čtverce nebo obdélníku se nachází v průsečíku úhlopříček, o těžišti desky tvaru trojúhelníku již víte, že je průsečíkem tzv. *těžnic*, definovaných jako spojnice vrcholů se středy protějších stran. Řadu těles a útvarů pak můžeme z těchto jednoduchých útvarů skládat. Polohu těžiště takových útvarů pak počítáme obdobně jako když skládáme síly a zjišťujeme polohu výslednice, což si dále ukážeme.

Příklad 11 – těžiště písmene „L“

Vypočtěte polohu těžiště písmene „L“ znázorněného na obr. 39. Délka strany jednoho čtverečku je a.



Obr. 39
Písmeno L

Řešení

Nejprve zavedeme soustavu souřadnic, a to tak, že za počátek soustavy souřadnic zvolíme levý dolní roh písmene L (obr. 39).

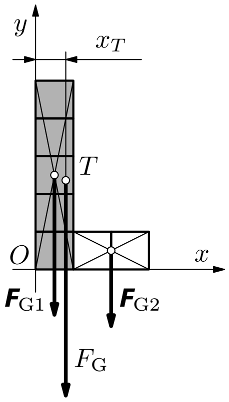
Nejprve určíme x-ovou souřadnici těžiště.
Písmeno L si můžeme představit, že se skládá se dvou obdélníků vyznačených na obr. 40. Vzhledem k bodu O platí

$$F_{\mathrm{G1}} \cdot \frac{a}{2} + F_{\mathrm{G2}} \cdot 2a = F_{\mathrm{G}} \cdot x_T.$$

Označme m hmotnost každého čtverečku.
Pak můžeme psát $F_{\mathrm{G1}} = 5mg$, $F_{\mathrm{G2}} = 2mg$, $F_{\mathrm{G}} = F_{\mathrm{G1}} + F_{\mathrm{G2}} = 7mg$. Po dosazení dostaneme

$$5mg \cdot \frac{a}{2} + 2mg \cdot 2a = 7mg \cdot x_T,$$

z čehož $x_T = \dfrac{13}{14}\, a = 0{,}93\, a$.

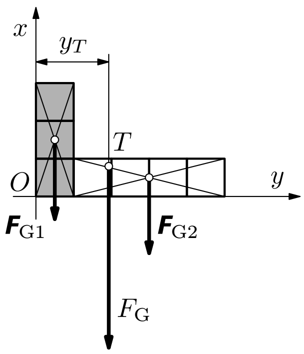


Obr. 40 Volba soustavy souřadnic

Abychom zjistili y-ovou souřadnici těžiště, celé písmeno L překlopíme tak, jak je znázorněno na obr. 41. Pak postupujeme stejně jako při výpočtu x-ové souřadnice, tj.

$$3mg \cdot \frac{a}{2} + 4mg \cdot 3a = 7mg \cdot y_T,$$

z čehož $y_T = \dfrac{27}{14}\, a = 1{,}93\, a$.
Těžiště písmene L tedy má souřadnice $[0{,}93\, a; 1{,}93\, a]$.



Obr. 41 y-ová souřadnice těžiště

Poznámka:

Na základě řešení příkladu 11 lze tedy obecně pro výpočet souřadnic těžiště napsat vztahy

$$x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}, \qquad y_T = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots},$$

popř. ještě

$$z_T = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}.$$

Příklad 12 – rovnání cihel

Řešte následující úlohy:

a) Dvě cihly jsou s přesahem položeny na sobě. Určete maximální přesah horní cihly, aby ještě zůstala ve vodorovné poloze.

b) Tři cihly jsou s přesahem položeny na sobě, a to tak, že druhá vůči první a třetí vůči druhé mají stejný přesah. Určete maximální přesah také v tomto případě. Délka cihly je $a = 30$ cm.

Obr. 42 Cihly

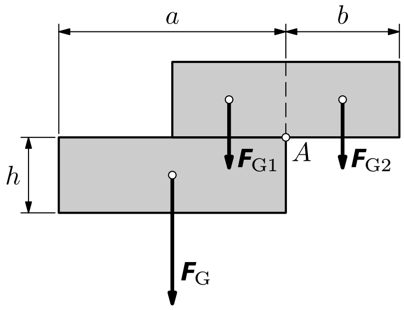
Řešení

a) Pokud dojde k překlopení horní cihly, bude se cihla naklápět podle hrany procházející bodem A. V rovnovážném stavu platí pro maximální vysunutí horní cihly podmínka:

$$Sh(a-b)\varrho g \cdot \frac{a-b}{2} = Shb\varrho g \cdot \frac{b}{2},$$

kde S je obsah podstavy cihly. Po úpravě dostaneme rovnici $(a-b)^2 = b^2$. Fyzikální význam má pouze řešení

$$b = \frac{a}{2} = 15 \text{ cm}.$$



Obr. 43 Dvě cihly

b) Pokud dojde k překlopení prostřední cihly, bude se cihla naklápět podle hrany procházející bodem A (obr. 44).

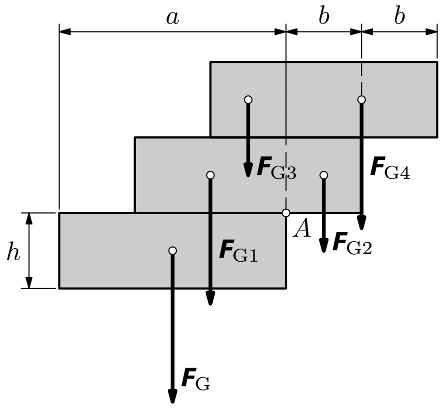
V rovnovážném stavu platí pro maximální vysunutí dvou horních cihel podmínka:

$$Sh(a-b)\varrho g \cdot \frac{a-b}{2} + Sh(a-2b)\varrho g \cdot \frac{a-2b}{2} = Sb\varrho g \cdot \frac{b}{2} + S \cdot 2b\varrho g \cdot b,$$

po úpravě

$$(a-b)^2+(a-2b)^2=b^2+4b^2,$$

z čehož $2a^2-6ab=0$. Fyzikální význam má pouze řešení $b=\dfrac{a}{3}=10$ cm.



Obr. 44 Tři cihly

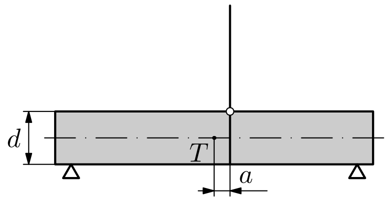
Cvičení 4

14. Navrhněte způsob, jak zvážit automobil, který veze dlouhé klády na podvozku. Pro vážení máte k dispozici pouze mostní váhu, která je kratší než je délka automobilu s podvozkem. Okolí mostní váhy je tvořeno vodorovnou rovinou.

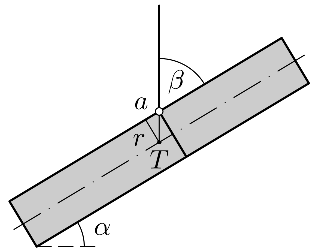
15. Autojeřáb má hmotnost 9 tun, vzdálenosti mezi nápravami jsou $a=1\,450$ mm, $b=3\,270$ mm (obr. 44). V nezatíženém stavu má autojeřáb všechny nápravy zatíženy stejně velkou silou. Určete polohu těžiště autojeřábu.

Obr. 45 Autojeřáb

16. Roura o průměru $d=30$ cm má být zvednuta jeřábem. Úvazek lana je umístěn ve vzdálenosti $a=9$ cm od těžiště. Určete úhel, který bude svírat roura s nosným lanem.

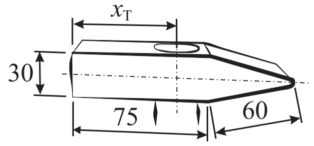


Obr. 46 Roura před zavěšením



Obr. 47 Roura po zavěšení

17. Když se vyrábí kladivo, je třeba, aby podélná osa násady procházela jeho těžištěm. Kladivo má rozměry znázorněné na obr. 48. Určete vzdálenost těžiště kladiva x_{T} od jeho levé hrany. Vzhledem k tomu, že podélná osa otvoru prochází těžištěm, se vliv otvoru pro neuplatňuje.



Obr. 48 Kladivo

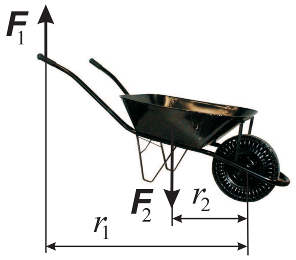
Řešení cvičení

Cvičení 1

1. Označíme indexem 1 veličiny na konci držadla, indexem 2 veličiny týkající se ořechu. Platí $F_1 r_1 = F_2 r_2$, z čehož $\dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{r_1}{r_2} \doteq 5$.

2. Dle zadání $\dfrac{d}{r} = 4$. Dále platí $F \cdot d = F_{\mathrm{G}} \cdot r$, z čehož $F = \dfrac{r}{d} \cdot F_{\mathrm{G}} = \dfrac{1}{4} \cdot 15 \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 37\ \mathrm{N}$. Při zvednutí vědra z hloubky 10 m musíme vykonat práci $W = F_{\mathrm{G}} \cdot h = 15 \cdot 9{,}81 \cdot 10\ \mathrm{J} = 1\,470\ \mathrm{J}$. Počet otáček rumpálu je $n = \dfrac{h}{2\pi r} = \dfrac{10}{2\pi \cdot 0{,}1} = 16$.

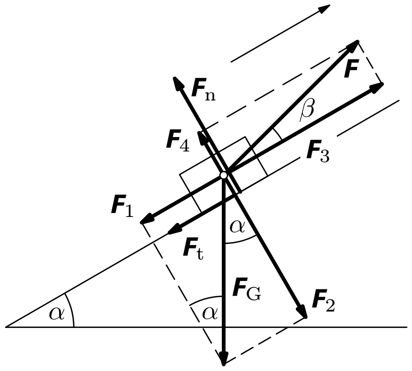
3. Označme indexem 1 veličiny na rukojeti, indexem 2 veličiny odpovídající těžišti pytle cementu a kolečka. Z obr. 46 je možno odečíst, že $\dfrac{r_1}{r_2} = 2{,}6$. Je-li $\boldsymbol{F}_1$ síla, kterou působí jedna ruka na rukojeť, pak můžeme psát $2F_1 r_1 = (m_1 + m_2) g r_2$, z čehož $F_1 = \dfrac{(m_1 + m_2)g}{2} \cdot \dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{62 \cdot 9{,}81}{2} \cdot \dfrac{1}{2{,}6}\ \mathrm{N} = 117\ \mathrm{N}$.



Obr. 49 Kolečko

Cvičení 2

4. Napíšeme podmínky rovnováhy.



Obr. 50 Jízda vlekem

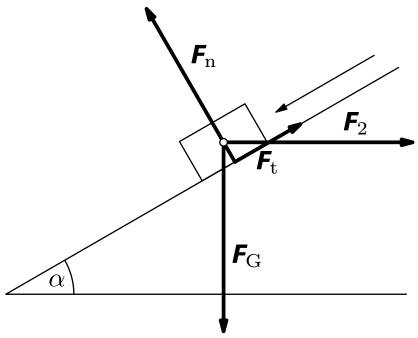
Z obr. 44 platí ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou $F_1 + F_\mathrm{t} - F_3 = 0$, ve směru kolmém na nakloněnou rovinu $F_2 - F_4 - F_\mathrm{n} = 0$. Tyto rovnice ještě doplníme vztahem pro výpočet třecí síly $F_\mathrm{t} = F_\mathrm{n} \cdot f$.
Po dosazení z obr. 50

$$mg\sin\alpha + F_\mathrm{n}\cdot f - F\cos\beta = 0,$$
$$mg\cos\alpha - F\sin\beta - F_\mathrm{n} = 0.$$

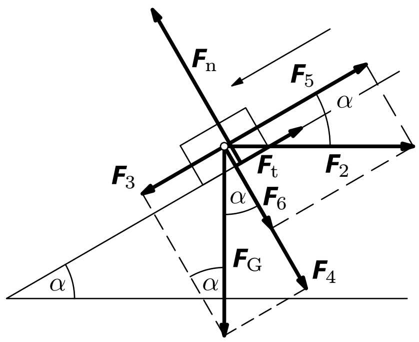
Řešením této soustavy rovnic dostaneme

$$F = mg\frac{\sin\alpha + f\cos\alpha}{\cos\beta + f\sin\beta} = 80\cdot 9{,}81\cdot\frac{\sin 30^\circ + 0{,}05\cdot\cos 30^\circ}{\cos 15^\circ + 0{,}05\cdot\sin 15^\circ}\ \mathrm{N} = 440\ \mathrm{N}.$$

5. Určíme velikost vodorovně působící síly $\boldsymbol{F}_2$, která „utáhne“ břemeno o hmotnosti m na nakloněné rovině, která svírá s vodorovnou rovinou úhel α. Součinitel smykového tření mezi břemenem a nakloněnou rovinou je f.



Obr. 51 Síly působící na břemeno



Obr. 52 Rozklad sil

Nejprve si zakreslíme síly, které na těleso působí (obr. 51). Tyto síly pak rozložíme do dvou navzájem kolmých směrů: rovnoběžného s nakloněnou rovinou, kolmého na nakloněnou rovinu (obr. 52). Budeme uvažovat, že břemeno se pohybuje na nakloněné rovině rovnoměrně.

Ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou platí

$$-F_\mathrm{t} + F_3 - F_5 = 0.$$

Ve směru kolmém na nakloněnou rovinu je

$$F_\mathrm{n} - F_4 - F_6 = 0.$$

Tyto dvě rovnice doplníme ještě vztahem pro smykové tření $F_\mathrm{t} = F_\mathrm{n} \cdot f$.
Podle obr. 52 pak dále můžeme psát $F_3 = F_\mathrm{G} \sin\alpha$, $F_5 = F_2 \cos\alpha$, $F_4 = F_\mathrm{G} \cos\alpha$, $F_6 = F_2 \sin\alpha$, což dále dosadíme do výše uvedených vztahů. Dostaneme

$$\begin{aligned} -F_\mathrm{n} \cdot f + F_\mathrm{G} \sin\alpha - F_2 \cos\alpha &= 0, \\ F_\mathrm{n} - F_\mathrm{G} \cos\alpha - F_2 \sin\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Dále budeme postupovat tak, že z druhé rovnice vyjádříme
$F_\mathrm{n} = F_\mathrm{G} \cos\alpha + F_2 \sin\alpha$ a dosadíme do první rovnice, tj.

$$-(F_\mathrm{G} \cos\alpha + F_2 \sin\alpha) \cdot f + F_\mathrm{G} \sin\alpha - F_2 \cos\alpha = 0.$$

Z této rovnice pak vyjádříme

$$F_2 = \frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\cos\alpha + f\sin\alpha} F_\mathrm{G}. \tag{6}$$

Vztah (5) pak upravíme dříve popsaným postupem na

$$F_2 = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\alpha} F_\mathrm{G}.$$

Tento vztah je možno dále zjednodušit užitím tzv. *součtového vzorce*

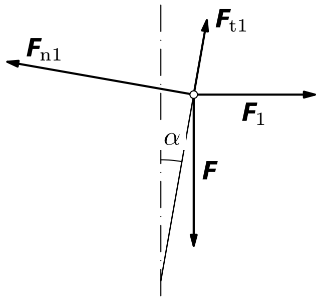
$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}(\alpha - \varphi),$$

se kterým se v matematice seznámíte později (vzorec je možno nalézt v [2] nebo v [3]). Vztah (2) se pak výrazně zjednoduší na tvar

$$F_2 = F_\mathrm{G} \operatorname{tg}(\alpha - \varphi).$$

6. $F_1 = mg \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) = 100 \cdot 9{,}81 \cdot \operatorname{tg}(15^\circ + 5{,}71^\circ)\ \mathrm{N} = 370\ \mathrm{N}.$
$F_2 = mg \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) = 100 \cdot 9{,}81 \cdot \operatorname{tg}(15^\circ - 5{,}71^\circ)\ \mathrm{N} = 160\ \mathrm{N}.$

7. Postup je obdobný jako v 2.1.2 a v úloze 5. Budeme řešit pro jednu plochu z obr. 26. Napíšeme pouze náznak řešení, ostatní proveďte už sami.



Obr. 53 Rozklad sil

Ve směru rovnoběžném s nakloněnou rovinou platí:

$$F_{t1} + F_1 \sin\alpha - F\cos\alpha = 0.$$

Ve směru kolmém na nakloněnou rovinu platí:

$$F_{n1} - F_1 \cos\alpha - F\sin\alpha = 0.$$

Doplňující podmínka: $F_{t1} = f \cdot F_{n1}$.
Řešením této soustavy rovnic dříve uvedeným postupem dostaneme $F = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi} F_1$.

Další postup spočívá v užití součtového vzorce a pak vyjádřit F_1, nakonec ve vzorci nahradit sílu F silou $F = \dfrac{1}{2}F_z$.

8. Podle zadání platí $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}01$, z čehož $\alpha = 0{,}57°$; $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}15$, z čehož $\varphi = 8{,}53°$. Protože $\alpha < \varphi$, je klín samosvorný, tj. zůstane zaražený beze změny, i když síla přestane působit.

Pro zasouvaní platí $F_1 = 2 \cdot 10^3 \cdot [\operatorname{tg}(0{,}57° + 8{,}53°) + 0{,}15]\ \mathrm{N} = 620\ \mathrm{N}$.

Pro vytahování platí $F_2 = 2 \cdot 10^3 \cdot [\operatorname{tg}(0{,}57° - 8{,}53°) - 0{,}15]\ \mathrm{N} = -580\ \mathrm{N}$. Znaménko minus vyjadřuje, že síla F_2 má opačný směr, než jsme původně předpokládali (obr. 51, 52).

9. Podle zadání $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{s}{\pi d_0} = \dfrac{6}{\pi \cdot 64}$, z čehož $\alpha = 1{,}71°$; $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}1$, z čehož $\varphi = 5{,}71°$. Protože $\alpha < \varphi$, je lis samosvorný. Při lisování

$$F_1' = F_1 \cdot \frac{d_0}{2r} = 5 \cdot 10^3 \cdot \operatorname{tg}(1{,}71° + 5{,}71°) \cdot \frac{64}{2 \cdot 500}\ \mathrm{N} = 42\ \mathrm{N}.$$

Při povolování lisu

$$F_2' = F_2 \cdot \frac{d_0}{2r} = 5 \cdot 10^3 \cdot \operatorname{tg}(1{,}71° - 5{,}71°) \cdot \frac{64}{2 \cdot 500}\ \mathrm{N} = -22\ \mathrm{N}.$$

Síla $\boldsymbol{F}_2$ má opačný směr, než jsme původně předpokládali (než síla $\boldsymbol{F}_1$).

10. Podle zadání $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h_1}{\pi d_0} = \dfrac{5}{\pi \cdot 78}$, z čehož $\alpha = 1{,}90°$; $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}1$, z čehož $\varphi = 5{,}71°$. Protože $\alpha < \varphi$, je svěrák samosvorný.
Dále platí $F_1' \cdot r = F_1 \cdot \dfrac{d_0}{2}$, z čehož $F_1 = \dfrac{2F_1'r}{d_0} = \dfrac{2 \cdot 50 \cdot 0{,}1}{0{,}048}\ \mathrm{N} = 208\ \mathrm{N}$. Pro utahování platí $F_1 = F_G \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$,
z čehož $F_G = \dfrac{F_1}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \dfrac{208}{\operatorname{tg}(1{,}90° + 5{,}71°)}\ \mathrm{N} = 1\,560\ \mathrm{N}$.

Cvičení 3

11. Označme $\boldsymbol{F}_1$ sílu působící na levé vedení, $\boldsymbol{F}_2$ sílu působící na pravé vedení. Platí $F_2 \cdot a = mg \cdot vt$, z čehož $F_2 = mg \cdot \frac{vt}{a}$. Obdobně $F_1 = mg\frac{a - vt}{a} =$ $= mg\left(1 - \frac{vt}{a}\right)$. Pro dané hodnoty je

$$F_1 = 5 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81\left(1 - \frac{0{,}5\{t\}}{20}\right)\ \mathrm{N} = (49\,050 - 1\,226\,\{t\})\ \mathrm{N},$$

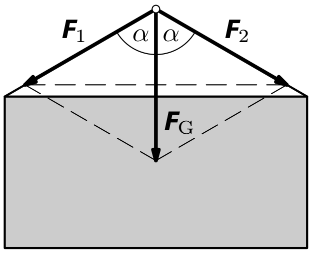
$$F_2 = 5 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81\frac{0{,}5\{t\}}{20}\ \mathrm{N} = 1\,226\,\{t\}\ \mathrm{N}.$$

12. Tíhovou sílu rozložíme na dvě složky ve směru závěsu (obr. 54). Podle obr. 54 platí

$$\cos\alpha = \frac{\frac{F_\mathrm{G}}{2}}{F_1},\ \text{z čehož}\ F_1 = \frac{F_\mathrm{G}}{2\cos\alpha} = F_2.$$

Pro dané hodnoty je

$$F_1 = F_2 = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81}{2 \cdot \cos 60°}\ \mathrm{N} = 49\,050\ \mathrm{N} = F_\mathrm{G}.$$



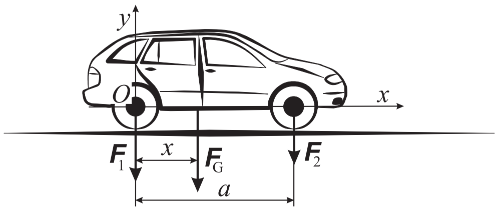
Obr. 54 Zavěšení břemene

13. Podle obr. 55 je zřejmé, že platí $F_1 + F_2 = F_\mathrm{G}$ a zároveň $(F_1 + F_2) \cdot (a - x) = F_2 \cdot a$. Z toho

$$a - x = \frac{F_2}{F_1 + F_2} \cdot a.$$

Pro dané hodnoty je

$$a - x = \frac{6\,800}{8\,900 + 6\,800} \cdot 2\,450\ \mathrm{mm},$$



Obr. 55 Automobil

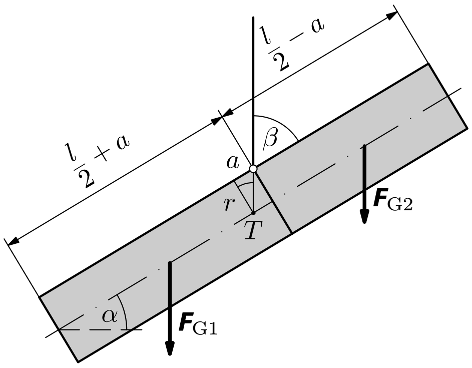
tj. $a - x = 1\,060$ mm, což je hledaná vzdálenost těžiště od přední nápravy.

Cvičení 4

14. Najet postupně jednotlivými nápravami na mostní váhu, zvážit jednotlivé části. Výsledná hmotnost je pak rovna součtu všech naměřených údajů.

15. Vzdálenost těžiště od přední nápravy označíme x_T. Vzhledem k tomu, že jsou všechny nápravy zatíženy stejně, platí $F \cdot b + F \cdot (a + b) = F_\mathrm{G} \cdot x_T$ a zároveň $F_\mathrm{G} = 3F$, z čehož $x_T = \frac{1}{3}(a + 2b) = \frac{1}{3} \cdot (1\,450 + 2 \cdot 3\,270)\ \mathrm{mm} = 2\,660\ \mathrm{mm}$.

16. Budeme uvažovat, že roura je homogenní o hustotě ϱ a má všude stejný průřez S. Označme $l_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2} + a\right)\cos\alpha - \frac{d}{2}\sin\alpha$,
$l_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{l}{2} - a\right)\cos\alpha + \frac{d}{2}\sin\alpha$ ramena sil $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G1}}$, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{G2}}$ – porovnejte s obr. 56.
Podle obr. 56 platí podmínka rovnováhy $S\cdot\left(\frac{l}{2}+a\right)\cdot\varrho\cdot l_1 = S\cdot\left(\frac{l}{2}-a\right)\cdot\varrho\cdot l_2$.



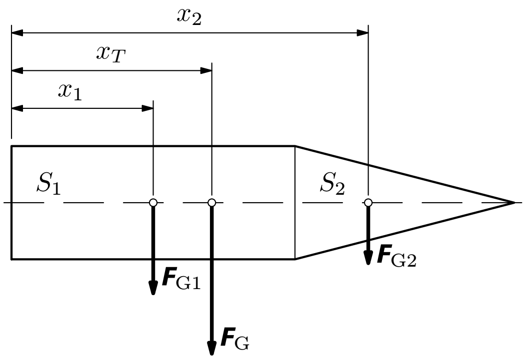
Obr. 56 Zavěšená roura

Po dosazení za l_1, l_2 a úpravě dostaneme $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2a}{d} = \frac{2\cdot 0{,}09}{0{,}30}$, z čehož $\alpha = 31°$; úhel trámu s nosným lanem $\beta = 90° - \alpha = 59°$.

Poznámka

Úlohu lze také řešit jen velmi jednoduše na základě úvahy, že těžiště roury se ustálí v poloze pod bodem upevnění závěsu. Pak platí podmínka $\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{a} = \frac{d}{2a}$.

17. Kladívko je schematicky znázorněno na obr. 57. Plochu znázorněnou na obr. 57 si můžeme představit složenou z obdélníku a trojúhelníku. Budeme uvažovat, že hmotnost jednotlivých částí kladívka je přímo úměrná ploše. Dále platí
$x_1 = \frac{75}{2}$ mm $= 37{,}5$ mm, $x_2 =$
$= \left(75 + \frac{1}{3}\sqrt{60^2 - 15^2}\right)$ mm $=$
$= 94{,}4$ mm.



Obr. 57 Kladívko

Pro plochy S_1, S_2 platí (obr. 57): $S_1 = 30\cdot 75\ \mathrm{mm}^2 = 2\,250\ \mathrm{mm}^2$,
$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot\sqrt{60^2 - 15^2}\ \mathrm{mm}^2 = 871{,}4\ \mathrm{mm}^2$.
Polohu těžiště určíme užitím vztahu $S_1x_1 + S_2x_2 = (S_1 + S_2)x_T$, z čehož
$x_T = \frac{S_1x_1 + S_2x_2}{S_1 + S_2} = 53$ mm.

Literatura

[1] BEDNAŘÍK, M., ŠIROKÁ, M.: *Fyzika pro gymnázia - Mechanika.* 3. vydání. Praha: Prometheus, 2000.

[2] MIKULČÁK, J. a kol.: *MFCh tabulky pro střední školy.* 4. vydání. Praha: Prometheus, 2009.

[3] MIKULČÁK, J. a kol.: *MFCh tabulky a vzorce pro střední školy.* 1. vydání. Praha: Prometheus, 2003.

[4] LEINVEBER, J. a kol.: *Strojnické tabulky.* Praha: Scientia, 1999.

[5] SALABA, S.– MATĚNA, A: *Mechanika I - statika.* Praha: SNTL, 1977.

[6] <http://en.wikipedia.org>.

[7] <http://cs.wikipedia.org>.

Zdroje obrázků

<http://www.barovenoviny.cz/imgs/image/>
<http://eshop.bobr.cz/images/>
<http://www.montkov.cz/img/foto/>
<http://www.eicoplus.cz/foto/produkty/>
<http://www.zipr.cz/images/>

Ostatní obrázky vytvořila Miroslava Jarešová.