Fyzika je kolem nás (Komplexní úlohy)

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Ivo Volf – Miroslava Jarešová

Obsah

Slovo úvodem ...

Milí čtenáři, předkládáme vám další část našeho projektu *Fyzika je kolem nás*. Zatím se nám podařilo vydat v klasické papírové formě ve vydavatelství MAFY Hradec Králové a současně uveřejnit na webovské stránce Ústřední komise Fyzikální olympiády řadu brožur, jejichž pořadí pro studium doporučujeme asi toto: *Poloha a její změny*, *Pohyb a síla*, *Práce - výkon - energie*, *Pohyby těles ve sluneční soustavě*, *Síla a tuhé těleso*, *Hydromechanika*. Každá brožura obsahuje stručný výklad a na konkrétních problémech z našeho okolí potom ukazuje, k čemu může být fyzikální poznání dobré či užitečné. Všechny tyto materiály můžete najít na stránce *http://fo.cuni.cz/* jako ps nebo pdf soubory, když se podíváte do části Archiv. Tam také najdete návod, jak si z daného materiálu vytisknete přímo brožuru do vaší knihovničky.

Náročnějšího čtenáře, který by chtěl řešit složitější fyzikální problémy, odkazujeme na novou webovou stránku *http://cental.uhk.cz/*, na které jsme publikovali *Fyzikální úlohy, řešené kvalifikovaným odhadem 1*; tyto úlohy jsou vybírány z učiva mechaniky a vesměs jsou poněkud náročnějšího charakteru, a to nejen co do způsobů a metod řešení, ale také formou zadání. Pro řešitele vyšších kategorií Fyzikální olympiády jsme pak v minulosti připravili několik studijních textů: *Vybíral: Statika tuhého tělesa, Vybíral: Kinematika a dynamika tuhého tělesa, Vybíral: Setrvačníky a jejich aplikace, Vybíral: Mechanika ideálních kapalin, Vybíral: Mechanika ideálních plynů, Vybíral: Aplikovaná mechanika tekutin*.

V tomto textu jsme původně mínili zařadit obtížnější úlohy jako přípravu k řešení fyzikálních úloh ze soutěže Fyzikální olympiáda, a to pod názvem *Komplexní úlohy*. Ukázalo se, že ačkoliv se kolem nás pohybuje obrovské množství valících se těles, této náročné formě pohybu se ve školní výuce fyziky skoro nevěnujeme. Proto se v předkládané části našeho projektu Fyzika kolem nás věnujeme porovnání posuvného a otáčivého pohybu, valivému pohybu jakožto spojení posuvu osy rotace a otáčivého pohybu kolem této osy, a samozřejmě řadě fyzikálních problémů, které jsou s valivým pohybem spojeny. Pokusili jsme se vyhnout náročnějšímu vektorovému výkladu pomocí momentu hybnosti (viz dále práce Vybíralovy), ale použili jsme energetickou metodu řešení problémů.

Protože je fyzika exaktní vědou využívající matematických modelů, ale současně zobecňující výsledky experimentování, zařadili jsme několik experimentálních úloh s návodem *Jak na to*.

Přejeme čtenářům, aby kromě přístupného poučování zažili také radost, která doprovází každé objevování a vyřešení fyzikálního problému.

Autoři

1 Posuvný pohyb tělesa po vodorovné rovině

V kinematice jsme zkoumali pohyb hmotného bodu z hlediska prostorově časových změn: zajímalo nás, jak se během průběhu času mění poloha tělesa, jeho rychlost, popř. zrychlení tělesa, jehož rozměry jsme nemuseli uvažovat.

Podívejme se např. na rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb tělesa, které se z klidového stavu začne pohybovat se zrychlením o velikosti a. Pro rychlost a dráhu platí $v = at$, $s = \frac{1}{2}at^2$.

Těleso může mít i počáteční rychlost ve směru pohybu, kterou označíme v_0. Potom $v = v_0 + at$, $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ pro případ, že se urychluje. V případě, že se bude těleso ve svém pohybu zpomalovat, nacházíme $v = v_0 - at$, $s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$. V tomto případě lze také stanovit dobu t_b, za kterou se těleso ve svém pohybu zastaví, tj. velikost výsledné rychlosti bude $v = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Potom odvodíme $0 = v_0 - at_\mathrm{b}$, tedy $t_\mathrm{b} = \frac{v_0}{a}$ je doba nutná k zastavení tělesa. Dráha, kterou těleso urazí do zastavení, se určí

$$s_\mathrm{b} = v_0 t_\mathrm{b} - \frac{1}{2}at_\mathrm{b}^2 = v_0 \cdot \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2}a \cdot \frac{v_0^2}{a^2} = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{1}{2}v_0 \cdot \frac{v_0}{a} = \frac{1}{2}v_0 t_\mathrm{b}.$$

Z dynamiky víme, že urychlující nebo zpomalující síla uděluje tělesu zrychlení (zpomalení), tj. platí $\boldsymbol{F} = m \cdot \boldsymbol{a}$, kde m je hmotnost pohybujícího se tělesa. Potom $\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}$.

Při rovnoměrně zrychleném pohybu z klidu platí $v = at = \frac{F}{m}t$. Po odstranění zlomku je $F \cdot t = m \cdot v$. Hybnost $\boldsymbol{p}$ je rovna impulsu působící síly, tj. $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}t$. Pro pohyb rovnoměrně zrychlený můžeme psát

$$v = v_0 + \frac{F}{m}t, \qquad F \cdot t = mv - mv_0 = p - p_0,$$

neboli, že změna hybnosti je rovna impulsu zrychlující síly.
Pro pohyb rovnoměrně zpomalený platí

$$v = v_0 - \frac{F}{m}t, \qquad -F \cdot t = mv - mv_0$$

a opět změna hybnosti tělesa je rovna impulsu brzdící síly.

Shrneme-li výše uvedené poznatky, můžeme psát pro pohyby rovnoměrně zpomalené nebo zrychlené

$$\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = m\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{F} \cdot \Delta t.$$

Zrychlující nebo zpomalující sílu $\boldsymbol{F}$ spojujeme s časovou změnou hybnosti, tj.

$$\boldsymbol{F} = \frac{\Delta\boldsymbol{p}}{\Delta t}.$$

Jestliže budeme sledovat dráhu tělesa uvedeného z klidu do pohybu působením síly o stálé velikosti F, potom vyjdeme z kinematiky (po doplnění vztahem $a = \frac{F}{m}$).

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a \cdot \frac{v^2}{a^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{\frac{F}{m}} = \frac{mv^2}{2F}.$$

Po úpravě $F \cdot s = \frac{1}{2}mv^2$, neboli práce zrychlující síly je rovna pohybové energii. Bude-li zrychlující síla měnit rychlost tělesa, jež se na počátku pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}_0$, platí

$$s = v_0t + \frac{1}{2}\frac{v - v_0}{t} \cdot t^2 = \frac{1}{2}(v + v_0)t = \frac{1}{2}(v + v_0) \cdot \frac{v - v_0}{\frac{F}{m}} = \frac{1}{2}m \cdot (v^2 - v_0^2) \cdot \frac{1}{F}.$$

Po úpravě

$$F \cdot s = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = E_\mathrm{k} - E_\mathrm{k0}.$$

Pro rovnoměrně zpomalený přímočarý pohyb s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ platí analogicky

$$s = v_0t + \frac{1}{2}\frac{v_0 - v}{t} \cdot t^2 = \frac{1}{2}(v + v_0)t = \frac{1}{2}(v + v_0) \cdot \frac{v_0 - v}{\frac{F}{m}} = \frac{1}{2}m \cdot (v_0^2 - v^2) \cdot \frac{1}{F}.$$

Po úpravě

$$F \cdot s = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = E_\mathrm{k0} - E_\mathrm{k}.$$

Při řešení poněkud složitějších úloh z mechaniky tedy můžeme použít našich znalostí z dynamiky zrychlených pohybů. Pro rovnoměrně zrychlený pohyb určíme dobu t, nutnou ke změně rychlosti, ze změny hybnosti způsobené silou $\boldsymbol{F}$, tj. užitím vztahu

$$F \cdot t = mv - mv_0, \text{ z čehož } \quad t = \frac{mv - mv_0}{F}. \tag{1}$$

Dráhu, nutnou k zastavování, pak určíme ze změny pohybové energie způsobené působící silou, tj.

$$F \cdot s = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2, \text{ z čehož } \quad s = \frac{mv^2 - mv_0^2}{2F}. \tag{2}$$

Pro rovnoměrně zpomalený pohyb s počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ určíme dobu t, nutnou ke změně rychlosti, opět ze změny hybnosti způsobené silou $\boldsymbol{F}$, tj. užitím vztahu

$$F \cdot t = mv_0 - mv, \text{ z čehož } \quad t = \frac{mv_0 - mv}{F}. \tag{3}$$

Dráhu, nutnou ke zpomalování, pak určíme ze změny pohybové energie způsobené působící silou, tj.

$$F \cdot s = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2, \text{ z čehož } s = \frac{mv_0^2 - mv^2}{2s}. \tag{4}$$

Příklad 1 – rozjíždějící se vlak

Vlak o hmotnosti 400 tun se z klidu rozjíždí účinkem tahové síly 100 kN. Určete, jaké rychlosti dosáhne a jakou dráhu při tom urazí, bude-li síla působit po dobu 1,0 min.

Obr. 1 Vlak

Řešení

Nejprve stanovíme zrychlení $a = \dfrac{F}{m} = 0{,}25\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Pak nám stačí vztahy z kinematiky.
Určíme rychlost na konci rozjíždění $v = at = 15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Tuto rychlost vlak získá na dráze $s = \dfrac{1}{2}at^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}25 \cdot 60^2\ \mathrm{m} = 450\ \mathrm{m}$.

Úlohu můžeme také řešit jiným způsobem (přímo). Rychlost na konci rozjíždění určíme užitím vztahu (1), tj. $Ft = mv$, z čehož

$$v = \frac{Ft}{m} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 60}{400 \cdot 10^3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Dráhu, uraženou v průběhu rozjíždění, určíme užitím vztahu (2), tj. $Fs = \dfrac{1}{2}mv^2$, z čehož

$$s = \frac{mv^2}{2F} = \frac{400 \cdot 10^3 \cdot 15^2}{2 \cdot 100 \cdot 10^3}\ \mathrm{m} = 450\ \mathrm{m}.$$

Příklad 2 – brzdící automobil 1

Automobil o hmotnosti 1 200 kg jede rychlostí 54 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a začne brzdit účinkem síly 3,0 kN. Za jakou dobu a na jaké dráze zastaví? Jaké je zrychlení automobilu?

Obr. 2 Automobil

Řešení

Platí $Ft_{\mathrm{b}} = mv_0$, z čehož $t = \dfrac{mv_0}{F} = \dfrac{1\,200 \cdot 15}{3 \cdot 10^3}$ s $= 6{,}0$ s. Brzdnou dráhu vyjádříme ze vztahu $Fs = \dfrac{1}{2}mv_0^2$, tj. $s = \dfrac{mv_0^2}{2F} = \dfrac{1\,200 \cdot 15^2}{2 \cdot 3 \cdot 10^3}$ m $= 45$ m.
Zrychlení (zpomalení) pohybu určíme z 2. Newtonova pohybového zákona

$$a = \frac{F}{m} = \frac{3 \cdot 10^3}{1\,200}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Příklad 3 – brzdící automobil 2

Jak se změní výsledky v příkladu 2, kdyby brzdící síla měla velikost a) 0,8 původní hodnoty, b) 1,6 původní hodnoty?

Řešení

a) Doba brzdění je $t_{b1} = \dfrac{mv_0}{0{,}8F} = 1{,}25t = 1{,}25 \cdot 6{,}0$ s $= 7{,}5$ s, brzdná dráha je $s_1 = \dfrac{mv_0^2}{2 \cdot 0{,}8 \cdot F} = 1{,}25 \cdot s = 1{,}25 \cdot 45$ m $= 56$ m. Zpomalení automobilu je $a_1 = \dfrac{0{,}8F}{m} = 0{,}8a = 0{,}8 \cdot 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 2{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

b) Doba brzdění je $t_{b2} = \dfrac{mv_0}{1{,}6F} = 0{,}625t = 0{,}625 \cdot 6{,}0$ s $= 3{,}75$ s, brzdná dráha je $s_2 = \dfrac{mv^2}{2 \cdot 1{,}6 \cdot F} = 0{,}625 \cdot s = 0{,}625 \cdot 45$ m $= 28$ m. Zpomalení automobilu je $a_2 = \dfrac{1{,}6F}{m} = 1{,}6a = 1{,}6 \cdot 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 4{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Cvičení 1

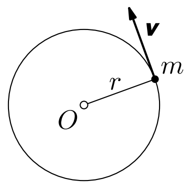
1. Cyklista jede rychlostí $45\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a náhle musí zabrzdit, aby stihl zastavit na dráze 20 metrů. Hmotnost cyklisty i s kolem je 80 kg. Za jak dlouho zabrzdí a jak velká musí být brzdná síla?

2. Cyklista je při jízdě schopen vyvinout po kratší dobu výkon 1,2 kW. Uvažujte, že odporová síla proti pohybu, kterou musí překonávat, závisí na druhé mocnině rychlosti, tj. $F_0 = kv^2$. Uvádíme-li všechny veličiny v jednotkách SI, potom $\{k\} = 0{,}30$. Jaké největší rychlosti při jízdě po rovině může cyklista dosáhnout?

Obr. 3 Cyklista

2 Pohyb hmotného bodu po kružnici a otáčivý pohyb tělesa

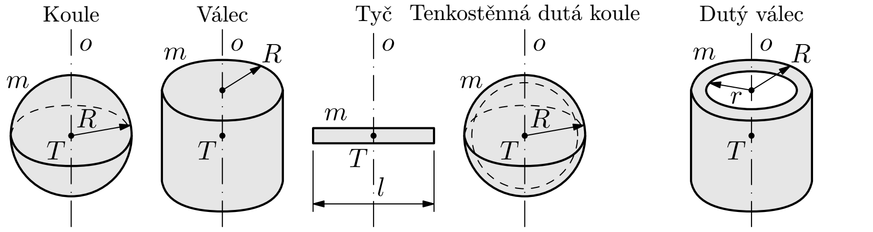
Ve výuce fyziky jsme se zabývali pohybem malého tělíska po kružnici o poloměru r. Zavedli jsme zde veličinu obvodová rychlost $v = \omega r$, kde ω je úhlová rychlost průvodiče.



Obr. 4 Pohyb po kružnici

Další veličiny, které popisují pohyb po kružnici, jsou doba oběhu T, frekvence $f = \dfrac{1}{T}$. Pro úhlovou rychlost ω pak platí vztah $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$, pro obvodovou rychlost $v = \dfrac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$. Při pohybu po kružnici působí na tělísko dostředivá síla $F_\mathrm{d} = m \cdot \dfrac{v^2}{r} = m \cdot \dfrac{4\pi^2}{T^2} r$.

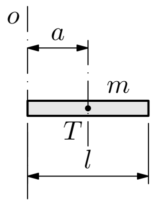
Těleso, které se otáčí kolem pevné osy procházející středem O koná *otáčivý* neboli *rotační* pohyb. Protože všechny body tělesa se za stejnou dobu otočí o stejný úhel a pohybují se po kružnici, můžeme analogicky jako při posuvném pohybu psát $\omega = \dfrac{\varphi}{t} = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$. Části tělesa různě vzdálené od osy rotace mají různou obvodovou rychlost $v_i = \omega r_i$ a pohybovou energii $E_{\mathrm{k}i} = \dfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$. Chceme-li určit celkovou pohybovou energii tělesa, potom $E_\mathrm{k} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \dfrac{1}{2}\omega^2 \sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i^2$. Součet $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ označíme J a nazveme *moment setrvačnosti* tělesa; závisí na hmotnosti, rozměrech a také na rozložení látky kolem osy rotace. Výraz pro pohybovou energii rotujícího tělesa $E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2} J\omega^2$ vyžaduje, abychom znali moment setrvačnosti různých těles vzhledem k okamžité ose rotace.



$J_0 = \dfrac{2}{5} mR^2$ $J_0 = \dfrac{1}{2} mR^2$ $J_0 = \dfrac{1}{12} ml^2$ $J_0 = \dfrac{2}{3} mR^2$ $J_0 = \dfrac{1}{2} m(R^2 + r^2)$

Obr. 5 Momenty setrvačnosti některých těles

Pokud by osa otáčení neprocházela těžištěm, vypočítá se moment setrvačnosti J vzhledem k této ose pomocí tzv. *Steinerovy věty*, tj. $J = J_0 + ma^2$, kde J_0 je moment setrvanosti tělesa vzhledem k ose procházející těžištěm, a je vzdálenost osy otáčení od osy procházející těžištěm, m je hmotnost tělesa (obr. 6).



Obr. 6 Tyč s osou otáčení na konci

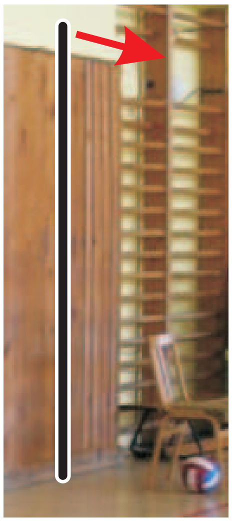
Např. moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose procházející jejím koncem vypočteme jako

$$J = J_0 + ma^2 = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}ml^2,$$

kde jsme dosadili $a = \frac{l}{2}$.

Příklad 4 – padající tyč

Podél stěny v tělocvičně stojí svisle homogenní tyč o hmotnosti 10 kg a délce 3 m (obr. 7). Neposedný žák vylezl na ribstol a tyč od stěny odstrčil. Po odstrčení horního konce se tyč dala do otáčivého pohybu kolem spodního konce a začala se sklánět k zemi. Určete, jakou úhlovou rychlostí dopadla tyč na podlahu. Jakou obvodovou rychlostí dopadl na podlahu horní konec tyče?



Obr. 7 Tyč

Řešení

Stojící tyč o délce l má polohovou energii $E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}mgl$.
V okamžiku dopadu je pohybová energie tyče

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2.$$

Platí $\frac{1}{2}mgl = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$, z čehož
$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} = \sqrt{\frac{3\cdot 9{,}8}{3}}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}} = 3{,}1\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$. Horní konec tyče má rychlost $v = l\cdot\omega = \sqrt{3gl} = \sqrt{3\cdot 9{,}8\cdot 3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 9{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Příklad 5 – lopatky větrné elektrárny

Koncem roku 2009 byly u obce Věžnice v kraji Vysočina uvedeny do provozu dvě větrné elektrárny, jejichž osy rotorů jsou ve výšce 80 metrů. Na osách jsou upevněny lopatky o délce 46,3 m, které konají rotační pohyb s frekvencí $0{,}2\ \mathrm{s^{-1}}$. Jaká je rychlost konců lopatek? Proč jsou větrné elektrárny nebezpečím pro ptáky?

Řešení

Vypočteme obvodovou rychlost lopatek

$$v = \omega l = 2\pi f l = 2\pi \cdot 0{,}2 \cdot 46{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 58{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 210\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

Nebezpečím pro ptáky jsou srážky ptáka s lopatkami vrtulí, protože konce lopatek se pohybují nebezpečně velkou rychlostí.

Příklad 6 – Země a Slunce

Z pohledu našeho vesmíru můžeme Zemi a Slunce považovat za hmotné body. Víme, že poloměr oběžné trajektorie Země kolem Slunce je 149 600 000 km a doba oběhu Země kolem Slunce je 365,256 dne. Hmotnost Země je $M_z = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, hmotnost Slunce je $M_S = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg. Určete rychlost, zrychlení i dráhu pohybu Země při jednom oběhu kolem Slunce. Určete také velikost vzájemné přitažlivé síly mezi oběma tělesy.

Obr. 8 Země

Řešení

Dráha Země při jednom oběhu kolem Slunce je $s = 2\pi r = 2\pi \cdot 149{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{km} = 9{,}4 \cdot 10^8\ \mathrm{km}$, rychlost oběhu Země kolem Slunce je $v = \dfrac{2\pi}{T} r = \dfrac{2\pi}{365{,}256 \cdot 86\,400} \cdot 149{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{km \cdot s^{-1}} = 29{,}8\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ a zrychlení $a = \omega^2 r = \dfrac{4\pi^2}{T^2} r = \dfrac{4\pi^2}{(365{,}256 \cdot 86\,400)^2} \cdot 149{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0{,}005\,9\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Mezi oběma tělesy působí přitažlivá síla

$$F = F_g = M_Z a = 5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 0{,}005\,9\ \mathrm{N} = 3{,}55 \cdot 10^{22}\ \mathrm{N}.$$

Jiný způsob, jak lze zjistit přitažlivou sílu, je užitím Newtonova gravitačního zákona

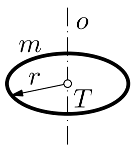
$$F_g = \varkappa \frac{M_Z \cdot M_S}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5{,}98 \cdot 10^{24} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{(149{,}6 \cdot 10^9)^2}\ \mathrm{N} = 3{,}55 \cdot 10^{22}\ \mathrm{N}.$$

Oba postupy vedou ke stejnému výsledku.

Porovnáme-li pohyb hmotného bodu po kružnici a otáčivý pohyb tělesa kolem osy, procházející jeho středem, pak zjišťujeme mnoho podobného. Doba oběhu bodu T_0 odpovídá době rotace T_r, frekvence $f = \dfrac{1}{T_0}$, úhlová rychlost průvodiče hmotného bodu $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$, úhlová rychlost otáčivého pohybu $\omega_r = \dfrac{2\pi}{T_r}$, obvodová rychlost hmotného bodu závisí na poloměru (délce průvodiče) r, $v_0 = \dfrac{2\pi r}{T_0} = \omega_0 r$. Při otáčivém pohybu se těleso jako celek nepohybuje, jeho poloha je vázána na osu rotace, ale každý bod tělesa má rychlost $v_i = r_i\omega$, neboť úhlová rychlost všech bodů tělesa je stejná. Rozdíl v silovém působení spočívá v tom, že na obíhající hmotný bod působí vnější dostředivá síla, v rotujícím tělese vyvolávají zrychlení částice vnitřní síly. Pro vyjádření výsledku musíme použít pojem moment síly $M = rF$. Proto brzdící síla využívaná u jízdního kola má působiště na obvodu pneumatiky, tj. v největší možné vzdálenosti od osy rotace.

Dalším rozdílem je pojetí pohybové energie. Hmotný bod při svém pohybu po kružnici má pohybovou energii $E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2}mv^2$, kde $v = r\omega$, tedy např. $\dfrac{1}{2}m \cdot r^2\omega^2$. Pohybová energie tělesa s momentem setrvačnosti J_0 vzhledem k ose rotace tělesa je $E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2}J_0\omega^2$, kde ω je úhlová rychlost otáčení.

Rotující těleso jako celek je vázáno na pevnou osu rotace, ale každý bod dosahuje určité rychlosti pohybu. Moment setrvačnosti je závislý na hmotnosti tělesa, jeho rozměrech a rozložení látky kolem osy rotace. Např. moment setrvačnosti obruče (obr. 9) je $J_0 = mr^2$, momenty setrvačnosti dalších těles jsou uvedeny na obr. 5.



$J_0 = mr^2$

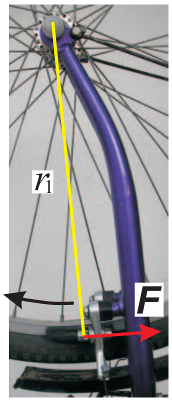
Obr. 9 Moment setrvačnosti obruče

Příklad 7 – brzdění kola bicyklu

Při čištění jízdního kola postavíme bicykl na řidítka a sedlo a pohybem ruky můžeme při tom udělit kolu rotaci. Doba jedné otáčky kola je 0,4 s. Vnější poloměr pláště kola je 30 cm, hmotnost kola odhadneme na $m = 2$ kg, střední poloměr pláště $r_1 = 28$ cm, moment setrvačnosti odhadneme jako pro obruč, tj. $J_0 = mr_1^2 = 2 \cdot 0{,}28^2\ \mathrm{kg \cdot m^2} = 0{,}16\ \mathrm{kg \cdot m^2}$.

a) Určete frekvenci, úhlovou rychlost, obvodovou rychlost a pohybovou energii předního kola bicyklu při rotaci udělené rukou u převráceného bicyklu.

b) Přítlačná síla čelistí zástavné brzdy je 20 N a působí ve vzdálenosti 25 cm od osy rotace. Jak ovlivňuje tato síla pohyb předního kola, je-li součinitel smykového tření mezi čelistí a ráfkem $\mu = 0{,}45$? Kolik otáček n vykoná přední kolo, než se působením třecí síly zastaví?



Obr. 10 Kolo bicyklu

Řešení

a) Doba rotace je $T = 0{,}4$ s, frekvence $f = \dfrac{1}{T} = 2{,}5\ \mathrm{s^{-1}}$, úhlová rychlost $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 2{,}5\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} = 15{,}7\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$. Rychlost bodů na obvodu pláště je $v = \omega r = 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 4{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 17\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Pohybová energie předního kola pak je $E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2} J_0 \omega^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}16 \cdot (2\pi \cdot 2{,}5)^2\ \mathrm{J} = 20\ \mathrm{J}$.

b) Velikost třecí síly $F_\mathrm{t} = F_\mathrm{n} \cdot \mu = 20 \cdot 0{,}45\ \mathrm{N} = 9\ \mathrm{N}$. Při jedné otáčce předního kola vykoná tato síla práci $W_1 = F_\mathrm{t} \cdot 2\pi r_1 = 9 \cdot 2\pi \cdot 0{,}25\ \mathrm{J} = 14\ \mathrm{J}$. Počet otáček potřebných k zastavení kola určíme z rovnosti spotřebované práce a kinetické energie. Platí $\Delta E_\mathrm{k} = n \cdot W_1$, z čehož $n = \dfrac{\Delta E_\mathrm{k}}{W_1} = \dfrac{20}{14}\ \mathrm{ot} = 1{,}4\ \mathrm{ot}$.

Dospěli jsme tedy k závěru, že vztahy pro pohyb hmotného bodu po kružnici a vztahy pro otáčivý pohyb tělesa kolem pevné osy spolu v mnohém korespondují.

Pokusme se ještě vyjádřit matematicky situace, které platí pro rovnoměrně zrychlený a rovnoměrně zpomalený pohyb malého tělesa po kružnici. Budeme uvažovat rovnoměrně zrychlený pohyb tělesa po kružnici o poloměru r. Nebude od věci si představit, že tělísko je spojeno se středem kružnice lankem, které prezentuje dostředivou sílu.

Jestliže se během doby t zvětšuje rovnoměrně (tj. přímo úměrně s časem) rychlost tělíska z klidu na hodnotu v, potom se také změní úhlová rychlost průvodiče (toho lanka) z nulové hodnoty na ω. Pokud bychom chtěli matematicky popsat změnu rychlosti pohybu, je nutno zavést další veličinu, tzv. *tečné zrychlení* $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$, které má směr tečny k trajektorii pohybu, v našem případě ke kružnici. Pro dráhové veličiny pohybu tělíska pak platí $v = a_\mathrm{t} t$, $s = \dfrac{1}{2} a_\mathrm{t} t^2$. Současně také víme, že $v = r\omega$, $s = r\varphi$. Tedy $r\omega = a_\mathrm{t} t$, z čehož $\omega = \dfrac{a_\mathrm{t}}{r} t$. Výraz $\dfrac{a_\mathrm{t}}{r}$ označíme ε a nazveme ho *úhlové zrychlení*. Pak můžeme psát $\omega = \varepsilon t$. Obdobně platí $\varphi = \dfrac{1}{2} \varepsilon t^2$.

Při rotačním pohybu tělesa můžeme vybrat libovolný bod, který neleží na ose rotace, a uvedené vztahy platí např. pro roztáčející se kolotoč nebo buben ždímačky.

Dalším případem je rovnoměrné zrychlování pohybu z nenulové rychlosti. Pro dráhové charakteristiky platí $v = v_0 + a_\mathrm{t} t$, $s = v_0 t + \dfrac{1}{2} a_\mathrm{t} t^2$. Pro úhlové charakteristiky (opět zvolíme $v = r\omega$) je

$$r\omega = r\omega_0 + r\varepsilon t, \text{ tedy } \omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$r\varphi = r\omega_0 t + \frac{1}{2} r\varepsilon t^2, \text{ tedy } \varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2.$$

Prakticky řečeno – pro veličiny φ, ω, ε, t platí analogické vztahy jako pro veličiny s, v, a_t, t, a to jak pro případ pohybu tělesa po kružnici o poloměru r, tak pro případ tělesa, konajícího otáčivý pohyb.

Zrychlený pohyb způsobuje síla $F = ma_\mathrm{t} = m\varepsilon r$. Již dříve jsme si zdůrazňovali, že při otáčivém pohybu je důležitá poloha působiště síly. Pro každý bod rotujícího tuhého tělesa pak můžeme také napsat vztah pro výpočet momentu působící síly (který v sobě zahrnuje i polohu působiště této síly)

$$M_i = r_i F_i = r_i m\varepsilon r_i = m r_i^2 \varepsilon.$$

Pro výsledný moment působících sil pak můžeme psát

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \varepsilon = J\varepsilon.$$

Ještě se podíváme na rovnoměrně zpomalený otáčivý pohyb. Uvědomili jsme si již v kinematice, že ve vztazích pro rychlost a dráhu (resp. úhlovou rychlost a úhlovou dráhu) se liší pouze znaménkem pro případ, že do vztahů dosazujeme velikost příslušných veličin. Proto bude platit analogicky

$$\begin{aligned} v &= v_0 - a_\mathrm{t} t & \quad\rightarrow\quad & \omega = \omega_0 - \varepsilon t, \\ s &= v_0 t - \frac{1}{2} a_\mathrm{t} t^2 & \quad\rightarrow\quad & \varphi = \omega_0 t - \frac{1}{2}\varepsilon t^2. \end{aligned}$$

Ze vztahu pro rychlost můžeme určit dobu, potřebnou k zastavení rotujícího tělesa, které je brzděno: $t_\mathrm{b} = \dfrac{\omega_0}{\varepsilon}$, a také úhel (v radiánech), který opíše průvodič zvoleného bodu od začátku brzdění až do úplného zastavení. Platí tedy

$$\varphi = \omega_0 \cdot \frac{\omega_0}{\varepsilon} - \frac{1}{2}\varepsilon \left(\frac{\omega_0}{\varepsilon}\right)^2 = \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot \omega_0 \cdot \frac{\omega_0}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\omega_0 t_\mathrm{b}.$$

U rotačního pohybu nás spíš než úhlová dráha φ zajímá počet otáček n, které rotující těleso vykonalo. Platí

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\omega_0^2}{4\pi\varepsilon} = \frac{\omega_0 t_\mathrm{b}}{4\pi}.$$

Příklad 8 – řetízkový kolotoč

Řetízkový kolotoč vykoná při provozní frekvenci jednu otáčku za dobu 7,5 s. Těžiště chlapce je přitom ve výšce h = 3,2 m nad terénem a ve vzdálenosti r = 6,4 m od osy rotace. Hmotnost chlapce je m = 50 kg. Chlapce považujte za hmotný bod.

a) Určete frekvenci a úhlovou rychlost chlapce při jízdě na kolotoči.
b) Určete rychlost a odstředivou sílu působící na chlapce. O jaký úhel se odchýlí řetízky od svislého směru?

c) Jaká je celková mechanická energie chlapce při rotaci kolotoče?

Dále uvažujte, že kolotoč se roztáčí po dobu 30 s, poté se 2,5 min otáčí stálou úhlovou rychlostí a po dobu 2,0 min se zastavuje. Oba proměnné pohyby považujte za rovnoměrně proměnné, tj. úhlová rychlost je lineární funkcí času.

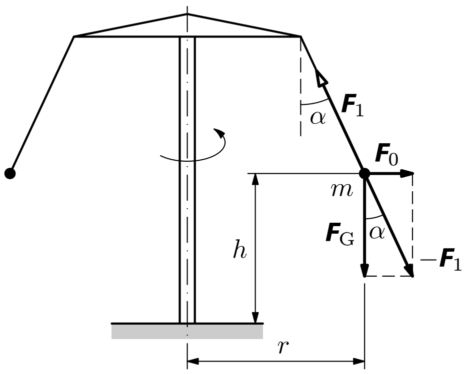
d) Jaké je úhlové zrychlení na počátku a na konci pohybu?

e) Kolik otáček absolvuje chlapec poté, co si zaplatil jednu jízdu?

f) Při jízdě chlapec upustil míček. Kam míček dopadne?

Řešení

a) Frekvence
$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{7{,}5}\ \mathrm{s}^{-1} = 0{,}133\ \mathrm{s}^{-1}$,
úhlová rychlost
$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{7{,}5}\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$,
$\omega = 0{,}84\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.



Obr. 11 Řetízkový kolotoč

b) Rychlost obíhání chlapce je $v = \omega r = 0{,}84 \cdot 6{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 5{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 19{,}3\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Úlohu budeme řešit v neinerciální soustavě souřadnic spojené s chlapcem.

Odstředivá síla působící na chlapce je
$F_\mathrm{o} = m\omega^2 \cdot r = m\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = 50 \cdot \frac{4\pi^2}{7{,}5^2} \cdot 6{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} = 225\ \mathrm{N}$.

Úhel, který svírají řetízky se svislým směrem, určíme z obr. 11. Platí

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_\mathrm{o}}{F_\mathrm{G}} = \frac{m\frac{4\pi^2}{T^2}r}{mg} = \frac{4\pi^2 r}{gT^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 6{,}4}{7{,}5^2 \cdot 9{,}8} = 0{,}458, \text{ z čehož } \alpha = 25°.$$

c) Potenciální energie chlapce je $E_\mathrm{p} = mgh = 50 \cdot 9{,}8 \cdot 3{,}2\ \mathrm{J} = 1\,568\ \mathrm{J}$, kinetická energie chlapce je $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 5{,}4^2\ \mathrm{J} = 719\ \mathrm{J}$, celková mechanická energie je $E = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k} = (1\,568 + 719)\ \mathrm{J} \doteq 2\,300\ \mathrm{J}$.

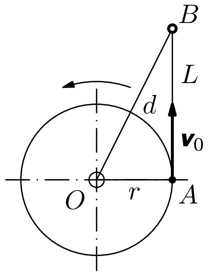
d) Při rozjíždění $\varepsilon_1 = \frac{\omega}{t_1} = \frac{0{,}84}{30}\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}} = 0{,}028\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$, při zastavování $\varepsilon_2 = \frac{\omega}{t_2} = \frac{0{,}84}{120}\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}} = 0{,}007\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$.

e) Při rozjíždění $n_1 = \dfrac{\frac{1}{2}\omega_0 \cdot t_1}{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{t_1}{2\pi} = \frac{t_1}{2T} = \frac{30}{2 \cdot 7{,}5}\ \mathrm{ot} = 2{,}0\ \mathrm{ot}$.

Při rovnoměrné jízdě $n_2 = \dfrac{\omega_0 t_2}{2\pi} = \dfrac{2\pi}{T} \cdot \dfrac{t_2}{2\pi} = \dfrac{t_2}{T} = \dfrac{150}{7{,}5}$ ot $= 20$ ot.

Při zpomalování $n_3 = \dfrac{\frac{1}{2}\omega_0 \cdot t_3}{2\pi} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2\pi}{T} \cdot \dfrac{t_3}{2\pi} = \dfrac{t_3}{2T} = \dfrac{120}{2 \cdot 7{,}5}$ ot $= 8{,}0$ ot.
Celkem se kolotoč za jízdu otočí 30krát.

f) Tuto část úlohy budeme řešit ve vztažné soustavě spojené se zemí. Budeme uvažovat, že chlapec upustil míček v bodě A (obr. 12). Míček se setrvačností pohyboval dál ve směru tečny k trajektorii pohybu chlapce stejně velkou rychlostí o velikosti $v_0 = 5{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ jako chlapec. Zároveň také míček padal volným pádem svisle dolů. Míček tedy konal složený pohyb, který znáte jako tzv. *vrh vodorovný*. Označme L vzdálenost, kterou urazil míček ve vodorovném směru (obr. 13). Ze vztahů pro vrh vodorovný vyplývá, že $L = v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 5{,}4 \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot 3{,}2}{9{,}8}}\ \mathrm{m} = 4{,}3\ \mathrm{m}$.



Obr. 12 Míček – pohled shora

Chlapec upustil míček ve výšce 3,2 m nad povrchem země ve vzdálenosti $r = 6{,}4$ m od osy rotace. V okamžiku dopadu je tedy míček ve vzdálenosti $d = \sqrt{r^2 + L^2} = \sqrt{6{,}4^2 + 4{,}4^2}\ \mathrm{m} = 7{,}7$ m od osy rotace (obr. 12).

Příklad 9 – malá okružní pila

Okružní pila koná $1\,440\ \mathrm{ot \cdot min^{-1}}$, její poloměr je 15 cm. Pila se roztáčí po dobu 40 s a zastavuje po dobu 120 s.


Obr. 13 Okružní pila

a) Stanovte periodu rotace a úhlovou rychlost pilového kotouče.
b) Jakou rychlostí se kotouč zařezává do dřeva?
c) Kolik otáček potřebuje pila k „nabrání rychlosti“ a kolik otáček vykoná poté, co jí vypneme pohon?

Řešení

a) Podle zadání $f = \dfrac{1\,440}{60}\ \mathrm{Hz} = 24\ \mathrm{Hz}$, $\omega = 2\pi f = 151\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

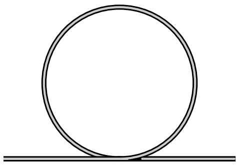
b) $v = r \cdot \omega = 0{,}15 \cdot 151\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 22{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 81\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

c) Úhlová dráha φ_1 při náběhu pilového kotouče $\varphi_1 = \dfrac{1}{2}\omega t_1$, tomu odpovídá počet otáček $n_1 = \dfrac{\varphi_1}{2\pi} = \dfrac{2\pi f t_1}{2 \cdot 2\pi} = \dfrac{1}{2} f t_1 = \dfrac{1}{2} \cdot 24 \cdot 40$ ot $= 480$ ot.

Úhlová dráha φ_2 při doběhu pilového kotouče $\varphi_2 = \frac{1}{2}\omega t_2$, tomu odpovídá počet otáček $n_2 = \frac{\varphi_2}{2\pi} = \frac{2\pi f t_2}{2 \cdot 2\pi} = \frac{1}{2} f t_2 = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 120 \text{ ot} = 1\,440 \text{ ot}$.

Příklad 10 – autíčko ve smyčce

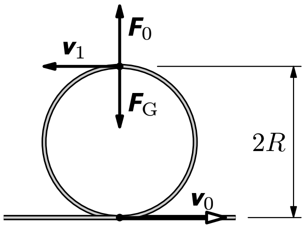
Dětská autodráha má autíčka na elektrický pohon. V jedné části je smyčka, kterou musí autíčka bezpečně projet. Hmotnost autíčka je 150 g, výška smyčky 48 cm, rozměry autíčka zanedbáváme. Jakou nejmenší rychlost a jakou energii musí mít autíčko na vodorovné části dráhy, aby bezpečně projelo horní částí smyčky?



Obr. 14 Smyčka

Řešení

V dolní části smyčky bude mít autíčko největší rychlost $\boldsymbol{v}_0$, tedy i největší pohybovou energii $E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2$ a nulovou polohovou energii, tj. $E_{p0} = 0$ J. V nejvyšším bodě smyčky má autíčko polohovou energii $E_{p1} = mg \cdot 2R$ a pohybovou energii $E_{k1} = \frac{1}{2}mv_1^2$. Platí nutně $E_{k0} > E_{p1}$, ale tato podmínka není postačující.



Obr. 15 Jízda ve smyčce

Horním bodem smyčky musí autíčko projet tak velkou rychlostí, aby odstředivá síla byla větší (nebo alespoň rovna), než je síla tíhová, tj. $m \cdot \frac{v_1^2}{R} \geq mg$, neboli $v_1^2 \geq Rg$. Energetické rovnice vyjadřuje ZZME

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \geq mg \cdot 2R + \frac{1}{2}mv_1^2,$$

tj. $\frac{1}{2}mv_0^2 \geq mg \cdot 2R + \frac{1}{2}m \cdot Rg$. Odtud pro rychlost v dolní části smyčky dostáváme $v_0 \geq \sqrt{5Rg}$. Pro dané hodnoty $v_0 \geq \sqrt{5 \cdot 0{,}24 \cdot 9{,}8}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 3{,}43\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. S ohledem na možné ztráty $v_0 \geq 3{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Pohybová energie autíčka je $E_{k0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}15 \cdot 3{,}5^2\ \mathrm{J} = 0{,}92\ \mathrm{J}$.

Příklad 11 – rychlobruslení

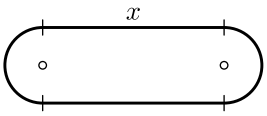
Obr. 16 Rychlobruslařský ovál

Oválná dráha pro rychlobruslení je dlouhá 400 m, skládá se ze dvou přímých úseků a dvou zatáček o poloměru 25 m. Při tréninku se snaží rychlobruslař dodržovat stálou rychlost v_0 tak, aby trasu ujel za dobu kratší než 36 s.

a) Nakreslete schéma trasy pro trénujícího bruslaře a určete délku přímých úseků a zatáček.
b) Jak se musí rychlobruslař chovat v zatáčkách?
c) Určete maximální velikost rychlosti jízdy rychlobruslaře v zatáčkách, je-li součinitel smykového tření mezi bruslemi a ledem v příčném směru 0,60.

Řešení

a) Délka zatáčky je πr, dvě zatáčky dohromady $2\pi r$. Délka trasy je $s = 400$ m. Délku úseku x určíme ze vztahu $2x + 2\pi r = s$, z čehož $x = \frac{s}{2} - \pi r = (200 - 78{,}5)\ \mathrm{m} = 121{,}5\ \mathrm{m}$.



Obr. 17 Schéma trasy

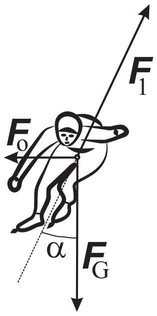
b) V zatáčce se musí rychlobruslař sklonit o úhel α.

Platí $\operatorname{tg}\alpha = \frac{F_\mathrm{o}}{F_\mathrm{G}} = \frac{m\frac{v_0^2}{r}}{mg} = \frac{v_0^2}{rg}$.

Ze zadání $v_0 = \frac{400}{36}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 11{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Potom $\operatorname{tg}\alpha = \frac{11{,}1^2}{25\cdot 9{,}8} = 0{,}50$, z čehož $\alpha = 26{,}5°$.

c) Je-li součinitel smykového tření ostrých bruslí o led v příčném směru $\mu = 0{,}60$, je největší rychlost rychlobruslaře v zatáčce dána pomocí vztahu $m\frac{v_{\max}^2}{r} = \mu\cdot mg$, z čehož
$v_{\max} = \sqrt{\mu\cdot rg} = \sqrt{0{,}60\cdot 25\cdot 9{,}8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}} = 12{,}1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.



Obr. 18 Rychlobruslař

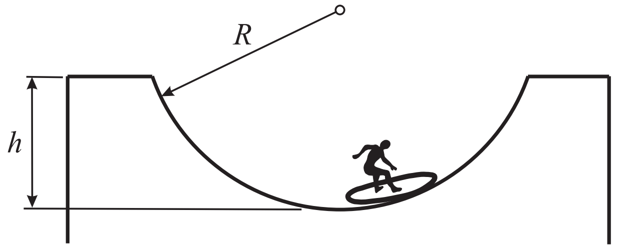
Poznámka

Při řešení úlohy b) jsme využili poznatku, že reakce ledu $\boldsymbol{F}_1$ je v rovnováze se silou třecí $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ a kolmou tlakovou silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$, kterou rychlobruslař působí na led. Podmínky rovnováhy je nutno v tomto případě uplatnit ve dvou směrech, tj. musí platit $F_\mathrm{G} = F_\mathrm{n}$, $F_\mathrm{o} = F_\mathrm{t}$.

Cvičení 2

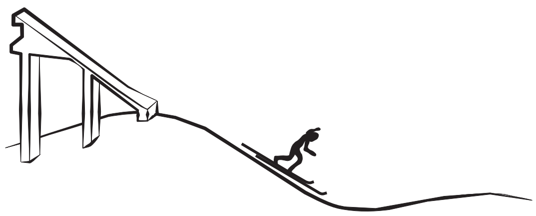
3. Jak se změní údaje o řetízkovém kolotoči v příkladu 8, když se kolotoč bude otáčet rychleji s dobou rotace 6,0 s?

4. Náročnější rampa pro skateboarding může být modelována válcovou plochou o poloměru $R = 6{,}0$ m, po které se na skatu pohybují sportovci. Sportovec o hmotnosti $m = 70$ kg se rozjede po válcové ploše s místa ve výšce $h = 3{,}0$ m nad nejnižším bodem skatové dráhy. Jeho těžiště se pohybuje přibližně po kružnici o poloměru $r = 5{,}0$ m. Určete, jaké rychlosti dosahuje sportovec při průjezdu nejnižší polohou a přetížení, kterému je podrobeno jeho tělo v nejnižší poloze. Jaká je jeho pohybová energie v této poloze?



Obr. 19 Skateboard

5. Skokan na lyžích o celkové hmotnosti 80 kg i s lyžemi dosáhl při dojezdu ze skokanského můstku na lyžích rychlosti 80 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a najel do dolíku a potom zase na hrbol o poloměru 40 m. Popište jeho fyzickou zátěž (tj. síly, které na lyžaře působí při jízdě v dolíku a na hrbolu).

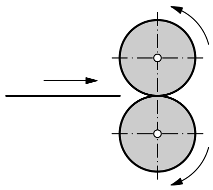


Obr. 20 Dojezd skokanského můstku

3 Valivý pohyb po vodorovné rovině

Ačkoli se kolem nás pohybuje mnoho vozidel. jejichž kola se valí po podložce, pochopit fyzikální zákonitosti valivého pohybu není jednoduché.

Představme si dva válce o stejném poloměru, z nichž horní je poháněn motorkem tak, že jeho úhlová rychlost je stálá. Druhý válec je hnaný účinkem třecích sil, vznikajících mezi oběma válci. Má-li stejný poloměr, bude se otáčet se stejnou frekvencí i úhlovou rychlostí.
Jestliže mezi oba válce vložíme list papíru nebo tenkou desku, potom se vlivem třecích sil válců bude pohybovat.

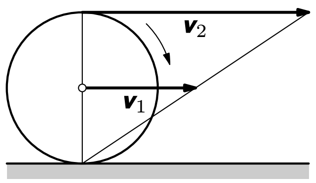


Obr. 21 Dva válce

Jsou dvě možnosti popisu: spojíme-li vztažnou soustavu s osami válců, budou konat válce rotační pohyb, papír pak bude konat posuvný pohyb s rychlostí $v = r\omega$. Spojíme-li však popis děje se vztažnou soustavou spojenou s pohybujícím se papírem, budou se oba válce odvalovat po papíru, přičemž osy válců se budou zdánlivě přemisťovat rychlostí $v = r\omega$.

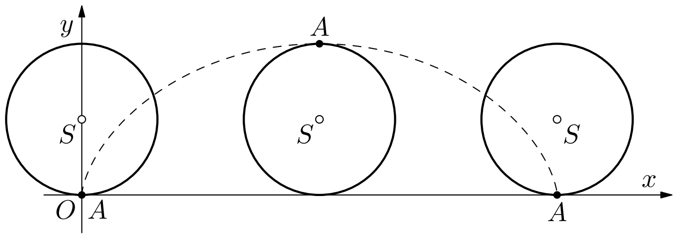
Uveďme rotační těleso do pohybu bez prokluzování po rovinné podložce. Osa rotace se posunuje ve směru podložky a současně nastává rotace tělesa kolem pevné osy.

V místě dotyku tělesa a podložky je jejich vzájemná rychlost nulová, osa rotace se posunuje rychlostí $v_1 = r\omega$ a bod nejvíce vzdálený od podložky má rychlost $v_2 = 2r\omega$, neboť rychlost osy rotace a rychlost obvodová se skládají. Obdobný výklad vede naopak v dolní části k výsledku $v_3 = r\omega - r\omega = 0$.



Obr. 22 Pohyb válce

Z kinematiky valení válce, koule či obruče plyne, že valivý pohyb si můžeme modelovat složením dvou pohybů (obr. 23).



Obr. 23 Pohyb válce

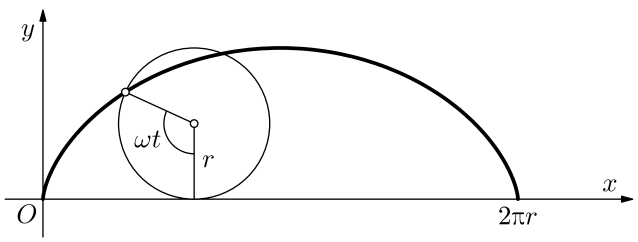
Během první poloviny periody se osa posouvá dopředu a sledovaný bod se vzhledem k ní vzdaluje dozadu (obr. 24), takže můžeme tedy x-ovou souřadnici bodu A vyjádřit

$$x = \omega r \cdot t - r \sin \omega t.$$

Během jedné otočky bod A nejprve stoupá až do výšky $2r$, ve druhé polovině otočky klesá zpět k podložce (obr. 24). Výšku y bodu A nad podložkou vyjadřuje vztah

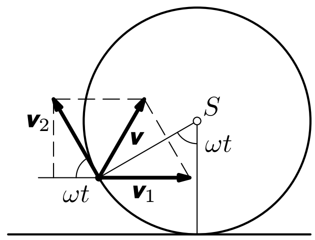
$$y = r - r \cos \omega t.$$

Je zřejmé, že vztahy pro změny polohy s časem jsou dosti složité, zejména proto, že se proměnná t nachází jednak v argumentu funkce sinus, jednak i mimo tento argument. Takové rovnice můžeme nazvat *transcendentní* a musíme je řešit nanejvýš graficky nebo pomocí numerických metod.



Obr. 24 K rovnicím pohybu válce

Určit rychlost libovolného bodu na obvodu (ale i uvnitř) válce bude obtížné, neboť musíme řešit problém vektorově. Náznak řešení si ukážeme pomocí obr. 25. Platí $v_1 = v_2 = \omega r$. Dále bychom provedli rozklad rychlostí do směru vodorovného $v_x = v_1 - v_2 \cos \omega t = \omega r(1 - \cos \omega t)$ a do svislého směru $v_y = v_2 \sin \omega t = \omega r \cdot \sin \omega t$. Velikost výsledné rychlosti bychom pak určili pomocí vztahu $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.



Obr. 25 Skládání rychlostí

Příklad 12 – jak se točí kola

Po dálnici jede automobil stálou rychlostí 126 km $\cdot$ h^{-1}; poloměr pneumatiky zvolíme 28 cm. Jaká je frekvence otáčení? Určete, kolikrát se musí kolo otočit na trase 100 km.

Řešení

Platí $v = 2\pi r f$, z čehož $f = \dfrac{v}{2\pi r} = \dfrac{35}{2\pi \cdot 0{,}28}\ \mathrm{s}^{-1} = 20$ Hz. Počet otáček na trase 100 km je $n = \dfrac{100 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 0{,}28} = 56\,800$.

Valící se těleso jednak rotuje – jeho energie vzhledem k ose rotace je $E_{\mathrm{k1}} = \dfrac{1}{2} J\omega^2$, jednak se osa rotace posouvá rychlostí o velikosti v – energie posuvného pohybu je $E_{\mathrm{k2}} = \dfrac{1}{2} mv^2$. Vztah mezi rychlostí posunu osy při valení a úhlovou rychlostí rotace je $v = r\omega$, z čehož $\omega = \dfrac{v}{r}$, moment setrvačnosti závisí na hmotnosti a tvaru tělesa. Celková pohybová energie valícího se tělesa je potom

$$E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{k2}} = \frac{1}{2} J\omega^2 + \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{J_0}{mr^2}\right) mv^2.$$

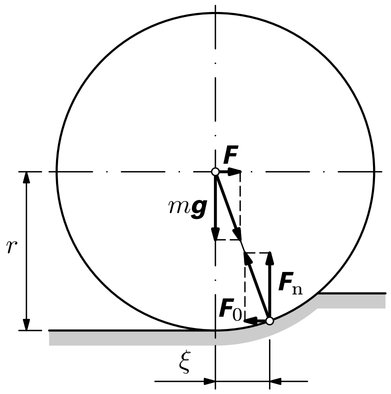
Při valivém pohybu vzniká tzv. *valivý odpor*. Jedeme-li na jízdním kole po nepříliš tvrdé podložce (např. v písku), vytváří se za jedoucím kolem stopa. Prakticky jde o to, že se na podložce povrch rozestoupí, ale k tomu je třeba vykonat určitou práci. Obdobně je to i v případě pneumatik automobilu, který jede po dostatečně pevné podložce. Vlivem tlakových sil se pneumatika deformuje, vzduch se v pneumatice přesouvá a k udržení pohybu je třeba vykonat práci.

Valivý odpor závisí na zatížení $\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}$, poloměru kola a jakosti styčných ploch, potom

$$F_0 = \xi \cdot \frac{F_{\mathrm{n}}}{r},$$

kde ξ je tzv. *rameno valivého odporu*.
Z jednotlivých úvah a z obr. 26 plyne, že jednotka ξ jsou metry a příslušné díly (cm, mm).

Valivý odpor můžeme interpretovat i tak, že pro udržení rovnoměrného pohybu při valení je nutno překonat tento valivý odpor a velikost potřebné síly je rovna $F = F_0$. Síla $\boldsymbol{F}$ však má opačný směr než síla $\boldsymbol{F}_0$, jak je vidět např. na obr. 26.



Obr. 26 Valivý odpor

Práce potřebné síly na trase odpovídající jedné otočce je $W = F_0 \cdot 2\pi r$; na trase o délce s je potom tato práce $W = F_0 \cdot s$.

Příklad 13 – tři tělesa

Máme tři tělesa: kouli, válec a obruč. Každé těleso má hmotnost m a poloměr r. Tělesa se budou valit po vodorovné podložce, středy těles budou konat posuvný pohyb rychlostí o velikosti v. Odvoďte obecné vztahy pro výpočet celkové kinetické energie jednotlivých těles.

Řešení

Koule: z obr. 5 $J_0 = \frac{2}{5}mr^2$, potom $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2$.

Válec: z obr. 5 $J_0 = \frac{1}{2}mr^2$, potom $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2$.

Obruč: z obr. 9 $J_0 = mr^2$, potom $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} \cdot mr^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2$.

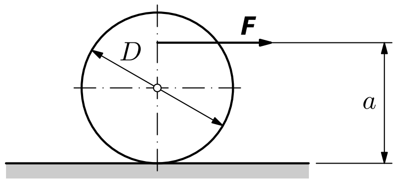
Při stejné kinetické energii se budou uvedená tři tělesa pohybovat různou rychlostí.

Cvičení 3

6. Jakou rychlostí jede cyklista, je-li doba rotace předního kola o průměru 58 cm rovna 0,2 s?

7. Určete nejmenší frekvenci, na kterou je nutno roztočit setrvačník o momentu setrvačnosti $J = 100\ \mathrm{kg \cdot m^2}$ kolem pevné osy, aby po dobu 5 minut dodával výkon 15 kW.

8. Ocelový válec o průměru $D = 500$ mm a délce 1 m je položen na vodorovné podložce. Jak velkou vodorovnou silou $\boldsymbol{F}$ (obr. 27) musíme působit ve vzdálenosti $a = 330$ mm, aby se začal odvalovat? Rameno valivého odporu $\xi = 5$ mm, hustota oceli je $7\,800\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.



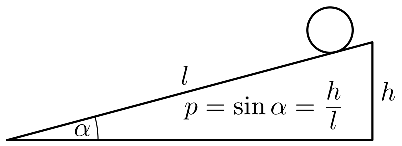
Obr. 27 Ocelový válec na vodorovné podložce

4 Valivý pohyb těles na nakloněné rovině

V této kapitole se budeme zabývat valivým pohybem těles po nakloněné rovině. Představte si nakloněnou rovinu o délce l, se sklonem $p = \dfrac{h}{l}$, kde h je výšková odlehlost bodů na začátku a na konci zvoleného úseku na nakloněné rovině délky l.

V horní části nakloněné roviny umístíme rotační těleso tak, aby se mohlo odvalovat bez prokluzu dolů. Smykové tření musí být tedy dostatečně velké, avšak abychom to nekomplikovali, zvolíme velmi malý valivý odpor.

Nulovou hladinu polohové energie E_p zvolíme na spodním konci nakloněné roviny. V horní poloze má rotační těleso počáteční polohovou energii $E_{\mathrm{p}0} = mgh$, zatím je v klidu, a tak jeho počáteční pohybová energie je nulová.



Obr. 28 Valivý odpor

V dolní části, těsně než toto těleso přejde na vodorovný úsek, bude mít polohovou energii $E_\mathrm{p} = 0$, pohybová energie bude $E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2$, přičemž v každém okamžiku platí $v = R\omega$, $\omega = \dfrac{v}{R}$. Po dosazení a porovnání energie na základě zákona o zachování mechanické energie

$$mgh = \frac{1}{2}J_0\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{J_0}{mR^2} + 1\right)mv^2.$$

Koncová rychlost $v = \sqrt{\dfrac{2gh}{\dfrac{J_0}{mR^2} + 1}} = \sqrt{\dfrac{2gpl}{\dfrac{J_0}{mR^2} + 1}}$.

Pro koncovou rychlost tělesa, které se pohybuje rovnoměrně zrychleným pohybem se zrychlením o velikosti a po dráze l s nulovou počáteční rychlostí, obecně platí $v = \sqrt{2al}$. Porovnáním těchto dvou vztahů pro rychlost dostaneme výraz pro výpočet zrychlení při valivém pohybu na nakloněné rovině

$$a = \frac{gp}{1 + \dfrac{J_0}{mR^2}}. \tag{5}$$

Při pouhém posuvném pohybu bez výrazné třecí síly ($F_\mathrm{t} \to 0$) a bez valení, platí pro zrychlení pohybu vztah $a' = gp$. Z toho je zřejmé, že $a < gp$. Tedy při valení dosahuje rotační těleso menšího zrychlení na nakloněné rovině, než by získalo klouzání s velmi malým třením.

Druhým závěrem je to, že tělesa různých tvarů dosahují na konci nakloněné roviny různých rychlostí. Uveďme známý problém.

Příklad 14 – rychlosti těles

Na horní konec nakloněné roviny se sklonem p můžeme položit jedno z následujících těles: homogenní válec ($J_0 = \frac{1}{2}mR^2$), dutý válec ($J_0 = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$), tenkostěnný válec ($J_0 = mR^2$). Jakou rychlostí se tělesa dostanou na dolní konec nakloněné roviny? S jakým zrychlením se budou tělesa pohybovat?

Řešení

Nejprve stanovíme ze zákona o zachování mechanické energie obecně výslednou rychlost. Platí

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_0\frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{J_0}{mR^2}\right)mv^2,$$

odtud $v = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + \dfrac{J_0}{mR^2}}} = \sqrt{\dfrac{2gpl}{1 + \dfrac{J_0}{mR^2}}}$.

Pro homogenní válec $J_0 = \frac{1}{2}mR^2$ je

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gpl}{1 + \dfrac{\frac{1}{2}mR^2}{mR^2}}} = \sqrt{\frac{4}{3}gpl}.$$

Pro dutý válec $J_0 = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$ je

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gpl}{1 + \dfrac{\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)}{mR^2}}} = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{gpl}{1 + \dfrac{r^2}{3R^2}}}.$$

Pro tenkostěnný válec $J_0 = mR^2$ je

$$v_3 = \sqrt{\frac{2gpl}{1 + \dfrac{mR^2}{mR^2}}} = \sqrt{gpl},$$

tato rychlost je rovna 0,71 hodnoty rychlosti tělesa, které by se pohybovalo smykem bez tření.

Zrychlení pohybu je dáno vztahem (3).

Pro homogenní válec $J_0 = \dfrac{1}{2}mR^2$ je

$$a_1 = \frac{gp}{1 + \dfrac{J_0}{mR^2}} = \frac{gp}{1 + \dfrac{\frac{1}{2}mR^2}{mR^2}} = \frac{2}{3}gp.$$

Pro dutý válec $J_0 = \dfrac{1}{2}m(R^2 + r^2)$ je

$$a_2 = \frac{gp}{1 + \dfrac{J_0}{mR^2}} = \frac{gp}{1 + \dfrac{\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)}{mR^2}} = \frac{2}{3}\frac{gp}{1 + \dfrac{r^2}{3R^2}}.$$

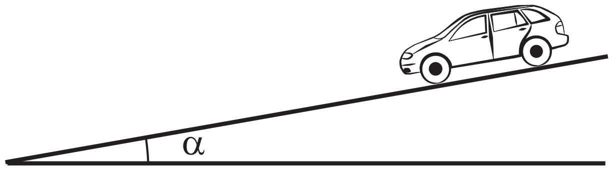
Pro tenkostěnný válec $J_0 = mR^2$ je

$$a_3 = \frac{gp}{1 + \dfrac{J_0}{mR^2}} = \frac{gp}{1 + \dfrac{mR^2}{mR^2}} = \frac{1}{2}gp.$$

Zrychlení tělesa pohybujícího se smykem (neuvažujeme-li třecí sílu) je rovno $a_0 = gp$. Ve všech případech je tedy zrychlení tělesa pohybujícího se smykem větší než zrychlení těles pohybujích se valivým pohybem.

Příklad 15 – nezabrzděný automobil

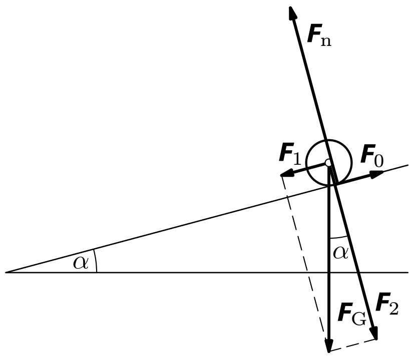
Prakticky se může stát, že řidič zapomene zabrzdit automobil a ani nezařadí rychlostní stupeň. Automobil se dá do pohybu. I když je známo, že součinitel smykového tření za klidu je větší než za pohybu, může i valivý odpor tělesa v klidu být o něco větší než pro případ pohybu. Pro jak velký úhel sklonu asfaltové silnice je to nebezpečná situace? Rameno valivého odporu $\xi = 1{,}5$ mm.



Obr. 28 Automobil na nakloněné rovině

Řešení

Ve směru kolmém na nakloněnou rovinu platí podmínka rovnováhy $F_n = F_2 = mg\cos\alpha$. Pokud automobil stojí na nakloněné rovině, pak platí $F_0 \geq F_1$. Síla $\boldsymbol{F}_0$ reprezentuje valivý odpor a její velikost je dána vztahem $F_0 = \xi \cdot \dfrac{F_n}{r} = \xi \cdot \dfrac{mg\cos\alpha}{r}$, síla $\boldsymbol{F}_1$ je složka tíhové síly rovnoběžná s nakloněnou rovinou a pro její velikost platí $F_1 = mg\sin\alpha$. Po dosazení do podmínky $F_0 \geq F_1$ dostaneme



Obr. 29 Valení dolů

$$\xi \cdot \frac{mg\cos\alpha}{r} \geq mg\sin\alpha, \text{ z čehož } \operatorname{tg}\alpha \leq \frac{\xi}{r}.$$

Odhadneme-li poloměr kola automobilu na $r = 0{,}3$ m, potom $\operatorname{tg}\alpha \leq \dfrac{0,00\,15}{0{,}3} = 0{,}005$, z čehož $\alpha \leq 0{,}29°$. Nebezpečný je úhel $\alpha > 0{,}29°$, což představuje sklon 0,5 m na vzdálenost 100 m.

Příklad 16 – pohyb koule na nakloněné rovině

Homogenní plná koule byla vržena rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ vzhůru po nakloněné rovině s úhlem sklonu α. Koule koná valivý pohyb bez smyku. Určete, jakou dráhu koule urazí, než se zastaví. Valivý odpor je zanedbatelný. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $v_0 = 5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\alpha = 30°$.

Řešení

1. Řešení užitím zákonů kinematiky. Zrychlení pohybu koule určíme užitím vztahu (3)

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + \dfrac{\frac{2}{5}mr^2}{mr^2}} = \frac{5}{7}\,g\sin\alpha.$$

Střed koule koná rovnoměrně zpomalený pohyb, tj. platí $v = v_0 - at$. V okamžiku, kdy zastaví, bude platit $0 = v_0 - aT$, z čehož doba výstupu $T = \dfrac{v_0}{a}$.

Dráha l, kterou koule urazí, než se zastaví, je dána vztahem

$$l = v_0 T - \frac{1}{2} a T^2 = v_0 \cdot \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2a}.$$

Po dosazení za $a = \dfrac{5}{7}\, g \sin\alpha$ dostaneme

$$l = \frac{v_0^2}{2 \cdot \frac{5}{7} g \sin\alpha} = \frac{7}{10} \frac{v_0^2}{g \sin\alpha} = \frac{7}{10} \cdot \frac{5^2}{9{,}8 \cdot \sin 30^\circ}\ \mathrm{m} = 3{,}6\ \mathrm{m}.$$

2. Řešení užitím zákona zachování mechanické energie. Platí

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2 = mgh,$$

po dosazení za $J_0 = \dfrac{2}{5} m r^2$ a $\omega = \dfrac{v}{r}$ dostaneme

$$\frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 + \frac{2}{5}\right) = mgl \sin\alpha,$$

z čehož $l = \dfrac{7}{10} \dfrac{v_0^2}{g \sin\alpha}$.

Cvičení 4

9. Řešte příklad 16 pro případ a) plného válce, b) tenkostěnného válce.

10. Dutý válec a plný válec o téže hmotnosti m, vnějším poloměru R a délce c jsou současně vedle sebe položeny na nakloněnou rovinu. Po uvolnění začnou konat valivý pohyb bez smyku. Moment setrvačnosti plného válce je $J_{01} = \dfrac{1}{2} m R^2$, moment setrvačnosti dutého válce je $J_{02} = \dfrac{1}{2} m (R^2 + r^2)$.

a) Určete poměr mezi vnitřním a vnějším poloměrem dutého válce $\dfrac{r}{R}$, víte-li, že plný válec je z hliníku $\varrho_1 = 2\,700\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a dutý válec ze železa $\varrho_2 = 7\,800\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.
b) Vypočtěte zrychlení pohybu obou válců.
c) Stanovte poměr dob trvání pohybu tělesa z nejvyšší do nejnižší polohy na nakloněné rovině.
Řešte nejprve obecně, potom pro úhel $\alpha = 30^\circ$. Valivý odpor zanedbejte.

11. Řešte předchozí úlohu pro případ, že rameno valivého odporu $\xi = 0{,}5$ mm a poloměr $R = 10$ cm.

5 Komplexní úlohy

Příklad 17 – nešťastně uvolněné kolo automobilu

Stalo se mnohokrát, že se kolo automobilu, jedoucího obcí rychlostí 50 km $\cdot$ h^{-1}, uvolnilo a začalo se samostatně pohybovat. Hmotnost kola je 8 kg, moment setrvačnosti kola odhadneme na $J_0 =$ $= 0{,}36\ \mathrm{kg \cdot m^2}$. Jak daleko se může kolo o průměru 60 cm pohybovat po vodorovné rovině? Rameno valivého odporu je 1,5 mm.

Obr. 30 Uvolněné kolo

Řešení

Jedoucí automobil má rychlost 50 km $\cdot$ h^{-1} = 13,9 m $\cdot$ s^{-1}, úhlová rychlost valícího se kola je v okamžiku uvolnění $\omega_0 = \frac{v}{r} = \frac{13{,}9}{0{,}3}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} = 46{,}3\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.
Pohybová energie valícího se kola je

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 13{,}9^2 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}36 \cdot 46{,}3^2\right)\ \mathrm{J} = 1\,159\ \mathrm{J}.$$

Tato energie se při pohybu postupně snižuje účinkem valivého odporu

$$F_0 = \xi\frac{mg}{r} = 0{,}0015 \cdot \frac{80}{0{,}3}\ \mathrm{N} = 0{,}4\ \mathrm{N}.$$

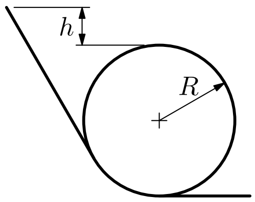
Ze zákona o zachování energie
$F_0 \cdot x = \Delta E_\mathrm{k}$, z čehož $x = \frac{\Delta E_\mathrm{k}}{F_0} = \frac{1159}{0{,}4}\ \mathrm{m} = 2\,900\ \mathrm{m}$.

Zpočátku se projevuje u kola tzv. *gyroskopický efekt*, který udržuje rovnovážný stav s vodorovně položenou osou rotace; při menších otáčkách už toto přestává platit (kolo má na počátku frekvenci 7,4 ot $\cdot$ s^{-1}, která se neustále zmenšuje).

Modelový příklad nemůže zahrnout nerovnosti povrchu vozovky, drobné překážky (kamínky, nerovnosti asfaltu), které mohou podstatně ovlivnit další chování valícího se kola.

Příklad 18 – pohyb ve smyčce

Nakloněná rovina je prezentována mělkým žlábkem, který je v dolní části stočen do kruhové, tzv. *mrtvé*, smyčky o poloměru R (obr. 31).



Obr. 31 Smyčka

a) Z jaké nejmenší výšky h_1 nad vrcholem kruhové smyčky musíme uvolnit tělísko, aby posuvným pohybem projelo bezpečně smyčkou? Tření neuvažujte, rozměry tělíska zanedbejte.

b) Z jaké nejmenší výšky h_2 nad vrcholem kruhové smyčky musíme uvolnit malou kuličku o poloměru r, aby bezpečně projela smyčkou? Kulička se nesmýká, ale valivý odpor nebudeme uvažovat. Moment setrvačnosti kuličky vzhledem k ose procházející těžištěm je $J_0 = \frac{2}{5}mr^2$.

c) Kdybychom uvolnili tělísko na nakloněné rovině ve výšce $2R$, pak se v určitém místě oddělí od kruhové smyčky. Zdůvodněte proč a určete výšku h_3 tohoto místa.

d) V případě c) se tělísko nedostane do původní výšky. Vysvětlete proč.

Řešení

a) K řešení použijeme zákon o zachování mechanické energie (dále ZZME). Nulovou hladinu potenciální energie zvolíme na povrchu země (poloha 3).

V poloze 1 je

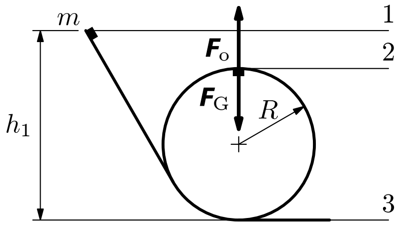
$$E_{\mathrm{p1}} = mgh_1, \quad E_{\mathrm{k1}} = 0,$$

v poloze 2 je

$$E_{\mathrm{p2}} = mg \cdot 2R, \quad E_{\mathrm{k2}} = \frac{1}{2}mv_2^2$$

a v poloze 3

$$E_{\mathrm{p3}} = 0, \quad E_{\mathrm{k3}} = \frac{1}{2}mv_3^2.$$



Obr. 32 Klouzání tělíska

Dále napíšeme ZZME, tj. platí

$$E_{\mathrm{k1}} + E_{\mathrm{p1}} = E_{\mathrm{k2}} + E_{\mathrm{p2}} = E_{\mathrm{k3}} + E_{\mathrm{p3}}.$$

Po dosazení

$$0 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg2R = \frac{1}{2}mv_3^2 + 0,$$

což jsou vlastně tři rovnice. Použitím první rovnice dostaneme

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg2R.$$

Nyní ještě napíšeme podmínku pro výpočet velikosti rychlosti v_2, kterou napíšeme z hlediska pozorovatele v neinerciální vztažné soustavě. V nejvyšším bodě smyčky musí mít $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$ nejmenší velikost, tj. $F_\mathrm{o} = F_\mathrm{G}$ (jinak by tělísko v nejvyšším bodě smyčky přestalo smyčky dotýkat a prolétlo by níže), tj. $m\frac{v_2^2}{R} = mg$, z čehož $v_2^2 = Rg$. Po dosazení za v_2^2 do výše uvedené rovnice dostaneme

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mRg + mg2R,$$

z čehož $h_1 = 2{,}5R$. To znamená, že tělísko musí sjíždět po nakloněné rovině nejméně z výšky $h = 2{,}5R - 2R = 0{,}5R$ nad nejvyšším bodem smyčky.

b) V tomto případě zvolíme nulovou hladinu potenciální energie jinak, než v úloze a) (obr. 33). Budeme-li spouštět místo tělíska kuličku, je nutno uvažovat, že těžiště kuličky koná jednak pohyb posuvný a jednak se kulička ještě otáčí kolem své osy. V případě valící se kuličky můžeme pro kinetickou energii kuličky psát

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr^2\cdot\frac{v^2}{r^2} = \frac{7}{10}mv^2.$$

V poloze 1 je

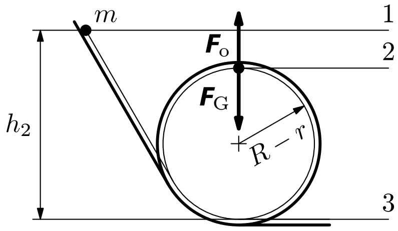
$$E_\mathrm{p1} = mgh_2, \quad E_\mathrm{k1} = 0,$$

v poloze 2 je

$$E_\mathrm{p2} = mg\cdot 2(R-r), \quad E_\mathrm{k2} = \frac{7}{10}mv_2^2$$

a v poloze 3

$$E_\mathrm{p3} = 0, \quad E_\mathrm{k3} = \frac{7}{10}mv_3^2.$$



Obr. 33 Valení kuličky

Nyní bychom obdobně jako v části a) napsali ZZME a použili první rovnici jako v části a). Dostaneme

$$mgh_2 = \frac{7}{10}mv_2^2 + mg2(R-r).$$

Z podmínky, $F_\mathrm{o} = F_\mathrm{G}$, opět dostaneme, že $v_2^2 = (R-r)g$ a dosadíme do předchozí rovnice. Obdržíme

$$mgh_2 = \frac{7}{10}m(R-r)g + mg2(R-r),$$

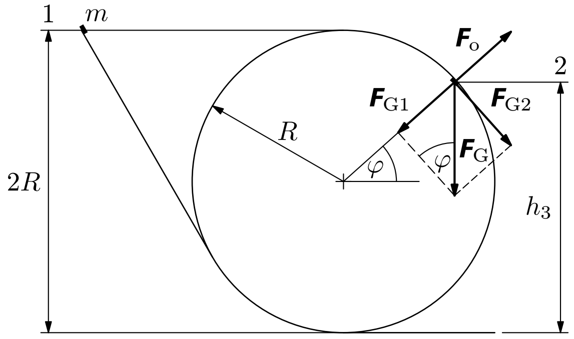
z čehož $h_2 = 2{,}7(R-r)$. To znamená, že na počátku pohybu se střed kuličky musí nacházet ve výšce $h = 2{,}7(R-r) - 2(R-r) - r = 0{,}7R - 1{,}7r$ od nejvyššího bodu smyčky.

c) Úlohu budeme řešit v neinerciální soustavě souřadnic spojené s tělískem. Na tělísko při jeho průletu smyčkou působí síla tíhová a síla odstředivá. Tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ zůstává v průběhu celého pohybu konstantní, mění se velikost a směr síly odstředivé $\boldsymbol{F}_o$ v závislosti na rychlosti pohybu tělíska.

Na obr. 34 je znázorněn rozklad síly tíhové $\boldsymbol{F}_G$ na dvě navzájem kolmé složky. Tělísko se přestane dotýkat smyčky těsně za místem, kdy je $\boldsymbol{F}_{G1} = \boldsymbol{F}_o$. Určíme úhel φ, popisující tuto polohu. Z obr. 34 vyplývá, že

$$F_{G1} = F_G \cdot \sin\varphi,$$

$$F_o = m\frac{v_2^2}{R}.$$



Obr. 34 Síly působící na tělísko

Z rovnosti $F_o = F_{G1}$ dostaneme $v_2^2 = Rg\sin\varphi$. V dalším postupu použijeme ZZME pro průchod tělíska polohami 1 a 2. Dostaneme

$$mg2R = mgh_3 + \frac{1}{2}mv_2^2.$$

Z obr. 4 vyplývá $h = R + R\sin\varphi$. Po dosazení do ZZME za h_3 a v_2^2 dostaneme

$$mg2R = mgR(1 + \sin\varphi) + \frac{1}{2}mgR\sin\varphi,$$

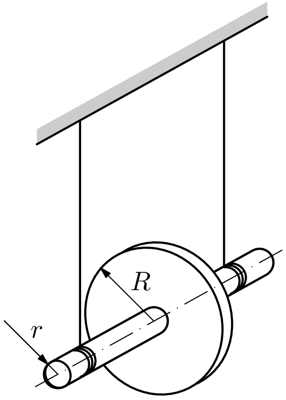
z čehož $\sin\varphi = \dfrac{2}{3}$; $\varphi = 41{,}8°$. Výška h_3 nad povrchem země, kde se tělísko přestane dotýkat smyčky, je tedy rovna $h_3 = R + R \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}R$, tedy v hloubce $\dfrac{R}{3}$ pod nejvyšším bodem smyčky.

d) Tělísko spuštěné z výšky $h = 2R$ nad povrchem země se nemůže nikdy dostat do nejvyššího bodu smyčky, protože v nejvyšším bodě má v tomto případě má nulovou rychlost. Působením tíhové síly by spadlo dolů volným pádem. Z řešení úlohy c) však víme, že tělísko spadne ze smyčky už mnohem dřív. V tomto případě by se pak těleso dále pohybovalo vrhem šikmo vzhůru.

Příklad 19 – pád Maxwellova kotouče

Maxwellův kotouč se skládá z tenké hřídelky o poloměru r (obr. 35) a masivního kotouče o poloměru R a hmotnosti m. Moment setrvačnosti a hmotnost hřídelky lze zanedbat, moment setrvačnosti kotouče je $J_0 = \frac{1}{2}mR^2$.

Poté, co v horní poloze kotouč uvolníme, vlákno se začne odvíjet. V okamžiku, kdy bude mít kotouč úhlovou rychlost ω, bude klesat rychlostí $v = r\omega$. Odvoďte vztah vyjadřující závislost rychlosti v na hloubce h od počáteční polohy, kdy byl kotouč uvolněn.



Obr. 35 Maxwellův kotouč

Řešení

Úbytek polohové energie je roven celkové pohybové energii posuvného a otáčivého pohybu. Platí

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2.$$

Po dosazení za $J_0 = \frac{1}{2}mR^2$ a $\omega = \frac{v}{r}$ dostaneme

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}mR^2\cdot\frac{v^2}{r^2},$$

po úpravě

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2\left(1 + \frac{R^2}{2r^2}\right),$$

z čehož

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}}.$$

Příklad 20 – drahá jízda na podhuštěných pneumatikách

Jedna britská společnost provedla v roce 2009 celkem 52 400 bezplatných kontrol bezpečnosti pneumatik v 15 zemích EU. Analýza testů prokázala, že 26,5 % motoristů jezdí na velmi podhuštěných pneumatikách a 7,5 % na nebezpečně podhuštěných pneumatikách. Tím se zvyšuje valivý odpor, a tím i celkový jízdní odpor. V závislosti na charakteru silnice a jízdním stylu představují valivý odpor $(18-26)$ % celkového jízdního odporu. Proveďte potřebné odhady rozměrů vozidla a dalších charakteristik a porovnejte odporové síly a výkony.

Řešení

Valivý odpor $F_0 = \xi \cdot \dfrac{mg}{r}$. Zvolíme $m = 1\,200$ kg, $\xi = 0{,}001\,5$ m, $r = 0{,}3$ m.

Potom $F_0 = 0{,}001\,5 \cdot \dfrac{1\,200 \cdot 9{,}8}{0{,}3}$ N $= 60$ N.

Při jízdě na podhuštěných pneumatikách se může ξ zvětšit až na hodnotu 0,015 m. Potom $F_0 = 600$ N.

Odpor vzduchu při jízdě $F_{\mathrm{odp}} = \dfrac{1}{2} C \varrho S v^2$. Odhadneme $S = 2{,}4\ \mathrm{m}^2$, $C = 0{,}35$, $\varrho = 1{,}2\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

Při rychlosti jízdy $v_1 = 72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ je $F_{\mathrm{odp1}} = 200$ N,
při rychlosti jízdy $v_2 = 90\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ je $F_{\mathrm{odp2}} = 312$ N,
při rychlosti jízdy $v_3 = 108\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ je $F_{\mathrm{odp3}} = 450$ N,
při rychlosti jízdy $v_4 = 126\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 35\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ je $F_{\mathrm{odp4}} = 612$ N.

Celkovou velikost sil působících proti pohybu určíme jako součet
$F_1 = F_0 + F_{\mathrm{odp}}$, výkon při jízdě stálou rychlostí je pak dán vztahem $P = F \cdot v$.

$F_1 = (260 - 800)$ N, $\quad P_1 = (5{,}2 - 16)$ kW,
$F_2 = (372 - 912)$ N, $\quad P_2 = (9{,}0 - 23)$ kW,
$F_3 = (510 - 1\,050)$ N, $\quad P_3 = (12{,}3 - 31)$ kW,
$F_4 = (672 - 1\,212)$ N, $\quad P_4 = (25{,}0 - 43)$ kW.

Cvičení 5

12. Automobil o hmotnosti m se rozjíždí rovnoměrně zrychleným pohybem do kopce se stoupáním p. Počáteční rychlost automobilu je nulová a na konci dráhy s má velikost v. Střední hodnota celkové odporové síly proti pohybu je přímo úměrná tíze automobilu, tj. $F_{\mathrm{odp}} = kmg$. Určete a) práci motoru automobilu, b) průměrný výkon motoru automobilu. Řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty $m = 1\,200$ kg, $s = 200$ m, $v = 54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, $k = 0{,}1$, $p = 0{,}02$.

13. Koule o poloměru R je pevně uložena na vodorovné rovině. Z vrcholu koule začne bez tření klouzat malé tělísko. Určete a) výšku místa, kde tělísko opustí povrch koule, b) rychlost, jakou opustí tělísko povrch koule a pod jakým úhlem, c) v jaké vzdálenosti od místa, kde se koule dotýká vodorovné roviny, dopadne tělísko.

Příloha - experimentální úlohy

Součástí této přílohy je také soubor *valeni.zip*, ve kterém jsou obsaženy animace a stručný výklad k vašim experimentálně vytvořeným křivkám. Tento zip je umístěn na stránkách Fyzikální olympiády *http://fo.cuni.cz*.

Příklad 21 – pohyb bodu na obvodu kola bicyklu

K provedení experimentu jsou potřeba minimálně dvě osoby. Na obvodu pneumatiky předního kola bicyklu udělejte křídou nebo barvou značku tak, aby byla vidět i z boku. Na podložce udělejte také značku, kterou označíte $x = 0$, a snažte se, aby na začátku ležely obě značky těsně na sobě (obrázek). Potom popojeďte kousek (aby se kolo odvalilo a otočilo asi o 30°) a poznamenejte si okamžitou hodnotu souřadnice x a výšku h značky nad podložkou. Oba údaje zapište jako uspořádanou dvojici, nebo si pro ně sestavte vhodnou tabulku. Tak se snažte dosáhnout toho, že se kolo odvalí o $2\pi r$, popř. o dvojnásobek této hodnoty. Získané údaje zakreslete do grafu $h(x)$. Vzniklá křivka se nazývá cykloida (obr. 24), parametrické rovnice jsou uvedeny na str. 20.

Příklad 22 – modelová situace 1

Na list papíru A4 nakreslete podle pravítka úsečku od jednoho kraje papíru po druhý. Vystřihněte si z tužšího papíru malé kolečko o průměru 4,0 cm, na jehož obvodu si vystřihnete malý „zobáček“ a položíte na nakreslenou úsečku (obrázek). Tak budete modelovat pohyb válce po vodorovné rovině. Poté, co kolečko odvalíte o určitou nevelkou vzdálenost, uděláte v „zobáčku“ tečku. Následně vzniklé body spojíte čarou a získáte zobrazení pohybu bodu na obvodu válce – – opět cykloidu.

Příklad 23 – modelová situace 2

Na list papíru A4 sestrojíte kružnici o průměru 4,0 cm, její obvod rozdělíte na 12 dílů (popř. plný úhel rozdělíte na díly po 30°). V dolní části kružnice sestrojíte tečnu ke kružnici. Poté odhadnete délku oblouku, který přísluší k uvedeným 30°, a současně odměříte i „výšku“ bodů, dělících kružnici, nad uvedenou tečnou. Příslušné údaje přenesete do grafu $h(x)$ a budete tak modelovat pohyb válce po vodorovné rovině. Vzniklé uspořádané dvojice $[x, h]$ nám pak umožní znázornit funkci $h = f(x)$ a graf představuje opět cykloidu.

Příklad 24 – modelová situace 3

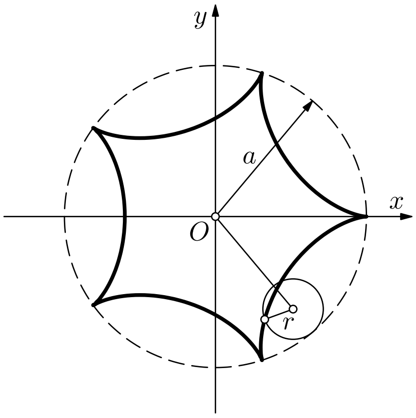
Na internetu najděte stránky *http://fo.cuni.cz*. Tam je ke stažení soubor *valeni.zip* se soubory, po jejichž můžete sledovat animaci, která znázorňuje modelovou situaci spojenou s valením válce po rovině, ve kterém po rozbalení naleznete složku *cykloida* a v ní tři soubory, na které když kliknete, samy se spustí a vy můžete sledovat valení válce.

Příklad 25 – modelová situace 4

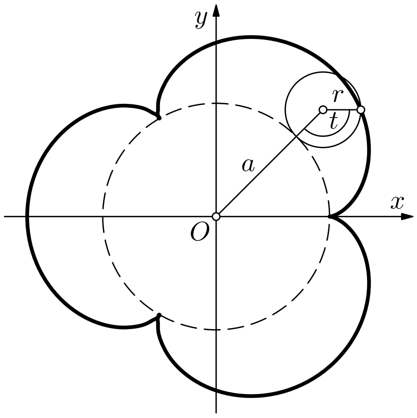
Na list papíru A3 znázorněte ve vhodném měřítku základní kružnici o poloměru R a menší kružnici o poloměru $r = nR$, kde $\dfrac{1}{n}$ je celé číslo, počínaje 2, 3, … Necháte malou kružnici odvalovat po vnitřku základní kružnice; zvolte také $R = 1{,}5\,r$, $R = 2{,}5\,r$. Sledujte vzniklé křivky, získané sledováním bodu na obvodu malé kružnice při jejím odvalování po kružnici základní (obr. 36).

Poznámka

Vzniklá křivka se nazývá *hypocykloida*, více se o této křivce můžete dozvědět v souboru *krivky.pdf*, který také součástí souboru *valeni.zip*. V tomto zipu je také složka *hypocykloida*, kde je opět možno nalézt několik spustitelných souborů animujících vznik této křivky.



Obr. 36 Hypocykloida



Obr. 37 Epicykloida

Příklad 26 – modelová situace 5

Na list papíru A3 znázorněte ve vhodném měřítku základní kružnici o poloměru R a menší kružnici o poloměru r, $r = nR$, kde $\dfrac{1}{n}$ je celé číslo, počínaje

2. Necháte malou kružnici odvalovat po vnějšku základní kružnice; zvolte také $R = 1{,}5\,r$, $R = 2{,}5\,r$. Sledujte vzniklé křivky, získané sledováním bodu na obvodu malé kružnice při jejím odvalování po kružnici velké (obr. 37).

Poznámka

Vzniklá křivka se nazývá *epicykloida*, více se o této křivce můžete dozvědět v souboru *krivky*, který také součástí souboru *valeni.zip*. V tomto zipu je také složka *epicykloida*, kde je opět možno nalét několik spustitelných souborů animujících vznik této křivky.

Příklad 27 – kulička na nakloněné rovině

Kulička na nakloněné rovině, která svírá s vodorovným směrem úhel alfa, se pohybuje účinkem síly $F = mg \sin \alpha$. Zrychlení kuličky můžeme vypočítat tak, že změříme dráhu pohybu kuličky od startu do okamžiku t, $s = \frac{1}{2}at^2$, příslušnou vzdálenost s a odtud $a = \sqrt{\frac{2s}{t^2}}$. Proveďte vhodná měření a výsledky porovnejte se vztahem uvedeným na str. 26. Případný nesoulad vysvětlete.

Jako nakloněnou rovinu můžete použít tzv. *rohovou lištu* používanou při dřevěných obkladech stěn, popř. „přiťuknout“ k sobě dvě tenké lišty tak, aby vznikl žlábek. Jako kuličku doporučujeme ocelovou kuličku z většího ložiska (lze koupit i jako náhradní), popř. míček, tzv. hopíček.

Pro hodnověrnost měření zvolte délku nakloněné roviny alespoň 2,0 m, převýšení horního konce nakloněné roviny cca 5,0 cm na uvedenou délku. Porovnejte též, který případ se více blíží realitě. Stopky si půjčíte v kabinetě fyziky, tělesné výchovy nebo použijete stopky na vašem mobilním telefonu. Pokus několikrát opakujte a vyslovte závěry.

Obr. 38 Valení míčku

Řešení cvičení

Cvičení 1

1. $F = \dfrac{mv^2}{2s} = \dfrac{80 \cdot 12{,}5^2}{2 \cdot 20}$ N $= 312$ N, $t = \dfrac{mv}{F} = \dfrac{80 \cdot 12{,}5}{312}$ s $= 3{,}2$ s.

2. Pro výkon platí $P = \dfrac{F \cdot s}{t} = F \cdot v$, pro sílu $F = kv^2$. Potom $P = kv^3$,

z čehož $v = \sqrt[3]{\dfrac{P}{k}} = \sqrt[3]{\dfrac{1\,200}{0{,}30}}$ m $\cdot$ s^{-1} $= 16$ m $\cdot$ s^{-1} $= 57$ km $\cdot$ h^{-1}.

Cvičení 2

3. a) $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{6{,}0}\ \mathrm{s^{-1}} = 0{,}167\ \mathrm{s^{-1}}$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{6{,}0}\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}} = 1{,}05\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.

b) $v = \omega r = 1{,}05 \cdot 6{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 6{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 24{,}1\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$,

$a_0 = \dfrac{4\pi^2}{T^2} \cdot r = \dfrac{4\pi^2}{6{,}0^2} \cdot 6{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 7{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, $F_0 = m \cdot a_0 = 50 \cdot 7{,}0\ \mathrm{N} = 351\ \mathrm{N}$,

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{4\pi^2 r}{gT^2} = \dfrac{4\pi^2 \cdot 6{,}4}{6{,}0^2 \cdot 9{,}8} = 0{,}716$, z čehož $\alpha = 36°$.

c) $E_\mathrm{p} = 1\,568$ J, $E_\mathrm{k} = \dfrac{1}{2} \cdot 50 \cdot 6{,}7^2$ J $= 1\,123$ J, $E = (1\,568 + 1\,123)$ J $\doteq 2\,700$ J.

d) $\varepsilon_1 = \dfrac{1{,}05}{30}\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}} = 0{,}035\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$,

$\varepsilon_2 = \dfrac{1{,}05}{120}\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}} = 0{,}009\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$.

e) $n_1 = \dfrac{30}{2 \cdot 6{,}0}$ ot $= 2{,}5$ ot, $n_2 = \dfrac{150}{6{,}0}$ ot $= 25$ ot, $n_3 = \dfrac{120}{2 \cdot 6{,}0}$ ot $= 10{,}0$ ot.
Celkem 37,5krát.

f) $L = 6{,}7 \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot 3{,}2}{9{,}8}}$ m $= 5{,}4$ m. $d = \sqrt{6{,}4^2 + 5{,}4^2}$ m $= 8{,}4$ m.

4. $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 7{,}7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 27{,}6\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$; $F_\mathrm{G} = 686$ N, $F_\mathrm{o} = 830$ N, $p = \dfrac{F_\mathrm{o}}{F_\mathrm{G}} = 1{,}2$; $E_\mathrm{k} = 2\,075$ J.

5. $F_\mathrm{G} = mg = 784$ N, $F_\mathrm{o} = m\dfrac{v^2}{r} = 80 \cdot \dfrac{22{,}2^2}{40}$ N $= 986$ N.
V dolíku $F_\mathrm{c} = (986 + 784)$ N $= 1\,770$ N, na vrcholku
$F'_\mathrm{c} = (986 - 784)$ N $= 202$ N.

Cvičení 3

6. $v = \dfrac{2\pi r}{T} = \dfrac{2\pi \cdot 0{,}29}{0{,}2}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 9{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 32{,}8\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

7. $\frac{1}{2}J\omega^2 = Pt$, po dosazení za $\omega = 2\pi f$ dostaneme $\frac{1}{2}J \cdot (2\pi f)^2 = Pt$, z čehož $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2Pt}{J}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 300}{100}}\ \mathrm{s^{-1}} = 48\ \mathrm{s^{-1}}$.

8. Hmotnost válce je $m = \frac{\pi D^2}{4} \cdot l \cdot \varrho = \frac{\pi \cdot 0{,}5^2}{4} \cdot 1 \cdot 7\,800\ \mathrm{kg} = 1\,532\ \mathrm{kg}$. Z podmínky $F \cdot a = mg \cdot \xi$ dostaneme $F = \frac{mg\xi}{a} = \frac{1\,532 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}005}{0{,}33}\ \mathrm{N} = 230\ \mathrm{N}$.

Cvičení 4

9. a) Plný válec $J_0 = \frac{1}{2}mr^2$, potom $a = \frac{2}{3}g\sin\alpha$,

$$l = \frac{v_0^2}{2 \cdot \frac{2}{3}g\sin\alpha} = \frac{3}{4}\frac{v_0^2}{g\sin\alpha} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5^2}{9{,}8 \cdot \sin 30^\circ}\ \mathrm{m} = 3{,}8\ \mathrm{m}.$$

b) Tenkostěnný válec $J_0 = mr^2$, potom $a = \frac{1}{2}g\sin\alpha$,

$$l = \frac{v_0^2}{2 \cdot \frac{1}{2}g\sin\alpha} = \frac{v_0^2}{g\sin\alpha} = \frac{5^2}{9{,}8 \cdot \sin 30^\circ}\ \mathrm{m} = 5{,}1\ \mathrm{m}.$$

10. a) $m = \varrho_1 \cdot \pi R^2 \cdot c = \varrho_2 \cdot \pi(R^2 - r^2) \cdot c$, z čehož $\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2}} = 0{,}8$.

b) Zrychlení pohybu plného válce určíme užitím vztahu (3), tj.

$$a_1 = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{\frac{1}{2}mR^2}{mR^2}} = \frac{2}{3}\,g\sin\alpha = 0{,}67\,g\sin\alpha = 3{,}27\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Obdobně zrychlení pohybu dutého válce

$$a_2 = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)}{mR^2}} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{\frac{1}{2}m[R^2 + (0{,}81R)^2]}{mR^2}} = 0{,}55g\sin\alpha = 2{,}68\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

c) Oba válce mají urazit stejnou dráhu, tedy musí platit $s = \frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{1}{2}a_2t_2^2$, z čehož $\frac{t_2}{t_1} = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{1{,}83}}} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot 1{,}83} = 1{,}10$.

11. Obecně podle zákona o zachování energie platí
$$mgh = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{J_0}{mR^2}\right)mv^2 + F_0 \cdot \frac{h}{\sin\alpha},$$
po dosazení za $F_0 = mg\cos\alpha \cdot \dfrac{\xi}{R} \cdot \dfrac{h}{\sin\alpha}$ a $v^2 = 2a\dfrac{h}{\sin\alpha}$ dostaneme
$$a' = \frac{g\left(\sin\alpha - \dfrac{\xi}{R}\cos\alpha\right)}{1 + \dfrac{J_0}{mR^2}} = a - \frac{g \cdot \dfrac{\xi}{R}\cos\alpha}{1 + \dfrac{J_0}{mR^2}}.$$
Plný válec $a_1' = a_1 - \dfrac{g \cdot \dfrac{\xi}{R}\cos\alpha}{1 + \dfrac{\frac{1}{2}mR^2}{mR^2}} = a_1 - \dfrac{2}{3}g\dfrac{\xi}{R}\cos\alpha,$
$$a_1' = \left(3{,}27 - \frac{2}{3} \cdot 9{,}8 \cdot \frac{0{,}000\,5}{0{,}1}\cos 30^\circ\right)\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 3{,}23\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$
Dutý válec $a_2' = a_2 - \dfrac{g \cdot \dfrac{\xi}{R}\cos\alpha}{1 + \dfrac{mR^2}{mR^2}} = a_2 - \dfrac{1}{2}g\dfrac{\xi}{R}\cos\alpha,$
$$a_2' = \left(2{,}68 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8 \cdot \frac{0{,}000\,5}{0{,}1}\cos 30^\circ\right)\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 2{,}64\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$
$\dfrac{t_2}{t_1} = \sqrt{\dfrac{a_1'}{a_2'}} = \sqrt{\dfrac{3{,}27}{2{,}64}} = 1{,}11$. Valivý odpor se projevil jen nepatrně.

Cvičení 5

12. a) Motor automobilu vykoná práci $W = \Delta E_\mathrm{p} + \Delta E_\mathrm{k} + F_\mathrm{odp}s$, tj.
$$W = mgh + kmgs + \frac{1}{2}mv^2 = m\left(gsp + kgs + \frac{1}{2}v^2\right).$$
Pro dané hodnoty je
$$W = 1\,200 \cdot \left(9{,}8 \cdot 200 \cdot 0{,}02 + 0{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 200 + \frac{1}{2} \cdot 15^2\right)\ \mathrm{J} = 4{,}2 \cdot 10^5\ \mathrm{J}.$$

b) Pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu platí $s = \dfrac{1}{2}vt$, z čehož $t = \dfrac{2s}{v} = \dfrac{2 \cdot 200}{15}\ \mathrm{s} = 26{,}7\ \mathrm{s}$. Pro průměrný užitečný výkon motoru pak platí $P = \dfrac{W}{t} = \dfrac{4{,}2 \cdot 10^5}{26{,}7}\ \mathrm{W} = 16\ \mathrm{kW}$.

13. Postup je obdobný jako v příkladu 18 c); a) tělísko opustí kouli ve výšce

$h = \frac{5}{3}R$ nad vodorovnou rovinou; b) ze zákona o zachování mechanické energie plyne, že $v_0 = \sqrt{\frac{2}{3}Rg}$, pod úhlem $\varphi = 41{,}8°$ (obr. 34). c) Pohyb, kterým se pohybuje tělísko dál, když opustí povrch koule, je vrh šikmo dolů. Nejprve určíme dobu dopadu. Platí $\frac{5}{3}R = v_0 \cos\varphi t_\mathrm{d} + \frac{1}{2}gt_\mathrm{d}^2$, po dosazení dostaneme $\frac{1}{2}gt_\mathrm{d}^2 + \sqrt{\frac{2}{3}Rg} \cdot \sqrt{\frac{5}{9}}t_\mathrm{d} - \frac{5}{3}R = 0$, z čehož $t_\mathrm{d} = \left(\sqrt{\frac{100}{27}} - \sqrt{\frac{10}{27}}\right) \cdot \sqrt{\frac{R}{g}}$. Místo dopadu je od místa dotyku koule s vodorovnou rovinou vzdáleno o $L = R\cos\varphi + v_0 \sin\varphi \cdot t_\mathrm{d}$. Po dosazení za t_d dostaneme

$$L = R \cdot \sqrt{\frac{5}{9}} + \sqrt{\frac{2}{3}Rg} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\sqrt{\frac{100}{27}} - \sqrt{\frac{10}{27}}\right) \cdot \sqrt{\frac{R}{g}} = 1{,}46\,R.$$

Literatura

[1] BEDNAŘÍK, M., ŠIROKÁ, M.: *Fyzika pro gymnázia - Mechanika.* 3. vydání. Praha: Prometheus, 2000.

[2] MIKULČÁK, J. a kol.: *MFCh tabulky pro střední školy.* 4. vydání. Praha: Prometheus, 2009.

[3] MIKULČÁK, J. a kol.: *MFCh tabulky a vzorce pro střední školy.* 1. vydání. Praha: Prometheus, 2003.

[4] LEINVEBER, J. a kol.: *Strojnické tabulky.* Praha: Scientia, 1999.

[5] <http://en.wikipedia.org>.

[6] <http://cs.wikipedia.org>.

Zdroje obrázků

<http://www.sokolov.cz/>
<http://im.sport.cz/>
<http://tapety-na-plochu.luksoft.cz/>
<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/>

Ostatní obrázky vytvořila Miroslava Jarešová.