DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Miroslava Jarešová – Bohumil Vybíral

Obsah

Úvod – pojem diferenciální rovnice

Při výpočtech, v nichž se vyskytují derivace funkcí, zjišťujeme, že mezi funkcemi a jejich derivacemi platí řada vztahů. Např. pro funkci $y(t) = A\sin t$ platí $y'(t) = A\cos t$, $y''(t) = -A\sin t$. Potom

$$y''(t) + y(t) = 0. \tag{1}$$

Vezmeme-li jinou funkci $y(t)$, např. $y(t) = B\mathrm{e}^t$, je $y'(t) = B\mathrm{e}^t$, pak můžeme psát

$$y'(t) - y(t) = 0. \tag{2}$$

Rovnice, v nichž se jako neznámá vyskytuje funkce a její derivace, nazýváme diferenciální rovnice.

My se však budeme zabývat problémem opačným: k danému vztahu mezi funkcí a jejími derivacemi a nezávisle proměnnou, budeme hledat funkce, které tento vztah splňují. Vztahy (1) a (2) budeme tedy chápat jako rovnice, v nichž budeme hledat neznámou funkci $y(t)$. Pak můžeme říci, že např. funkce $y(t) = A\sin t$ je řešením rovnice (1). Řešením rovnice (1) je však také funkce $y(t) = B\cos t$, nebo také funkce $y(t) = A\sin t + B\cos t$ - přesvědčte se o tom derivováním a dosazením do (1).

Řešením diferenciální rovnice budeme rozumět takové funkce, jejichž dosazením do diferenciální rovnice dostaneme identitu.

Je vidět, že řešení dané diferenciální rovnice není jediné, ale může jich být i nekonečně mnoho. V praktických (v našem případě fyzikálních) úlohách však většinou ještě budeme znát podmínky (počáteční, okrajové, doplňující), které nám umožní z nekonečně mnoha řešení vybrat takové, které odpovídá dané situaci. Ukažme si toto na následujícím jednoduchém příkladu.

Uvažujme rovnoměrný přímočarý pohyb tělesa. Z fyziky víme, že velikost rychlosti je derivací dráhy podle času, tj. $s'(t) = v(t)$. Při rovnoměrném přímočarém pohybu je $v(t) = v = konst$. Dostaneme pak

$$s'(t) = v, \tag{3}$$

což je vlastně diferenciální rovnice pro dráhu $s(t)$.
Integrací dostaneme

$$s(t) = vt + C, \tag{4}$$

kde C je libovolná integrační konstanta.

Integrační konstantu C určíme z počátečních podmínek: nechť v čase $t = t_0$ urazilo těleso již dráhu s_0, tj. $s(t_0) = s_0$. Dosadíme-li do rovnice (4) za $t = t_0$, dostaneme $C = s_0 - vt_0$. Pak můžeme psát $s(t) = s_0 + v(t - t_0)$.

Zkusme nyní obdobným způsobem popsat rovnoměrně zrychlený pohyb, tj. $a(t) = a = konst.$. Víme, že platí $s'(t) = v(t)$, $v'(t) = a(t) = a$, z čehož dostaneme rovnici
$$s''(t) = a. \tag{5}$$
Po první integraci dostaneme
$$s'(t) = at + C_1, \tag{6}$$
další integrací
$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2, \tag{7}$$
kde C_1, C_2 jsou libovolné integrační konstanty. Určíme je z daných počátečních podmínek: v čase $t = 0$ je $s(0) = s_0$, $s'(0) = v_0$. Po dosazení do vztahu (6) dostaneme $v_0 = a \cdot 0 + C_1$, tj. $C_1 = v_0$, po dosazení do vztahu (7) dostaneme $s_0 = \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2$, tj. $C_2 = s_0$. Je tedy $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. Přesvědčte se dosazením, že tato funkce je skutečně řešením rovnice (5).

Uvědomme si ještě jednu věc: viděli jsme, že v případě rovnoměrného pohybu – diferenciální rovnice 1. řádu, stačilo zadat jednu počáteční podmínku, zatímco v případě rovnoměrně zrychleného pohybu – diferenciální rovnice 2. řádu – bylo nutné zadat **dvě** počáteční podmínky. Není to náhoda. Z hlediska fyziky obvykle zadáváme tolik počátečních podmínek, kolik je řád nejvyšší derivace obsažené v rovnici – pak dostaneme právě jedno řešení odpovídající dané situaci.

Při řešení diferenciálních rovnic bývá zvykem značit derivace různými způsoby: y'', $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, $\ddot{y}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$. *Tečka pro označení derivace se používá v případě, že derivujeme podle času, tj.* $\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $\ddot{y} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$. *Ovšem proměnná při řešení rovnice nemusí být vždy čas; pak používáme např. značení* $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, *derivujeme-li podle proměnné* x.

Nyní si ukážeme dva různé postupy, jak řešit úlohu, jejíž výsledkem bude exponenciální funkce. Při řešení úlohy 1 prvním způsobem nepotřebujeme znát pojem derivace, pouze vystačíme s limitou $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$. Nevýhoda tohoto postupu ovšem spočívá v tom, že je příliš zdlouhavý a použitelný pouze pro typy úloh, kde je výsledkem exponenciální funkce (což ne vždy na začátku řešení úlohy poznáme). Druhý způsob – využívá derivace, řeší se zde jednoduchá diferenciální rovnice. Postup je rychlejší, lze jej použít i u typů úloh, kde výsledkem není jen exponenciální funkce.

Příklad 1 – radioaktivní rozpad

Rychlost rozpadu prvku rádium je přímo úměrná jeho hmotnosti. Určete, kolik procent hmotnosti m_0 rádia se rozpadne za 200 let, jestliže víte, že poločas rozpadu rádia, tj. doba, za níž se rozpadne právě polovina jeho původního množství (resp. hmotnosti), je roven 1590 let. Rychlost rozpadu uvažujeme jako $\dfrac{\Delta m}{\Delta t}$.

Řešení

Úlohu vyřešíme dvěma způsoby, a to a) bez užití derivací, b) s užitím derivací.

a) Rozdělme si uvažovanou dobu t rozpadu rádia na n stejných časových intervalů Δt. Označme dále Δm úbytek hmotnosti částic za dobu Δt. Za malý časový interval Δt je hmotnost rádia, které se rozpadne, rovna $\lambda m \Delta t$, kde m je hmotnost rádia v daném časovém okamžiku, $\lambda > 0$ koeficient úměrnosti.

Tatáž hmotnost vzatá s opačným znaménkem (hmotnost nerozpadlých částic ubývá), je rovna přírůstku hmotnosti rozpadlých částic za dobu Δt:

$$\Delta m = -\lambda m \Delta t. \tag{8}$$

Nechť má rádium na počátku 1. časového intervalu hmotnost m_0, 2. časového intervalu hmotnost $m_1 = m_0 + \Delta m$, 3. časového intervalu hmotnost $m_2 = m_1 + \Delta m$, …, na konci uvažované doby $m_n = m$.

Platí

$$m_1 = m_0 - \lambda m_1 \Delta t, \quad \text{odkud} \quad m_1 = \frac{m_0}{1 + \lambda \Delta t},$$

$$m_2 = m_1 - \lambda m_2 \Delta t, \quad \text{odkud} \quad m_2 = \frac{m_1}{1 + \lambda \Delta t} = \frac{m_0}{(1 + \lambda \Delta t)^2},$$

…,

na konci uvažované doby $t = n\Delta t$ je $m_n = \dfrac{m_0}{(1 + \lambda \Delta t)^n}$.

Při těchto úvahách předpokládáme, že hmotnosti m_0, m_1,…, m_n mají v časových intervalech Δt stálou velikost.

Po dosazení za $\Delta t = \dfrac{t}{n}$ dostaneme $m = m_n = \dfrac{m_0}{\left(1 + \lambda \dfrac{t}{n}\right)^n}$.

Označme $\lambda \dfrac{t}{n} = \dfrac{1}{x}$, odkud $n = \lambda t x$.

Po dosazení do vztahu pro m dostaneme $m = \dfrac{m_0}{\left[\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{\lambda t}}$.

Řešení úlohy bude tím přesnější, čím větší počet úseků n zvolíme. Bude-li v limitě $n \to \infty$ (tím také $x \to \infty$), dostaneme užitím vztahu $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$ vztah pro hmotnost

$$m = m_0\mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{9}$$

Konstantu λ určíme z podmínky: je-li v čase $t = T$ hmotnost $m = \frac{m_0}{2}$, je $\frac{m_0}{2} = m_0\mathrm{e}^{-\lambda T}$, odkud $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, a tudíž

$$m(t) = m(0)\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T}t} = m_0 2^{-\frac{t}{T}} = m(0)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}.$$

Pro dané hodnoty: $m(200) = 0{,}915m_0$. Za 200 let se rozpadne 8,5 % rádia.

b) Vztah (8) přepíšeme pomocí diferenciálů $\mathrm{d}m = -\lambda m\mathrm{d}t$.

Tuto rovnici upravíme na tvar $\frac{\mathrm{d}m}{m} = -\lambda\mathrm{d}t$, (tzv. separace - oddělení proměnných). Po integraci $\ln m = -\lambda t + \ln C$ a odlogaritmování je $m = C\cdot\mathrm{e}^{-\lambda t}$. Počáteční podmínka: v čase $t = 0$ je $m = m_0$, z čehož $C = m_0$, a tudíž $m = m_0\mathrm{e}^{-\lambda t}$. Koeficient λ určíme z doplňující podmínky: v čase $t = T$ je $m = \frac{m_0}{2}$, tj. $\frac{m_0}{2} = m_0\mathrm{e}^{-\lambda T}$, odkud $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$, a tudíž

$$m(t) = m_0\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{T}t} = m_0 2^{-\frac{t}{T}} = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}},$$

což je stejný výsledek jako v úloze a).
Pro dané hodnoty: $m(200) = 0{,}915m_0$. Za 200 let se rozpadne 8,5 % rádia.

Příklad 1 nám ukazuje, jak je výhodné naučit se řešit úlohy pomocí diferenciálních rovnic. Podívejme se tedy v další části na řešení diferenciálních rovnic podrobněji. Vzhledem k omezenému rozsahu textu se omezíme pouze na jednodušší typy obyčejných diferenciálních rovnic majících značné uplatnění při studiu fyzikálních jevů.

1 Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

1.1 Jak řešit jednodušší diferenciální rovnice 1. řádu

Z předchozího textu vyplývá, že obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu rozumíme vztah mezi nezávisle proměnnou, neznámou funkcí této proměnné a derivacemi této funkce až do n-tého řádu.

Označíme-li nezávisle proměnnou x a neznámou funkci y, pak můžeme obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu psát ve tvaru

$$\varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{10}$$

kde φ je funkce $(n+2)$ proměnných.
Konkrétně např. $y' + xy = 0$, $y'' + 4y - \sin(x) = 0$ jsou obyčejné diferenciální rovnice 1. a 2. řádu.

Řešit (integrovat) diferenciální rovnici (10), znamená nalézt všechny funkce $y = \varphi(x)$, které vyhovují dané diferenciální rovnici.

Každá funkce, která vyhovuje dané diferenciální rovnici, se nazývá *integrál diferenciální rovnice*, např. rovnici $y'' + y = 0$ vyhovuje funkce $y = \sin x$. Mohli bychom se o tom přesvědčit dosazením do dané rovnice. Není to ale jediný integrál této rovnice, protože dané rovnici vyhovuje také každá funkce $y = C \sin x$ nebo $y = C \cos x$ nebo $y = \pm C \mathrm{e}^{-x}$, kde C je libovolná konstanta.

Nyní se už začneme zabývat jednoduchými rovnicemi 1. řádu. Takovou rovnici lze psát obecně ve tvaru

$$\varphi(x, y, y') = 0. \tag{11}$$

Dokážeme-li z této rovnice vypočítat y' jako funkci proměnných x, y, dostaneme rovnici (11) ve tvaru

$$y' = f(x, y).$$

Nejjednodušší typ této rovnice můžeme zapsat ve tvaru

$$y' = f(x), \tag{12}$$

což vede k hledání primitivní funkce.

Z integrálního počtu víme, že je-li $F(x)$ primitivní funkce k funkci $f(x)$, pak také každá funkce $F(x) + C$, kde C je libovolná konstanta, je primitivní funkcí k funkci $f(x)$.

Dále také víme, že platí: jsou-li $F_1(x)$ a $F_2(x)$ dvě různé primitivní funkce k funkci $f(x)$, pak je jejich rozdíl roven konstantě, tj. $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Dokážeme-li nalézt k funkci $f(x)$ funkci primitivní, zvládneme již také vyřešit diferenciální rovnici (12).
Potom

$$y = \int f(x)\mathrm{d}x + C, \tag{13}$$

kde C je libovolná konstanta.

Z (13) je vidět, že hledaná funkce není rovnicí (13) určena jednoznačně, ale že rovnice (12) má řešení nekonečně mnoho. Každé takové řešení dostaneme, zvolíme-li za C v rovnici (13) nějaké číslo.

Řešení ve tvaru (13), které obsahuje libovolnou konstantu C, nazýváme *obecný integrál* diferenciální rovnice (12). Každé řešení, které dostaneme z obecného integrálu, zvolíme-li za C nějaké libovolné číslo, se nazývá *partikulární integrál* diferenciální rovnice (12).

Obecný integrál je tedy souhrnem všech integrálů partikulárních. Graf funkce, která je integrálem dané diferenciální rovnice, se nazývá *integrální křivka* dané diferenciální rovnice. Např. rovnice $y' = 2x$ má obecný integrál $y = x^2+C$, kdežto $y = x^2$, $y = x^2-1$ apod. jsou její partikulární integrály. Integrální křivky této diferenciální rovnice jsou paraboly ekvidistantně posunuté ve směru osy y.

Vzhledem k tomu, že za konstantu C můžeme zvolit libovolné číslo, můžeme klást na hledanou funkci ještě nějaký další požadavek a snažit se, aby hledaná funkce zvolený požadavek splňovala – pro hledanou funkci jsme zvolili počáteční podmínku. Budeme např. požadovat, aby hledaná integrální křivka $y = x^2 + C$ procházela nějakým předem zvoleným bodem $x_0 = [2, 3]$. Pak $3 = 2^2 + C$, z čehož $C = -1$. Rovnice hledané křivky tedy bude $y = x^2 - 1$.

1.1.1 Řešení diferenciálních rovnic 1. řádu metodou separace proměnných

Jedná se o rovnici typu

$$y' = f(x)g(y) \tag{14}$$

Po dosazení $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y). \tag{15}$$

Z úvahy vyloučíme prozatím ty body, pro které je $g(y) = 0$. Pak můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\mathrm{d}x. \tag{16}$$

V rovnici (16) jsou obě proměnné od sebe odděleny tak, že na levé straně rovnice se vyskytuje pouze funkce proměnné y a její diferenciál, na pravé straně pak jen součin funkce proměnné x a diferenciálu $\mathrm{d}x$.

V takovém případě jsou proměnné separovány (odděleny). Pokud existují k funkcím $\dfrac{1}{g(y)}$ a $f(x)$ primitivní funkce, můžeme psát

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C. \tag{17}$$

Je-li $g(y) = 0$, pak $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$, tj. $y = konst.$ a dostáváme tzv. *singulární řešení.*

Rovnici (17) nazýváme obecný integrál rovnice (15). Dokážeme-li rovnici (17) řešit vzhledem k y, dostaneme obecný integrál rovnice ve tvaru $y = h(x) + C$.

Příklad 2 – separace proměnných – 1

Řešte diferenciální rovnici

$$x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0.$$

Řešení

a) Vyloučíme z naší úvahy nejprve ty body, pro které je buď $x = 0$ (body osy y) nebo $y = 0$ (body osy x). Pak můžeme danou rovnici dělit součinem xy a upravit na tvar:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Po integraci $\ln|y| = -\ln|x| + K$, kde K je libovolná konstanta. Zvolme dále $K = \ln|C_1|$, kde $C_1 > 0$. Pak dostaneme

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1.$$

Po odlogaritmování dostaneme

$$|y| = \frac{C_1}{|x|},$$

neboli $|xy| = C_1$, kde $C_1 > 0$. Chceme-li odstranit absolutní hodnotu z této rovnice, musíme rozlišit dva případy:

1. $xy > 0$, pak $xy = C_1$, nebo

2. $xy < 0$, pak $xy = -C_1$.

Oba tyto případy lze vyjádřit jedinou rovnicí

$$xy = C,$$

kde $C \in R - \{0\}$.

b) Nyní vyřešíme původně vyloučené případy. Nejprve se podíváme na body, pro něž $y = 0$. Tato rovnice značí konstantní funkci, stále rovnou nule. Diferenciál této funkce je ovšem také stále roven nule, tj. $\mathrm{d}y = 0$. Dosadíme-li do rovnice $y = 0$ a také $\mathrm{d}y = 0$, vidíme, že je také tato rovnice splněna. Je tedy funkce $y = 0$ také integrálem dané rovnice. Integrální křivka je v tomto případě osa x.

Podobně je tomu i ve druhém případě, tj. pro $x = 0$. Pak je opět také $\mathrm{d}x = 0$ a daná rovnice je zase splněna.

Je dobré si uvědomit, že rovnice $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0$ nevyjadřuje totéž, co rovnice $y' = -\dfrac{y}{x}$. Vše spočívá v tom, že v textu úlohy nebylo řečeno, zda-li daná rovnice vyjadřuje vztah mezi nezávisle proměnnou x a její funkcí y, nebo zda vyjadřuje vztah mezi nezávisle proměnnou y a její funkcí x. Daná rovnice o tom také nic neříká. Avšak rovnice $y' = -\dfrac{y}{x}$ mluví výslovně o derivaci funkce y (podle nezávisle proměnné x). Skutečně také funkce $x = 0$, která je integrálem dané rovnice není funkcí tvaru $y = \varphi(x)$ a osa y, která je geometrickým znázorněním rovnice $x = 0$ není také opravdu grafem žádné takové funkce. V geometrických úlohách je zpravidla potřeba uvažovat oba zmíněné případy, kdežto při vyšetřování funkcí musí být předem známo, která proměnná je nezávislá a která je její funkcí.

Jinak řečeno: Hledáme-li jenom funkce tvaru $y = \varphi(x)$, které dané rovnici vyhovují, potom samozřejmě $x = 0$ není řešením této úlohy.

Všimněme si ještě jednou obou posledních integrálů naší rovnice. Ani jeden nebyl získán integrací dané rovnice, tj. nehledali jsme primitivní funkci. Jsou to tedy integrály jiné povahy než integrály typu $xy = C$. Mohlo by se zdát, že oba tyto integrály jsou obsaženy v integrálu obecném pro $C = 0$, ale není to tak. Při integrování jsme totiž dostali $\ln C_1$, což je totéž jako $\ln |C|$ a logaritmovat $C = 0$ nelze. Nemůžeme tedy v obecném integrálu zvolit $C = 0$. Takový integrál, který nelze dostat z integrálu obecného volbou integrační konstanty, se nazývá *integrál singulární*.

Příklad 3 – separace proměnných – 2

Řešte rovnice:

a) $2x\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$,
b) $dx - x\mathrm{d}y = 0$,
c) $y' - y = 0$.

Řešení

a) Rovnici lze upravit na tvar $\mathrm{d}y = -2x\mathrm{d}x$. Po integraci dostaneme

$$y = -x^2 + C.$$

b) Rovnici upravíme na tvar, kdy jsou již proměnné separovány, tj. $\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$, pro $x \neq 0$. Po integraci je $y = \ln|x| + C$. Rovnici také vyhovuje řešení $x = 0$, tzv. *singulární řešení.*

c) Rovnici převedeme na zápis pomocí diferenciálů, tj. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'$, po odstranění zlomků dostaneme $\mathrm{d}y = y\mathrm{d}x$, po separaci $\frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x$ pro $y \neq 0$.

Po integraci dostaneme $\ln|y| = x + K$, kde K je libovolná konstanta. V tomto případě se ukazuje jako výhodné vyjádřit integrační konstantu K jako přirozený logaritmus nějakého kladného čísla $C_1 > 0$. To je možné učinit, protože každé reálné číslo lze považovat za přirozený logaritmus nějakého kladného čísla. Můžeme tedy psát

$$K = \ln C_1.$$

Pak lze rovnici přepsat na tvar

$$\ln|y| = x + \ln C_1.$$

Po úpravě $\ln|y| = \ln \mathrm{e}^x + \ln C_1$,

$$|y| = C_1\mathrm{e}^x.$$

Pro $y < 0$ je $|y| = -y$, tj.

$$y = -C_1\mathrm{e}^x,$$

pro $y > 0$ můžeme psát $y = C_1\mathrm{e}^x$. Oba tyto případy lze vyjádřit jedinou rovnicí

$$y = C\mathrm{e}^x,$$

kde $C \in R - \{0\}$.
Potom $\ln|y| = \ln \mathrm{e}^x + \ln C$.
Po odlogaritmování $y = C\mathrm{e}^x$.
Je-li $y = 0$ dostaneme singulární řešení.

Příklad 4 – integrální křivka

Najděte křivku procházející počátkem soustavy souřadnic $[0, 0]$, pro kterou směrnice tečny v každém jejím bodě $[x, y]$ je rovna $2x + 1$.

Řešení

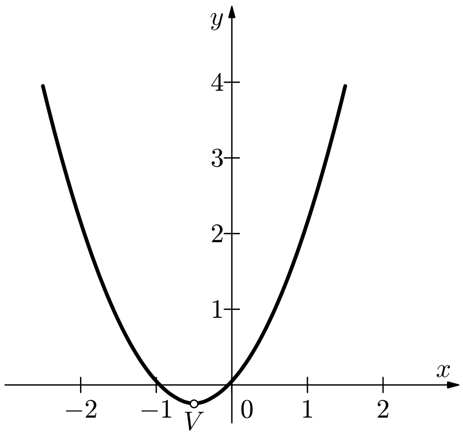
Dle zadání platí $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x + 1$,
po separaci a integraci $\mathrm{d}y = (2x + 1)\mathrm{d}x$,

$$y = x^2 + x + C.$$

Konstantu C určíme z podmínky zadání: křivka musí procházet bodem $[0, 0]$.
Je tedy $0 = 0 + 0 + C$, z čehož $C = 0$.
Rovnice křivky potom je $y = x^2 + x$.
Nyní určíme, o jakou křivku se jedná. Po níže popsané úpravě je

$$y = x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

což je rovnice paraboly s vrcholem v bodě $V = \left[-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right]$.



Obr. 1 Graf integrální křivky

1.1.2 Řešení lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu metodou variace konstant

Lineární diferenciální rovnice jsou takové rovnice, které jsou lineární vzhledem k neznámé funkci a jejím derivacím. Ve speciálním případě je možno diferenciální rovnici (12) psát ve tvaru

$$y' + Py = Q, \tag{18}$$

kde P, Q jsou opět spojité funkce proměnné x v intervalu J. Speciálně dostaneme, jestliže je v uvažovaném intervalu $Q = 0$

$$y' + Py = 0. \tag{19}$$

Tato rovnice se nazývá *homogenní lineární diferenciální rovnice*, někdy také *lineární diferenciální rovnice s nulovou pravou stranou.* Rovnice (18) se pak nazývá *nehomogenní (s nenulovou pravou stranou).* V rovnici (19) je možno proměnné separovat:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P\mathrm{d}x.$$

Integrací (19) dostaneme její obecný integrál:

$$\ln|y| = -\int P\mathrm{d}x + \ln C, \quad \text{kde } C > 0,$$

odtud potom

$$y = C\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x}. \tag{20}$$

Mimo to vyhovuje rovnici (19) také funkce $y = 0$, která sice odpovídá volbě konstanty $C = 0$, ale nedostaneme ji integrací. (Proč?)

K nalezení obecného integrálu nehomogenní rovnice (resp. s pravou stranou) (18) se užívá tzv. metody *variace konstanty*:

1. Nejprve řešíme danou homogenní rovnici a najdeme její obecný integrál ve tvaru (20).

2. Ve vztahu (20) nahradíme konstantu C funkcí $C = C(x)$, tj.

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x}. \tag{21}$$

   Pro funkci $C(x)$ pak hledáme podmínku, aby funkce $y = C(x)\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x}$ vyhovovala rovnici (18). Vypočítáme y' a dosadíme do rovnice (18):

$$y' = C'(x)\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x} - C(x)P\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x},$$

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x} - C(x)P\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x} + PC(x)\mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x} = Q,$$

po úpravě dostaneme

$$C'(x) = Q\mathrm{e}^{\int P\mathrm{d}x}. \tag{22}$$

To je diferenciální rovnice pro funkci $C(x)$, jejíž řešení je možno napsat ve tvaru

$$C(x) = \int Q\mathrm{e}^{\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + K, \tag{23}$$

kde K je libovolná konstanta. Dosadíme-li tuto funkci do rovnice (20), obdržíme

$$y = \mathrm{e}^{-\int P\mathrm{d}x}\left(K + \int Q\mathrm{e}^{\int P\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right), \tag{24}$$

což je obecný integrál dané diferenciální rovnice.

Příklad 5 – variace konstant – 1

Řešte rovnici $y' + y = \mathrm{e}^x$ metodou variace konstant.

Řešení

1. Nejprve řešíme příslušnou homogenní rovnici $y'+y=0$ metodou separace proměnných.

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\mathrm{d}x,$$
$$y = C\mathrm{e}^{-x}.$$

2. Předpokládáme $C = C(x)$, potom $y = C(x)\mathrm{e}^{-x}$, $y' = C'(x)\mathrm{e}^{-x} - C(x)\mathrm{e}^{-x}$. Po dosazení do původní nehomogenní rovnice

$$\begin{aligned} C'(x)\mathrm{e}^{-x} - C(x)\mathrm{e}^{-x} + C(x)\mathrm{e}^{-x} &= \mathrm{e}^x, \\ C'(x) &= \mathrm{e}^{2x}, \\ C(x) &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + K, \end{aligned}$$

kde K je libovolná konstanta.

Pak $y = \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + K\right)\mathrm{e}^{-x}$, neboli

$$y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + K\mathrm{e}^{-x}.$$

Příklad 6 – variace konstant – 2

Řešte diferenciální rovnici $xy' - y = x^2$ metodou variace konstant:

Řešení

1. Vyřešíme dříve uvedeným postupem homogenní rovnici:

$$\begin{aligned} xy' - y &= 0, \\ x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{\mathrm{d}x}{x}, \\ \ln|y| &= \ln|x| + \ln C, \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

2. Předpokládáme $C = C(x)$, potom $y = C(x)x$, $y' = C'(x)x + C(x)$.
   Po dosazení do původní nehomogenní rovnice

$$\begin{aligned} x[C'(x)x + C(x)] - C(x)x &= x^2, \\ x^2C'(x) &= x^2, \\ C'(x) &= 1, \\ C(x) &= x + K. \end{aligned}$$

   Po dosazení do vztahu pro y dostaneme $y = (x+K)x = x^2 + Kx$.

Cvičení 1

Řešte diferenciální rovnice:

1. $y' = ky$,
2. $y' - y = 3$,
3. $y' = 2xy$,
4. $y' - y = \mathrm{e}^x$
5. $y' + y = x$.

1.2 Úlohy vedoucí k řešení diferenciálních rovnic 1. řádu

Příklad 7 – barometrická rovnice

Určete závislost atmosférického tlaku na výšce nad hladinou moře, jestliže víte, že tlak na hladině moře je $p_0 = 1013$ hPa a ve výšce $h_1 = 500$ m nad hladinou moře je tlak $p_1 = 940$ hPa. Předpokládejte, že vzduch má všude stejnou teplotu.

Řešení

Protože teplota vzduchu je ve všech místech stejná, platí $pV = konst.$ Tento zákon lze přepsat do tvaru $\frac{p_0}{p} = \frac{V}{V_0} = \frac{\varrho_0}{\varrho}$, kde p, ϱ jsou hodnoty ve výšce h. Dále budeme předpokládat, že ve vrstvě o tloušťce dh je hustota konstantní. Tento vztah vyžaduje jiný fyzikální výklad – viz [10]. Pro úbytek tlaku v této vrstvě pak dostáváme $\mathrm{d}p = -\varrho g \mathrm{d}h$. Z Boylova-Mariottova zákona víme, že platí $\varrho = \frac{p_0}{\varrho_0}p$. Po dosazení do vztahu pro dp dostaneme

$$\mathrm{d}p = -\frac{\varrho_0}{p_0} p g \mathrm{d}h.$$

Po separaci proměnných a integraci obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\varrho_0}{p_0} g \mathrm{d}h, \quad \ln p = -\frac{\varrho_0}{p_0} gh + \ln C.$$

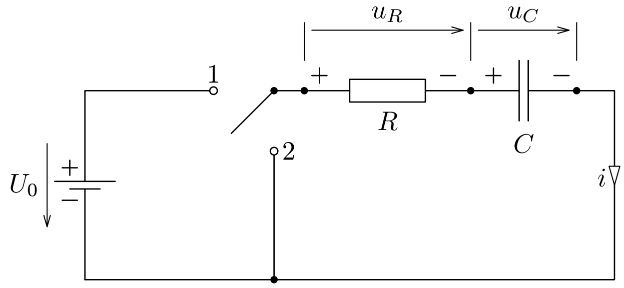
Po odlogaritmování $p = C\mathrm{e}^{-\frac{\varrho_0}{p_0}gh} = C\mathrm{e}^{-kh}$, kde $k = \frac{\varrho_0}{p_0}g$.
Okrajové podmínky: ve výšce $h = 0$ je tlak p_0, z čehož $C = p_0$, a tedy $p = $
$= p_0\mathrm{e}^{-kh}$. Konstantu k určíme pomocí druhé podmínky, tj. ve výšce $h = 500$ m je tlak 940 hPa: $k = \frac{1}{h}\ln\frac{p}{p_0} = 0{,}00015$.
Hledaná závislost je tedy $p = 1013\mathrm{e}^{-0{,}00015h}$ hPa.

Příklad 8 – nabíjení kondenzátoru

Kondenzátor o kapacitě C připojíme v čase $t = 0$ ke zdroji o napětí U_0. Nabíjíme ho přes rezistor o odporu R. Jaký je časový průběh proudu a napětí na kondenzátoru?

Řešení

Zapojením spínače do polohy 1 (viz obr. 2) připojíme obvod na zdroj o napětí $U_0 = konst.$



Obr. 2 Nabíjení kondenzátoru

Podle 2. Kirchhoffova zákona platí

$$u_R + u_C - U_0 = 0. \tag{25}$$

Po dosazení za $u_R = Ri$, $u_C = \dfrac{q}{C}$ do (25) dostaneme

$$Ri + \frac{q}{C} - U_0 = 0. \tag{26}$$

Zderivujeme-li rovnici (26), dostaneme

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{27}$$

Užitím vztahu $i = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ můžeme rovnici (27) upravit na tvar

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i = 0.$$

Po separaci proměnných, integraci a odlogaritmování dostáváme:

$$\frac{\mathrm{d}i}{i} = -\frac{1}{RC}\mathrm{d}t, \quad i = K_1\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}, \tag{28}$$

kde K_1 je integrační konstanta, kterou určíme z počátečních podmínek. V čase $t = 0$ je napětí na kondenzátoru $u_C = 0$ (kondenzátor není nabitý) a proud protékající obvodem je I_0. Podle (26) je $RI_0 = U_0$, odkud $I_0 = \dfrac{U_0}{R}$, podle (28) je $I_0 = K_1$. Pak $i = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$.

Průběh napětí na kondenzátoru u_C je dán vztahem $u_C = \dfrac{1}{C}q$, po derivaci $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{C}\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{C}i = \dfrac{1}{C}I_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$. Po separaci proměnných a integraci

$$\mathrm{d}u_C = \frac{1}{C}I_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\,\mathrm{d}t,$$

$$u_C = \frac{1}{C}\frac{U_0}{R}\cdot(-RC)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + K_2,$$

$$u_C = U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} + K_2. \tag{29}$$

Integrační konstantu K_2 určíme z počátečních podmínek: v čase $t = 0$ je $u_C = 0$, po dosazení do (29) dostaneme: $0 = U_0 + K_2$, odkud $K_2 = -U_0$. Po dosazení za K_2 do (29) dostaneme

$$u_C = U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} - U_0 = -U_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

Příklad 9 – vliv cívky na průchod proudu v el. obvodu při přechodovém ději

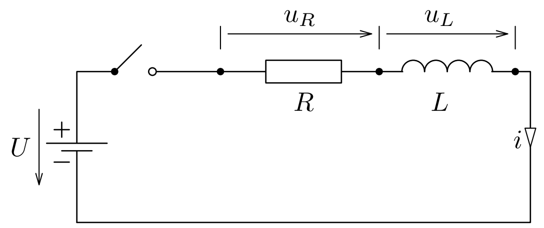
Do elektrického obvodu o napětí U zapojíme cívku o indukčnosti L a rezistor o odporu R. Určete proud procházející cívkou v časovém okamžiku t po zapojení.

Řešení

Po sepnutí spínače je podle 2. Kirchhoffova zákona součet obvodových napětí na cívce a na rezistoru trvale roven svorkovému napětí zdroje.

Obvodové napětí na cívce je určeno vztahem $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. V každém okamžiku platí $u_R + u_L = U$. Po dosazení

$$Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U. \tag{30}$$



Obr. 3 Obvod s cívkou

Tuto rovnici vyřešíme tzv. metodou **variace konstant**:

1. Vyřešíme rovnici „s pravou stranou rovnou nule", tj. $Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0.$
po separaci proměnných, integraci a odlogaritmování dostaneme

$$i = K_1 \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}. \tag{31}$$

2. Nyní předpokládáme $K_1 = K_1(t)$, potom $i = K_1(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$.
Po derivaci i a dosazení do úplné rovnice (30) dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = K_1{}'(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} - K_1(t)\frac{R}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t},$$

$$RK_1(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + L\left(K_1{}'(t)\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} - K_1(t)\frac{R}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) = U,$$

odkud $K_1{}'(t) = \dfrac{U}{L}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}$,

po integraci $K_1(t) = \dfrac{U}{R}\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t} + K_2$.

Po dosazení do (31)

$$i = \frac{U}{R} + K_2\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}. \tag{32}$$

Integrační konstantu K_2 určíme z počátečních podmínek: v čase $t = 0$ je $i = 0$, z čehož $K_2 = -\dfrac{U}{R}$.

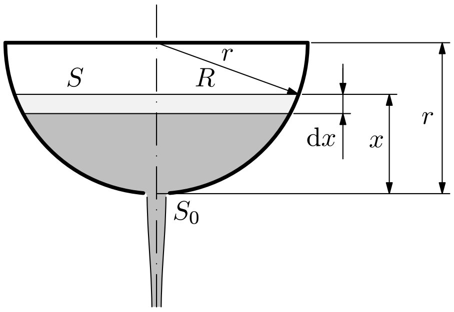
Hledané řešení je $i = \dfrac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right)$.

Příklad 10 – výtok kapaliny z nádoby

Nádoba tvaru polokoule o poloměru $r = 10$ cm je zcela naplněná kapalinou. Ve dně nádoby je otvor o průřezu $S_0 = 4\ \mathrm{mm}^2$. Za jakou dobu po uvolnění otvoru klesne hladina kapaliny o polovinu poloměru, jestliže koeficient zúžení vytékajícího kapalinového proudu je $k = 0{,}6$?

Řešení

Nechť je výška hladiny kapaliny v počátečním časovém okamžiku $t = 0$ rovna r. Víme, že rychlost výtoku kapaliny v okamžiku, kdy výška její hladiny je rovna x, je určena Torricelliho vztahem $v_1 = \sqrt{2gx}$. Uvažujeme-li koeficient zúžení vytékajícího kapalinového proudu k, pak je rychlost v určena vztahem $v = k\sqrt{2gx}$. V nekonečně malém časovém intervalu Δt můžeme výtok kapaliny považovat za rovnoměrný.



Obr. 4 Nádoba s kapalinou

Za dobu Δt vyteče výškovým otvorem element sloupce kapaliny, jehož výška je $v\Delta t$ a plošný průřez S_0, což má za následek snížení hladiny kapaliny v nádobě o $-\Delta x$. V důsledku těchto úvah dostáváme

$$kS_0\sqrt{2gx}\Delta t = -S\Delta x,$$

kde S je okamžitý plošný průřez hladiny kapaliny.

Pak pro nekonečně malé intervaly $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}x$ dostaneme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{kS_0\sqrt{2gx}}{S},$$

kde $S = \pi R^2 = \pi\left[r^2 - (r-x)^2\right] = \pi(2rx - x^2)$ (viz obr. 4). Po dosazení za S a separaci proměnných dostaneme

$$\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{kS_0\sqrt{2g}}\frac{2rx - x^2}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$$

Po integraci máme

$$t = \frac{\pi}{kS_0\sqrt{2g}}\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}rx^{\frac{3}{2}}\right) + C.$$

Počáteční podmínky: v čase $t = 0$ je $x = r$, a tím $C = \frac{14}{15}\frac{\pi}{kS_0\sqrt{2g}}r^{\frac{5}{2}}$, takže

$$t = \frac{\pi x\sqrt{x}}{kS_0\sqrt{2g}}\left(\frac{2}{5}x - \frac{4}{3}r\right) + \frac{14}{15}\frac{\pi}{kS_0\sqrt{2g}}r^2\sqrt{r}.$$

Pro $x = \frac{r}{2}$ dostáváme

$$t = \frac{\pi}{2kS_0\sqrt{g}}\frac{28\sqrt{2}-17}{30}r^2\sqrt{r}.$$

Pro dané hodnoty:
hladina klesna o polovinu původní hodnoty za $t = 8$ min 18 s.

Příklad 11 – vedení tepla

Teplota chleba vytaženého z pece během 20 minut klesla ze 100 °C na 60 °C. Teplota okolního vzduchu je $\tau_0 = 25$ °C. Za jakou dobu od počátku ochlazování se teplota chleba snížila na 30 °C?

Řešení

Rychlost ochlazování tělesa představuje pokles teploty τ za jednotku času t a je vyjádřena derivací $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}$. Podle Newtonova zákona vedení tepla je rychlost ochlazování tělesa přímo úměrná rozdílu teplot tělesa a okolního prostředí. Je to nerovnoměrný proces. Se změnou rozdílu teplot se mění i rychlost ochlazování tělesa. Za předpokladu, že se teplota okolí nemění, bude mít diferenciální rovnice ochlazování chleba tvar

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -k(\tau - \tau_0),$$

kde τ je teplota chleba, τ_0 je teplota okolního vzduchu, $k > 0$ je koeficient úměrnosti.

Nechť t je časový interval, ve kterém sledujeme chladnutí chleba. Po separaci proměnných a integraci dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\tau - \tau_0} = -k\mathrm{d}t,$$

$$\ln(\tau - \tau_0) = -kt + \ln C,$$

po odlogaritmování dostaneme

$$\tau = \tau_0 + C\mathrm{e}^{-kt}.$$

Počáteční podmínka: v čase $t = 0$ je $\tau = 100$ °C, $\tau_0 = 25$ °C, a tím $C = 75$ °C. Doplňující podmínka: v čase $t = 20$ minut je $\tau = 60$ °C, $\tau_0 = 25$ °C. Po dosazení do vztahu pro τ dostaneme $60 = 25 + 75\mathrm{e}^{-k\cdot 20}$, z čehož

$$\mathrm{e}^{-k} = \left(\frac{35}{75}\right)^{\frac{1}{20}} = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

Dostáváme $\tau = 75 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} + 25$, kde za t dosazujeme čas v minutách.
Nyní určíme t pro $\tau = 30$ °C:

$$30 = 75 \cdot \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}} + 25,$$

$$\frac{1}{15} = \left(\frac{7}{15}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Po zlogaritmování a vyjádření t dostaneme $t = 71$ minut.
Chleba bude mít teplotu 30 °C po 1 hodině a 11 minutách.

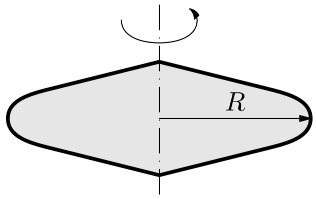
Příklad 12 – disk otáčející se v kapalině

Na kruhový disk otáčející se v kapalině malou úhlovou rychlostí podle osy symetrie (obr. 5) působí třecí síla, která je přímo úměrná úhlové rychlosti pohybu. Najděte závislost této úhlové rychlosti na čase, jestliže víte, že počáteční otáčky disku 100 ot·min^{-1} za 1 minutu klesnou na 60 ot·min^{-1}.

Řešení

Označme ω úhlovou rychlost disku, n počet otáček, pro ω platí $\omega = \frac{2\pi n}{60}$. Při otáčení disku na disk působí třecí síla, která je lineárně závislá na úhlové rychlosti pohybu. Tato síla vzhledem k ose otáčení vyvolá určitý brzdný moment síly.

Označme $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ rychlost změny úhlové rychlosti disku v kapalině ($\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$ má význam úhlového zrychlení).



Obr. 5 Disk v kapalině

Napíšeme rovnici vyjadřující momentovou podmínku vzhledem k ose otáčení.

$$M = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t},$$

kde J je moment setrvačnosti disku vzhledem k ose otáčení. Zbývá určit velikost momentu M. Nechť R je poloměr disku.

Pro zjednodušení předpokládejme, že tento moment vyvolává nějaká síla $\boldsymbol{F}$, která působí na poloměru $R_s = k_1 \cdot R$, kde k_1 je koeficient závislý na profilu disku.

Síla F je úměrná úhlové rychlosti disku $F = k_2\omega$ (k_2 je koeficient úměrnosti).
Pro moment této síly platí

$$M = -k_1 k_2 R\omega,$$

znaménko minus je zde proto, že moment působí proti směru otáčení.
Porovnáním vztahů pro moment M dostáváme diferenciální rovnici

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -k_1 k_2 R\omega,$$

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{k_1 k_2 R}{J}\omega.$$

Označme $k = \dfrac{k_1 k_2 R}{J}$ je konstanta pro daný disk. Potom

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -k\omega.$$

Po separaci, integraci a odlogaritmování dostaneme

$$\omega = C\mathrm{e}^{-kt}.$$

Počáteční podmínka: v čase $t = 0$ je $\omega = \omega_0$, z čehož $C = \omega_0$.
Potom $\omega = \omega_0\mathrm{e}^{-kt}$.

Dle zadání je $\omega = \dfrac{10}{3}\pi\ \mathrm{s}^{-1}$, pak $\omega = \left(\dfrac{10}{3}\pi\right)\mathrm{e}^{-kt}$.
Doplňující podmínka: v čase $t = 1\ \mathrm{min} = 60\ \mathrm{s}$ je $\omega = 2\pi\ \mathrm{s}^{-1}$, z čehož dostáváme $k = \dfrac{1}{60}\ln\dfrac{5}{3}$.

Potom

$$\omega = \left(2\pi \cdot \frac{5}{3}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{60}\ln\frac{5}{3}\right)t} \quad \mathrm{s}^{-1},$$

po úpravě

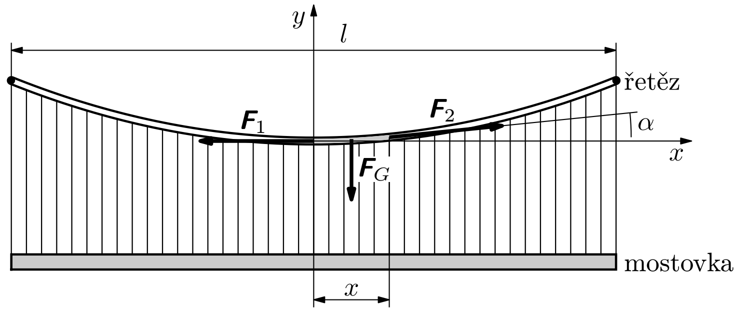
$$\omega = 2\pi \left(\frac{3}{5}\right)^{\left(\frac{1}{60}t-1\right)} \quad \mathrm{s}^{-1}.$$

Příklad 13 – závěsný most – 1

Určete tvar křivky řetězu závěsného mostu, předpokládáte-li, že zatížení je rozděleno rovnoměrně po délce řetězu **v horizontální přímce**. Hmotnost řetězu vzhledem k hmotnosti mostovky zanedbejte.

Řešení

Na řetěz mostu působí tíhová síla rovnoměrného rozložení závěsné mostovky a tahová síla realizovaná závěsy řetězu. Na část délky x působí tíhová síla $F_G = \dfrac{m}{l}gx$ (m je celková hmotnost mostu) a dvě tahové síly o velikostech F_1, F_2 (viz obr. 6).



Obr. 6 Závěsný most

Nechť řetěz svírá s horizontální rovinou v určitém bodě úhel α. Pro úhel α platí: $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}$ (dále jen y, kde $y = y(x)$ je hledaná rovnice křivky).
Tahovou sílu $\boldsymbol{F}_2$ v laně můžeme rozložit do dvou složek:
$F_{2x} = F_2 \cos\alpha$, $F_{2y} = F_2 \sin\alpha$.
Protože řetěz je v rovnováze, musí být výslednice všech sil na něj působících rovna nule. Složkově – ve směru x: $F_2 \cos\alpha = F_1$, ve směru y: $F_2 \sin\alpha = \dfrac{m}{l}gx$.

Z toho dostáváme pro $\operatorname{tg}\alpha = \frac{mg}{lF_1}x$.

Označme $\frac{mg}{lF_1} = k$ ... konstanta pro daný druh řetězu.

Pak dostaneme $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k\ x$. Separací a integrací: $\mathrm{d}y = k\ x\,\mathrm{d}x$, $y = k\frac{x^2}{2} + C$.
Konstantu C určíme z okrajových podmínek: je-li $x = 0$, je také $y = 0$ – viz obr. 5. Pak $y = \frac{mg}{2lF_1}x^2$.
Řetěz bude mít tvar paraboly.

Cvičení 2

1. Motorová loďka se pohybuje po klidné hladině rychlostí $v_0 = 10\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. V plném chodu je vypnut motor a za 40 s potom se rychlost zmenší na $4\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Odpor vody nechť je přímo úměrný rychlosti pohybu loďky. Určete rychlost loďky za 2 minuty po vypnutí motoru.

2. Určete, za jak dlouho vyteče všechna voda z nádoby v příkladu 10.

3. Válcový zásobník o výšce $h = 6{,}00$ m a průměru $D = 4{,}00$ m má ve dně kruhový otvor o průměru $d = 0{,}200$ m. Zásobník je až po okraj naplněn vodou. Určete závislost výšky hladiny h na čase t a dobu t_0, za kterou vyteče všechna voda. Koeficient zúžení vytékajícího kapalinového sloupce je $k = 0{,}600$.

4. Izolovaný vodič má náboj $Q_0 = 1000$ C. Protože izolace není dokonalá, dochází na vodiči postupně k úbytku náboje. Rychlost úbytku náboje na vodiči je v daném okamžiku přímo úměrná náboji na vodiči. Jaký náboj zůstane na vodiči po uplynutí 10,0 min, jestliže za první minutu ubyl náboj 100 C?

5. Za jak dlouho teplota tělesa zahřátého na 100 °C klesne na 30 °C, jestliže teplota okolního prostředí je rovna 20 °C a za prvních 20 minut se těleso ochladilo na 60 °C?

6. Úbytek velikosti intenzity světla při průchodu prostředím je úměrný velikosti intenzity dopadajícího světla a tloušťce vrstvy. Na hladině je velikost intenzity rovna I_0. Jaká část intenzity projde do hloubky 30 m, jestliže při průchodu vrstvou vody o tloušťce 3 m se velikost intenzity sníží na polovinu?

2 Obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu

2.1 Jak řešit obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu

Podobně, jako jsme řešili diferenciální rovnici $y' = f(x)$, můžeme také řešit diferenciální rovnici 2. řádu

$$y'' = f(x), \tag{33}$$

dovedeme-li určit potřebné primitivní funkce (pokud existují). Z rovnice (34) vypočteme nejprve *první integrál* $y' = \int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C_1$, odkud potom *druhý integrál*

$$y = \int F(x)\mathrm{d}x + C_1 x + C_2,$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné integrační konstanty.

Příklad 14 – řešení diferenciální rovnice snížením řádu

Řešte rovnici $y'' = -\sin x$.

Řešení

Nejprve určíme

$$y' = \int(-\sin x)\mathrm{d}x = \cos x + C_1, \tag{34}$$

potom

$$y = \int(\cos x + C_1)\mathrm{d}x = \sin x + C_1 x + C_2. \tag{35}$$

Řešení rovnice (33) obsahuje dvě libovolné konstanty. Řešení se nazývá, podobně jako u diferenciálních rovnic prvního řádu, *obecný integrál* dané rovnice. Volbou nějakých konkrétních čísel za C_1, C_2 dostaneme *integrál partikulární*. Podobně jako u diferenciálních rovnic prvního řádu můžeme požadovat, aby funkce splňovala nějaké počáteční podmínky (v tomto případě dvě), z nichž pak určíme příslušné konstanty C_1, C_2. Můžeme např. požadovat, aby funkce procházela nějakými dvěma body, anebo zadat bod a derivaci (směrnici tečny) v tomto bodě.

V našem případě budeme např. požadovat, aby funkce procházela bodem $[0, 0]$ a aby derivace v tomto bodě byla $y'(0) = -1$.

Z rovnice obecného integrálu (35) dostaneme: $0 = 0 + C_1 \cdot 0 + C_2$, z čehož $C_2 = 0$, z rovnice (34) dostaneme $-1 = \cos 0 + C_1$, z čehož $C_1 = -2$. Hledaná funkce tedy má rovnici $y = \sin x - 2x$.

2.1.1 Homogenní lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Typů diferenciálních rovnic 2. řádu je velmi mnoho, my se zde budeme zabývat pouze velmi speciálním případem *obyčejných homogenních* (tj. s nulovou pravou stranou) *lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty*.

Výše popsaný typ rovnice je možno obecně psát ve tvaru

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{36}$$

kde a, b, c jsou konstanty.

Tuto rovnici budeme řešit pomocí tzv. *charakteristické rovnice*, což je v tomto případě kvadratická rovnice s koeficienty a, b, c z výše uvedené diferenciální rovnice (36) (viz Poznámka níže), tj.

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \tag{37}$$

kde λ je neznámá. Např. diferenciální rovnice $y'' - 3y' + 2 = 0$ má charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.

Poznámka: Náznak, jak odvodit řešení pomocí charakteristické rovnice.

Partikulární integrály rovnice (36) se pokusíme nalézt tak, že „odhadneme" jejich tvar. Zkusme, zda by rovnici (36) nevyhovovalo řešení $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, kde λ je nějaká konstanta. Potom $y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$.
Po dosazení do rovnice (36) dostaneme po vytknutí $\mathrm{e}^{\lambda x}$:

$$\mathrm{e}^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) = 0.$$

Má-li být tato rovnice splněna, musí se rovnat nule výraz v závorce, protože $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$. Dostaneme tak podmínku pro λ, což je právě charakteristická rovnice dané diferenciální rovnice. Podrobnější odvození je možno nalézt v učebnicích vyšší matematiky zabývajících se problematikou diferenciálních rovnic.

Podle toho, jaké má charakteristická rovnice kořeny, rozlišujeme tři případy:

1. Charakteristická rovnice má kořeny reálné různé, tj. $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Pak má obecný integrál tvar
$$y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x}. \tag{38}$$
Např. diferenciální rovnice $2y'' - y' - y = 0$ má charakteristickou rovnici $2\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ s kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Obecný integrál této rovnice je tedy
$$y = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}.$$

2. Charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný kořen, pak tedy řešením charakteristické rovnice dostaneme jen jeden kořen $\lambda = -\dfrac{b}{2a}$. Obecný integrál diferenciální rovnice bude v tomto případě roven (viz poznámka)

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x}(C_1 + C_2 x). \tag{39}$$

Např. diferenciální rovnice $y'' - 2y' + y = 0$ má charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, která má jeden dvojnásobný kořen $\lambda = 1$. Obecný integrál této rovnice je tedy

$$y = \mathrm{e}^{x}(C_1 + C_2 x).$$

Poznámka

K výše uvedenému vztahu bychom došli na základě následující úvahy: kdyby se v závorce vyskytoval pouze součet $(C_1 + C_2)$, mohli bychom celou závorku nahradit pouze jedinou integrační konstantou. Pak by ale nebyla splněna podmínka, že by obecný integrál měl obsahovat dvě integrační konstanty.

V učebnicích vyšší matematiky byste našli odvození tohoto vztahu pomocí úvahy předpokládat řešení ve tvaru $y = u\mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $u = u(x)$ je nějaká funkce proměnné x.

Po zderivování funkce y bychom dostali

$$y' = \mathrm{e}^{\lambda x}(u' + \lambda u).$$

Pomocí dalších kroků, které zde nebudeme již uvádět, ale lze je nalézt v učebnicích vyšší matematiky, bychom dospěli ke vztahu (39).

3. Charakteristická rovnice má dva kořeny komplexně sdružené. Kořeny charakteristické rovnice lze v tomto případě psát ve tvaru: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Obecný integrál pak bude mít tvar

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \tag{40}$$

Např. diferenciální rovnice $y'' + y = 0$ má charakteristickou rovnici $\lambda^2 + 1 = 0$, jejíž kořeny $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Je tedy v tomto případě $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Obecný integrál této rovnice je tedy

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Poznámka 1 k 3

Ke vztahu (40) lze dospět pomocí níže uvedené úvahy. Má-li charakteristická rovnice dva kořeny $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ komplexně sdružené, je možno psát řešení ve tvaru

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}(K_1 \mathrm{e}^{i\beta x} + K_2 \mathrm{e}^{-i\beta x}).$$

Tento tvar lze dále upravit užitím Eulerova vztahu

$$\mathrm{e}^{i\beta x} = \cos\beta x + i\sin\beta x, \quad \mathrm{e}^{-i\beta x} = \cos\beta x - i\sin\beta x.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme

$$y = \mathrm{e}^{\alpha x}[(K_1 + K_2)\cos\beta x + i(K_1 - K_2)\sin\beta x].$$

Označíme-li $C_1 = K_1 + K_2$, $C_2 = i(K_1 - K_2)$ nové integrační konstanty, dostaneme vztah (40).

Poznámka 2 k 3.

Ve fyzice se často setkáváme s rovnicí typu

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

kde ve fyzice tečkou nad proměnnou stručně vyjadřujeme její derivace podle t, např. $\ddot{y}$ značí $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ má kořeny $\lambda_{1,2} = \pm\omega i$, takže obecný integrál dané rovnice je

$y = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$.

Při této fyzikální aplikaci je výhodné zavést nové konstanty A, φ, které souvisejí s C_1, C_2 takto: $C_1 = A\sin\varphi$, $C_2 = A\cos\varphi$. Pak lze obecnému integrálu dát tvar $y = A\sin(\omega t + \varphi)$. Geometricky to znamená, že integrální křivky tvoří soustavu sinusoid. Konstanta ω je frekvence kmitavého pohybu, φ je pak počáteční fáze kmitavého pohybu.

Cvičení 3

Integrujte tyto diferenciální rovnice:

1. $y'' - 6y' + 8y = 0$
2. $y'' - a^2 y = 0$

3. $y'' + 6y' + 9y = 0$

4. $y'' + 4y = 0$

5. $y'' - y' + y = 0$.

Příklad 15 – diferenciální rov. 2. řádu s konstantními koeficienty – 1

Řešte rovnici $\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 0$ s počátečními podmínkami $y(0) = 0$ a $\dot{y}(0) = 1$. Integrál této diferenciální rovnice znázorněte graficky.

Řešení

Charakteristická rovnice výše zadané diferenciální rovnice má tvar

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0,$$

kořeny této charakteristické rovnice pak jsou $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$. Obecný integrál zadané diferenciální rovnice pak je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{-3t} + C_2 \mathrm{e}^{2t}.$$

Po derivaci

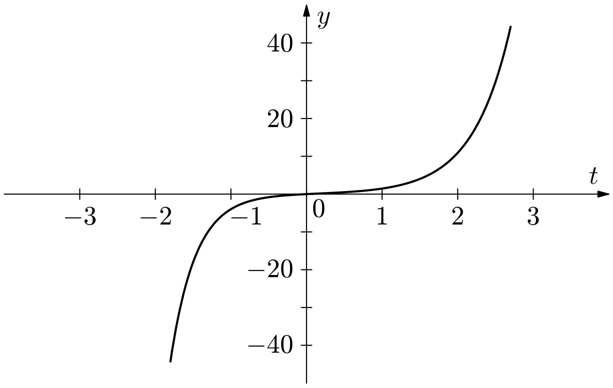
$$\dot{y} = -3C_1 \mathrm{e}^{-3t} + 2C_2 \mathrm{e}^{2t}.$$

Po dosazení počátečních podmínek $y(0) = C_1 + C_2$, $\dot{y} = -3C_1 + 2C_2$, dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých C_1, C_2:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ -3C_1 + 2C_2 &= 1. \end{aligned}$$

Po vyřešení této soustavy rovnic dostaneme: $C_1 = -\frac{1}{5}$, $C_2 = \frac{1}{5}$. Potom

$$y = -\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2t}.$$



Obr. 7 Řešení rovnice $\ddot{y}+\dot{y}-6y = 0$ pro $y(0) = 0$ a $\dot{y}(0) = 1$

Příklad 16 – diferenciální rov. 2. řádu s konstantními koeficienty – 2

Řešte rovnici $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0$ s počátečními podmínkami $y(0) = 2$ a $\dot{y}(0) = 0$. Integrál této diferenciální rovnice znázorněte graficky.

Řešení

Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.$$

Kořeny této rovnice jsou $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$. Obecný integrál této rovnice je

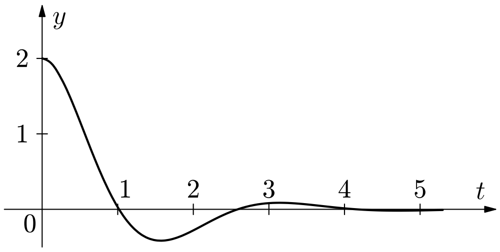
$$y = \mathrm{e}^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

Nyní určíme 1. derivaci obecného integrálu

$$\dot{y} = \mathrm{e}^{-t}(-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t) - \mathrm{e}^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

Po dosazení počátečních podmínek $y(0) = C_1$, $\dot{y}(0) = 0$, dostaneme po vyřešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých $C_1 = 2$, $C_2 = 1$.
Řešením rovnice je funkce

$$y = \mathrm{e}^{-t}(2 \cos 2t + \sin 2t).$$



Obr. 8 Řešení rovnice $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0$ pro $y(0) = 2$ a $\dot{y}(0) = 0$

Příklad 17 – diferenciální rov. 2. řádu s konstantními koeficienty – 3

Řešte rovnici $\ddot{y}+2\dot{y}+y = 0$ s počátečními podmínkami $y(0) = 10$ a $\dot{y}(0) = -20$. Integrál této diferenciální rovnice znázorněte graficky.

Řešení

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. Tato charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný kořen $\lambda = -1$.
Obecný integrál této diferenciální rovnice je

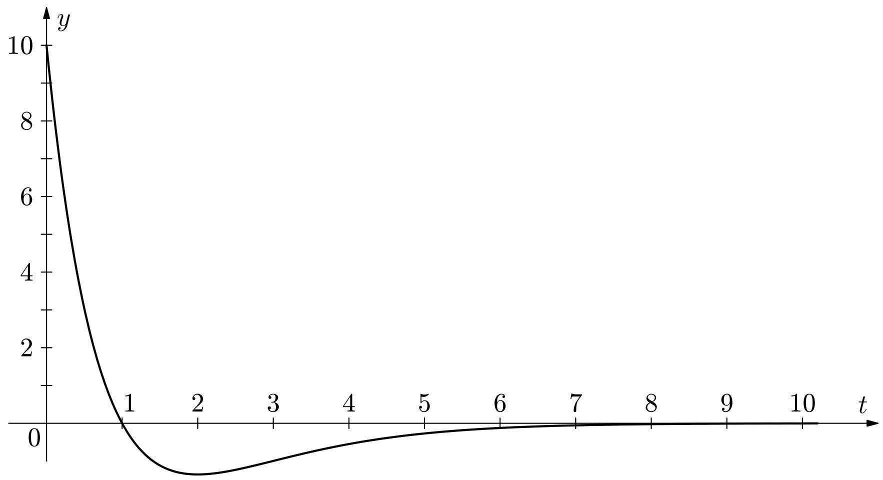
$$y = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2 t\mathrm{e}^{-t}.$$

Nyní určíme

$$\dot{y} = -C_1\mathrm{e}^{-t} - C_2 t\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-t}.$$

Dle počátečních podmínek víme, že $y(0) = 10$, $\dot{y}(0) = -20$.
Po dosazení dostaneme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé C_1 a C_2. Po vyřešení soustavy dostaneme $C_1 = 10$, $C_2 = -10$.
Řešením rovnice je funkce

$$y = 10\mathrm{e}^{-t} - 10t\mathrm{e}^{-t} = 10(1 - t)\mathrm{e}^{-t}.$$



Obr. 9 Řešení rovnice $\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0$ pro $y(0) = 10$ a $\dot{y}(0) = -20$

Cvičení 4

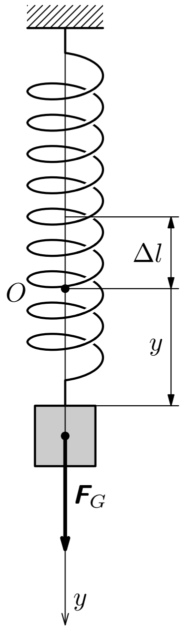
Řešte tyto diferenciální rovnice a graficky znázorněte řešení:

1. $\ddot{y} + \dot{y} - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 2$
2. $\ddot{y} + 4\dot{y} + 23y = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 3$
3. $\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 0$, $y(0) = -6$, $\dot{y}(0) = 4$

2.2 Úlohy vedoucí k řešení diferenciálních rovnic 2. řádu

Příklad 18 – mechanický oscilátor

K vertikálně orientované pružině, jejíž vlastní tíhu zanedbáváme, je zavěšeno závaží o hmotnosti m prodlužující ji o délku Δl (viz obr. 10). Pružina je lineární a má tuhost k. Tuhost pružiny je vlastně síla, která způsobí protažení pružiny o jednotkovou délku, tj. $k = \dfrac{\Delta F}{\Delta l}$. Zavěsíme-li na pružinu závaží o hmotnosti m, bude $k = \dfrac{mg}{\Delta l}$. Protáhneme-li pružinu se závažím z rovnovážné polohy a závaží pustíme, začne závaží na pružině volně kmitat. Určete pohybovou rovnici tohoto pohybu a periodu kmitů (odporové síly zanedbejte).



Obr. 10 Kmity

Řešení

Nechť má osa y směr svisle dolů. Zvolme počátek v tom místě, kde se nacházelo závaží v poloze statické rovnováhy. V libovolné poloze na závaží působí dvě síly: tíhová síla $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$ a síla pružnosti pružiny $\boldsymbol{F}_P$.
V bodě O je velikost síly pružnosti rovna velikosti tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ a odpovídající prodloužení pružiny je Δl. Proto

$$F_G = k\Delta l. \tag{41}$$

Po vychýlení pružiny o y z rovnovážné polohy je velikost

$$F_P = k(\Delta l + y). \tag{42}$$

Po vydělení rovnice (42) rovnicí (41) dostaneme

$$\frac{F_P}{F_G} = \frac{\Delta l + y}{\Delta l},$$

odkud $F_P = F_G\left(1 + \dfrac{y}{\Delta l}\right)$.

Při kladném y působí síla $\boldsymbol{F}_P$ na opačnou stranu, a proto $F_P = -F_G\left(1 + \dfrac{y}{\Delta l}\right)$.

Výslednice obou sil je $F = F_P + F_G$, čili $F = -\dfrac{mg}{\Delta l}y = -ky$, kde k je tuhost pružiny.

Podle 2. Newtonova pohybového zákona $F = ma = m\ddot{y} = -\dfrac{mg}{\Delta l}y$. Po úpravě $\ddot{y} + \dfrac{g}{\Delta l}y = 0$, což je diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty.

Označme $\dfrac{g}{\Delta l} = \omega^2$. Rovnice pak bude mít tvar

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0. \tag{43}$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Obecné řešení rovnice (43) je $y = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$.

Počáteční podmínky: v čase $t = 0$ je $y = A$, $\dot{y} = 0$, z čehož $C_1 = A$, $C_2 = 0$.
Pohybová rovnice pružiny je $y = A \cos \omega t$, kde $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\Delta l}} = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ je úhlová frekvence kmitů.
Perioda kmitů: $\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$, z čehož $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Nakonec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

kde Δl je prodloužení pružiny po zavěšení závaží o hmotnosti m.

Poznámka

Příklad lze řešit i postupem ze str. 29.

Předpokládejme obecné řešení charakteristické rovnice ve tvaru

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{44}$$

potom $\ddot{y} = -\omega^2 A \ \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y$.
Po dosazení do rovnice (44) dostaneme

$$-\omega^2 y + \omega^2 y = 0,$$

což je identita. Je tedy $y = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ jedno z možných řešení diferenciální rovnice (43), a to je vlastně pohybová rovnice harmonického kmitavého pohybu.
Konstantu φ_0 určíme z počátečních podmínek: v čase $t = 0$ je $y = A$, tj. po dosazení do rovnice (44) je $A = A \sin \varphi_0$, odkud $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
Perioda kmitů: platí $\sin[\omega(t + T)] = \sin(\omega t + 2\pi)$, a tedy $\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$, z čehož $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Po dosazení za $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\Delta l}}$, je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}. \tag{45}$$

Použitím (41) můžeme psát $mg = k\Delta l$, odkud $\dfrac{\Delta l}{g} = \dfrac{m}{k}$.

Je tedy doba kmitu závaží na pružině rovna $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, pohybová rovnice má tvar $y = A \sin(\omega t + \dfrac{\pi}{2}) = A \cos \omega t$.

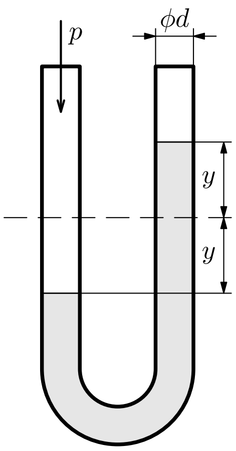
Příklad 19 – kmity kapalinového sloupce ve spojených nádobách

Manometr, používaný k měření tlaku v hydromechanické laboratoři, pracuje pod tlakem p. Sloupec kapaliny v manometru vlivem působení tlaku získává polohu zobrazenou na obr. 11. Napište pohybovou rovnici a určete periodu kmitů sloupce kapaliny, jestliže tlak p náhle klesne na nulu. Celková délka sloupce kapaliny v manometru je l a hustota kapaliny je ϱ.

Řešení

V trubici o průměru d je hmotnost veškeré kapaliny rovna $m = \frac{\pi}{4}d^2 l\varrho$. Vzniklá síla je podmíněna rozdílem hladin v obou ramenech manometru. Jestliže ji vezmeme jako střední aritmetický rozdíl obou hladin při vychýlení z rovnovážné polohy o y, je její velikost

$F = 2 \cdot \frac{\pi}{4}d^2 y\varrho g$.



Obr. 11 Trubice

Podle 2. Newtonova pohybového zákona $F = -m\ddot{y} = -\frac{\pi}{4}d^2 l\varrho\ddot{y}$ (znaménko minus je zde proto, že síla $F = -m\ddot{y}$ působí proti směru pohybu).
Porovnáním obou vztahů pro F dostaneme

$$-\frac{\pi}{4}d^2 l\varrho\ddot{y} = 2 \cdot \frac{\pi}{4}d^2 \varrho g y.$$

Po úpravě

$$\ddot{y} + \frac{2g}{l}y = 0. \tag{46}$$

Označíme-li $\frac{2g}{l} = \omega^2$, má rovnice (46) tvar

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0, \tag{47}$$

což je tvar totožný s rovnicí (43) v úloze 17.

Charakteristická rovnice tohoto pohybu je $\lambda^2 + \omega^2 = 0$. Obecné řešení této rovnice je

$$y = C_1 \cos\omega t + C_2 \cos\omega t.$$

Nyní uplatníme počáteční podmínky: v čase $t = 0$ je $y = y_0$, $\dot{y} = 0$, z čehož dostaneme $C_1 = y_0$, $C_2 = 0$, a tudíž je

$$y = y_0 \cos\omega t.$$

Periodu kmitů bychom určili stejným postupem jako v úloze 18:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Poznámka

Užitím postupu ze str. 29. Rovnici (47) opět jako rovnici (43) vyhovuje řešení ve tvaru

$$y = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

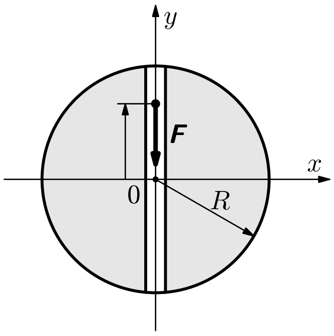
kde A je maximální výchylka, φ_0 určíme z počátečních podmínek (obdobně jako v úloze 18 vyjde $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$). Určení periody kmitů provedeme stejným postupem jako v úloze 18, dostaneme $T = \frac{2\pi}{\omega}$, kam za ω dosadíme $\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}$. Perioda kmitů pak bude $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}$.

Příklad 20 – myšlenkový průlet kamene Zemí

Předpokládejme, že středem Země vede úzký kanál. Kámen padající kanálem je přitahován středem Země silou, která je přímo úměrná vzdálenosti kamene od středu (viz Poznámka 2 na konci řešení úlohy). Za jakou dobu τ proletí kámen celou Zemí?

Řešení

V libovolné časovém okamžiku na kámen působí přitažlivá síla o velikosti F, která je přímo úměrná vzdálenosti y kamene od středu Země, tj. $F = -k \cdot y$ (síla $\boldsymbol{F}$ a okamžitá výchylka $\boldsymbol{y}$ mají navzájem opačný směr).



Obr. 12 Pohyb kamene

Použitím 2. Newtonova pohybového zákona

$$m\ddot{y} = -ky,$$

po úpravě

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0.$$

Označíme-li $\omega^2 = \frac{k}{m}$, pak $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$. Řešení má tvar $y = R\sin(\omega t + \varphi_0)$, kde φ_0 určíme z počátečních podmínek:
v čase $t = 0$ je $y = R$, $F = mg$.

Postupně dostáváme $R = R\sin\varphi_0$, odkud $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Z podmínky v čase $t = 0$ je $F = mg$ dostáváme $mg = -k\cdot(-R)$, čili $\dfrac{k}{m} = \dfrac{g}{R} = \omega^2$.

Hledaná doba průletu je tedy $\tau = \pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$.

Pro dané hodnoty je $\tau = \pi\sqrt{\dfrac{6377\cdot 10^2}{9{,}81}}\mathrm{s} \doteq 42{,}3\,\mathrm{min}$.

Poznámka 1

Úlohu je opět možno řešit i přímým použitím charakteristické rovnice tak jako v předchozích případech (vyzkoušejte si).

Poznámka 2

Vztah, že síla působící „uvnitř Země“ na těleso silou, která se přímo úměrná vzdálenosti tělesa od středu Země, platí za předpokladu, že uvažujeme buď, že Země je homogenní koule, nebo reálnější situaci, že Země má středově souměrně rozloženou hustotu.

Po průletu Zemí bude kámen ve svém pohybu pokračovat dál. Za stejného předpokladu jako v předchozí úvaze bude na kámen „vně Země“ působit síla daná Newtonovým gravitačním zákonem ve tvaru pro dva hmotné body, tj. působící síla je nepřímo uměrná druhé mocnině vzdálenosti středů Země a kamene. Sami si promyslete, jak bude probíhat další pohyb kamenu.

Příklad 21 – dvoutělesový oscilátor - model kmitů v dvouatomové molekule

K jednomu konci přímé pružiny je pevně připojené těleso o hmotnosti m_1, ke druhému konci pružiny těleso o hmotnosti m_2. Tuhost pružiny při roztahování a stlačování je k. Tělesa spojená pružinou položíme na horizontální velmi hladkou plochu. Tělesa od sebe vzdálíme, a tím se pružina prodlouží. Potom obě tělesa současně uvolníme.

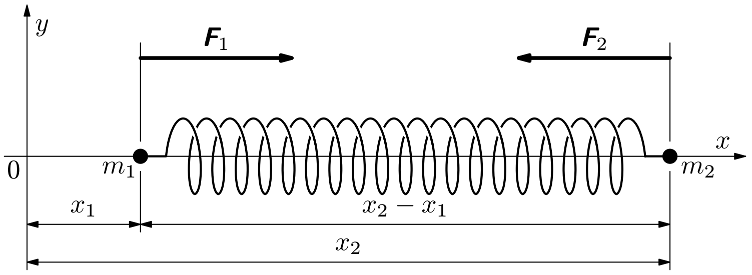
a) Jaký pohyb koná každé z těles? Určete místo na pružině, které je trvale v klidu.

b) Určete doby kmitu obou těles.

Pružina koná pohyb jen ve směru své podélné osy. Tělesa považujte za hmotné body, hmotnost pružiny neuvažujte.

Řešení

a) Tělesa o hmotnostech m_1 a m_2 jsou spojena pružinou. Bez přítomnosti vnějších sil zůstává hybnost systému konstantní a kmity obou těles tudíž nemohou ovlivnit polohu těžiště. Z tohoto důvodu kmitají m_1 a m_2 právě v opačných směrech vzhledem k těžišti soustavy a dosahují krajních poloh svého vzájemného pohybu současně.



Obr. 13 Dvoutělesový oscilátor

b) Délka pružiny je v libovolném okamžiku $x_2 - x_1$, což se rovná délce pružiny l plus její výchylce x:

$$l + x = x_2 - x_1, \quad \text{odkud} \quad x = x_2 - x_1 - l.$$

Výchylka x je kladná, je-li pružina natažená, a záporná při stlačené pružině. Síly pružnosti $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$, jimiž působí pružina na obě tělesa, jsou stejné velikosti a opačného směru, takže je

$$F_1 = kx, \quad F_2 = -kx.$$

Z 2. Newtonova pohybového zákona máme

$$m_1 a_1 = m_1 \ddot{x}_1 = kx,$$

$$m_2 a_2 = m_2 \ddot{x}_2 = -kx.$$

Tyto rovnice sloučíme tak, že první vynásobíme m_2 a odečteme od druhé rovnice vynásobené m_1. Výsledek je

$$m_1 m_2 \ddot{x}_2 - m_1 m_2 \ddot{x}_1 = -m_1 kx - m_2 kx,$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -kx.$$

Nyní budeme derivovat dvakrát podle času vztah $x = x_2 - x_1 - l$.
Dostaneme $\ddot{x} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$, neboť l je konstantní (rovnovážná délka pružiny).
Pohybovou rovnici soustavy lze tedy vyjádřit celou jen pomocí výchylky x pružiny. Po dosazení dostaneme

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{x} = -kx,$$

neboli $M\ddot{x} = -kx$, kde $M = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ je v tomto případě redukovaná hmotnost systému.
Pohybová rovnice jednoduchého harmonického oscilátoru je

$$m\ddot{x} = -kx, \quad \text{tj.} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \text{odkud} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Podle úlohy 18 je $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ pro jednoduchý harmonický oscilátor.
Porovnáním diferenciálních rovnic jednoduchého a dvoutělesového oscilátoru docházíme k závěru, že doba kmitu T' pro dvoutělesový oscilátor je dána vztahem

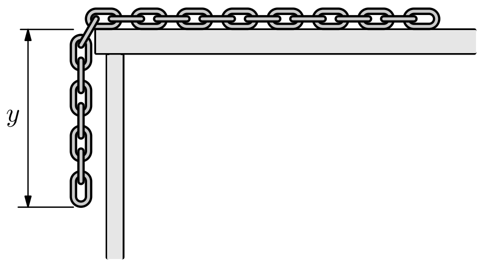
$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{1}{k}},$$

což je stejný výraz jako pro jednoduchý oscilátor, pouze jsme do vztahu pro T' dosadili redukovanou hmotnost M místo hmotnosti m pro jednoduchý oscilátor.

Následující dvě úlohy popisují situace, kdy lze danou diferenciální rovnici řešit už pouze jediným způsobem – přímo z charakteristické rovnice.

Příklad 22 – Padající řetěz

Řetěz o délce $l = 4{,}00$ m klouže z hladkého horizontálního stolu. V počátečním okamžiku, tj. přesně před tím, než došlo k pohybu řetězu se stolu, visel dolů konec řetězu o délce $a = 0{,}500$ m. Za jak dlouho sklouzne dolů celý řetěz? Uvažujte $g = 9{,}81$ m·s^{-2}.



Obr. 14 Padající řetěz

Řešení

Na řetěz působí tíhová síla. Na vodorovné části řetězu působí proti této síle reakce podložky, takže tíhová síla působící na tuto část řetězu nemá pohybové účinky (výslednice sil působících ve svislém směru na tuto část řetězu je rovna nule). Pohyb řetězu způsobuje tíhová síla působící na svislou část řetězu. Velikost této síly je

$$F = \frac{m}{l} yg,$$

kde l je délka řetězu, m hmotnost celého řetězu, y délka svislé části řetězu.

Podle 2. Newtonova zákona je $F = m\ddot{y}$.
Porovnáním vztahů pro F dostaneme diferenciální rovnici

$$m\ddot{y} = \frac{m}{l} yg,$$

úpravou

$$\ddot{y} - \frac{g}{l} y = 0.$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - \frac{g}{l} = 0.$$

Obecné řešení je $y = C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}$.
Počáteční podmínky: v čase $t = 0$ je $y = 0{,}5$ m, $\dot{y} = 0$, z čehož obdržíme $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{4}$ m. Potom

$$y = \frac{1}{4} \left(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t} \right) \text{ m.} \tag{48}$$

V dalším postupu z rovnice (48) vyjádříme neznámou t. Rovnici (48) nejprve vynásobíme výrazem $4\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}$ a upravíme. Dostaneme

$$\left(\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} \right)^2 - 4y\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + 1 = 0,$$

což je kvadratická rovnice v proměnné $\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}$:

$$\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} = 2y \pm \sqrt{4y^2 - 1}.$$

Řetěz spadne se stolu v čase $t > 0$. Diskutujme, které řešení tomuto požadavku vyhovuje.
V případě

$$\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} = 2y - \sqrt{4y^2 - 1}$$

je možno tento vztah přepsat na tvar:

$$\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t} = 2y + \sqrt{4y^2 - 1},$$

což znamená, že

$$\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} < \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t},$$

z čehož

$$\mathrm{e}^{2\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}t} < 1.$$

To je splněno jen pro $t < 0$. V našem případě má proto smysl pouze řešení

$$\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} = 2y + \sqrt{4y^2 - 1}.$$

Do této rovnice dosadíme za $y = l$ a vyjádříme t. Dostaneme

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln\left(2l + \sqrt{4l^2 - 1}\right).$$

Pro dané hodnoty je $t = 1{,}77$ s.

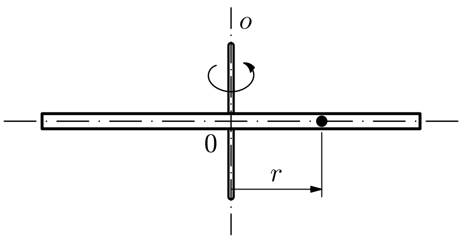
Příklad 23 – Otáčející se trubka

Úzká dlouhá trubka se otáčí v horizontální poloze konstantní úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ kolem kolmé svislé osy. Malá kulička (kterou můžeme považovat za hmotný bod) v ní klouže bez tření (obr. 15).

Určete, jaký pohyb vykonává kulička vzhledem k trubce, platí-li

a) v počátečním okamžiku se kulička nachází ve vzdálenosti a od osy otáčení a její počáteční rychlost je rovna nule,

b) v počátečním okamžiku se kulička nachází na ose rotace a má počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_0$.



Obr. 15 Horizontální trubka

Řešení

Na kuličku působí setrvačná odstředivá síla $F = m\omega^2 r$. Tato síla je příčinou pohybu kuličky směrem od osy otáčení. Kromě této síly ještě na kuličku působí ve směru kolmém k podélné ose trubky další síly: tíhová síla, Coriolisova síla (síla vznikající při otáčivém pohybu, v tomto případě má směr kolmý na stěnu trubky a leží v rovině kolmé na osu otáčení trubky, více o této síle je např. v [11]) – proti těmto silám působí reakční síly trubky, a proto je výslednice těchto všech sil rovna nule.

Podle 2. Newtonova zákona můžeme pro pohyb kuličky psát:

$$m\ddot{r} = m\omega^2 r,$$

úpravou dostaneme rovnici

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0. \tag{49}$$

Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - \omega^2 = 0.$$

Obecné řešení rovnice (49) je

$$r = C_1 \mathrm{e}^{\omega t} + C_2 \mathrm{e}^{-\omega t}.$$

a) Počáteční podmínky: v čase $t = 0$ je $r = a$, $\dot{r} = 0$.

V dalším postupu si všimněte, že řešení je formálně shodné s řešením příkladu 22, dokonce jsou i formálně shodné počáteční podmínky, protože i v příkladu 22 je $C_1 = C_2 = \frac{a}{2}$.

Určíme obecně

$$\dot{r} = C_1 \omega \mathrm{e}^{\omega t} - C_2 \omega \mathrm{e}^{-\omega t}.$$

Po dosazení počátečních podmínek do této rovnice a rovnice (49) dostaneme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$C_1 + C_2 = a, \tag{50}$$

$$C_1 - C_2 = 0. \tag{51}$$

Řešením soustavy rovnic (50) a (51) dostaneme $C_1 = C_2 = \frac{a}{2}$, a tudíž

$$r = \frac{a}{2}(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}).$$

b) Počáteční podmínky: v čase $t = 0$ je $r = 0$, $\dot{r} = v_0$.
Obdobně jako v a) dostaneme soustavu dvou rovnic

$$C_1 + C_2 = 0, \tag{52}$$
$$\omega(C_1 - C_2) = v_0. \tag{53}$$

Řešením soustavy rovnic (52), (53) dostaneme $C_1 = -C_2 = \dfrac{v_0}{2\omega}$, a tudíž

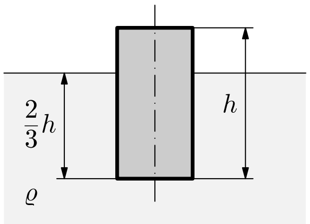
$$r = \frac{v_0}{2\omega}(\mathrm{e}^{\omega t} - \mathrm{e}^{-\omega t}).$$

Cvičení 5

1. Pomocí diferenciální rovnice napište pohybovou rovnici pro matematické kyvadlo a odvoďte vzorec pro dobu kmitu tohoto kyvadla (uvažujte rozkmit $-5^0 \leq \alpha \leq 5^0$, pak $\sin\alpha \doteq \mathrm{tg}\,\alpha \doteq \alpha$).

2. Válec plave v kapalině o hustotě ϱ tak, že je do ní ponořen $\dfrac{2}{3}$ svého objemu. Osa válce je svislá (viz obr. 16).

   Zatlačíme-li válec hlouběji do kapaliny a uvolníme, začne válec konat kmitavý pohyb. Výška válce je h. Na základě těchto údajů určete periodu kmitů tohoto válce. Předpokládejte, že rozměry válce jsou dány tak, že se válec nepřevrátí a že se při pohybu nemění výška hladiny kapaliny.



Obr. 16 Kmity válce

3. Ve uzavřeném válci (s vodorovnou podélnou osou) naplněném vzduchem je píst, který válec rozděluje na dvě stejné části. Tlak vzduchu v obou jeho částech je $p_0 = 1{,}00 \cdot 10^5$ Pa. Když píst nepatrně vychýlíme z rovnovážné polohy a potom uvolníme, uvedli jsme jej do kmitavého pohybu. Vypočtěte periodu kmitů, můžeme-li děje v plynu považovat za adiabatické.

   Hmotnost pístu $m = 1{,}50$ kg, vzdálenost pístu od každé stěny v rovnovážné poloze je $l = 200$ mm, plošný obsah pístu $S = 100\ \mathrm{cm}^2$, $\varkappa = 1{,}4$. Tření zanedbejte.

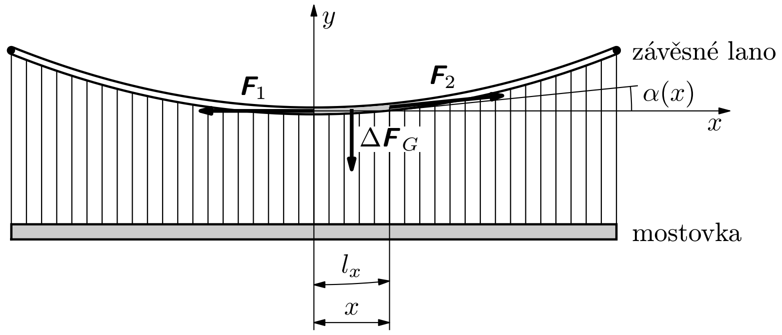
   Při řešení použijte přibližný vztah $(1 \pm h)^n \approx 1 \pm nh$, je-li $|h| \ll 1$ a n je libovolný exponent.

3 Ukázky náročnějších úloh vedoucích k řešení diferenciálních rovnic

V této úloze si ukážeme, jak může „malá“ změna v předpokladu úlohy výrazně změnit celé řešení úlohy.

Příklad 24 – závěsný most – řetězovka

Určete rovnici křivky tuhého neprotažitelného lana závěsného mostu, předpokládáte-li, že zatížení je rozděleno rovnoměrně po celé délce lana (nikoli v horizontální přímce jako to bylo u příkladu 13). Hmotnost lana zanedbejte.



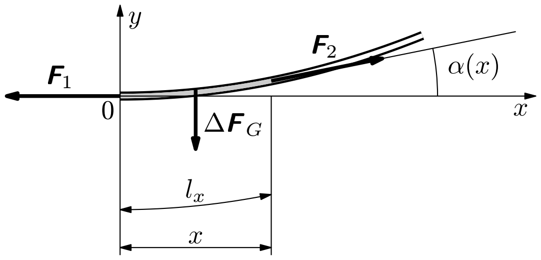
Obr. 17 Závěsný most

Řešení

Na lano působí tíhová síla rovnoměrného rozložení a tahová síla lana. Na část lana délky l_x působí tíhová síla

$$\Delta F_G = \frac{m}{l} g l_x,$$

kde m je celková hmotnost mostu, l je celková délka lana, a dvě tahové síly o velikostech F_1, F_2 (viz obr. 18).



Obr. 18 Detail lana závěsného mostu

Nechť lano svírá s horizontální rovinou v libovolném bodě úhel α. Vezměme element lana, jehož jeden bod začíná v počátku námi zvolené soustavy souřadnic (viz obr. 18).

Pro úhel α platí

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

kde $y = y(x)$ je rovnice hledané křivky. Tahovou sílu $\boldsymbol{F}_2$ v laně můžeme rozložit do dvou složek:

$$F_{2x} = F_1 = F_2\cos\alpha, \quad F_{2y} = F_2\sin\alpha.$$

Protože lano je v rovnováze, musí být výslednice sil na něj působících rovna nule. Ve složkách: $F_{2x} = F_2\cos\alpha$, $F_2\sin\alpha = \frac{mg}{l}l_x$.[1] Máme tedy

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{mg}{l}\frac{l_x}{F_1}.$$

Nyní zbývá už jen vyjádřit l_x:

$$l_x = \int\limits_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x = \int\limits_0^x \sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x.$$

Dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{mg}{lF_1}\int\limits_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x.$$

Derivací

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{mg}{lF_1}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$

Tuto diferenciální rovnici budeme řešit snížením řádu. Položíme $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \xi(x)$ (dále už jen ξ), pak $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}$.
Separací

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{mg}{lF_1}\mathrm{d}x. \tag{54}$$

Nyní určíme $\int \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$. K tomu použijeme Eulerovy substituce

$$\sqrt{1+\xi^2} = p + \xi$$

$$1 + \xi^2 = p^2 + 2p\xi + \xi^2$$

[1] V tomto místě vzniká odchylka v řešení tohoto příkladu od příkladu 13.

$$\xi = \frac{1-p^2}{2p}, \quad \mathrm{d}\xi = -\frac{p^2+1}{2p^2}\mathrm{d}p, \quad p+\xi = \frac{1+p^2}{2p}.$$

Potom

$$\int \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = -\int \frac{p^2+1}{2p^2} \cdot \frac{2p}{1+p^2}\mathrm{d}p = -\int \frac{1}{p}\mathrm{d}p =$$
$$= -\ln p = -\ln\left(\sqrt{1+\xi^2} - \xi\right).$$

Dosazením do (55)

$$\ln\left(\sqrt{1+\xi^2} - \xi\right) = -\frac{mg}{lF_1}x + \ln C_1.$$

Po odlogaritmování

$$\sqrt{1+\xi^2} - \xi = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{mg}{lF_1}x}. \tag{55}$$

Nyní chceme vyjádřit ξ. Rovnici (55) je možno přepsat na tvar:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2} - \xi} = \frac{1}{C_1}\mathrm{e}^{\frac{mg}{lF_1}x},$$

po úpravě

$$\sqrt{1+\xi^2} + \xi = \frac{1}{C_1}\mathrm{e}^{\frac{mg}{lF_1}x}. \tag{56}$$

Odečtením (55) od (56) dostaneme

$$\xi = \frac{1}{2C_1}\mathrm{e}^{\frac{mg}{lF_1}x} - \frac{C_1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{mg}{lF_1}x}. \tag{57}$$

Za ξ nyní dosadíme $\xi = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Potom

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2C_1}\mathrm{e}^{\frac{mg}{lF_1}x} - \frac{C_1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{mg}{lF_1}x}.$$

Integrací

$$y = \frac{1}{2C_1}\frac{lF_1}{mg}\mathrm{e}^{\frac{mg}{lF_1}x} + \frac{C_1}{2}\frac{lF_1}{mg}\mathrm{e}^{-\frac{mg}{lF_1}x} + C_2,$$
$$y = \frac{lF_1}{2mg}\left[\frac{1}{C_1}\mathrm{e}^{\frac{mg}{lF_1}x} + C_1\mathrm{e}^{-\frac{mg}{lF_1}x}\right] + C_2. \tag{58}$$

Úprava vztahu (58):

$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{2},$$

$$\frac{1}{C_1}\mathrm{e}^{\frac{mg}{lF_1}x} + C_1\mathrm{e}^{-\frac{mg}{lF_1}x} = \mathrm{e}^{\left(\frac{mg}{lF_1}x - \ln C_1\right)} + \mathrm{e}^{-\left(\frac{mg}{lF_1}x - \ln C_1\right)} =$$

$$= 2\cosh\left(\frac{mg}{lF_1}x - \ln C_1\right).$$

Potom lze (58) upravit na tvar:

$$y = \frac{mg}{lF_1}\cosh\left(\frac{mg}{lF_1}x - \ln C_1\right) + C_2. \tag{59}$$

Konstanty C_1, C_2 můžeme určit z okrajových podmínek: je-li $x = 0$, je i $y = 0$, tj. $0 = \cosh(-\ln C_1) + C_2$. V případě, že krajní body závěsu leží ve vodorovné přímce, je v místě o souřadnici $x = 0$ i $y' = 0$, tj. $0 = y' = \cosh(-\ln C_1)$. Je tedy $C_2 = 0$ a $\frac{1}{2C_1} - \frac{C_1}{2} = 0$, z čehož $C_1 = 1$.
Rovnice (59) bude mít tvar

$$y = \frac{mg}{lF_1}\cosh\frac{mg}{lF_1}x. \tag{60}$$

Rovnice (59) a (60) popisují křivku, která se nazývá *řetězovka*.

Poznámka

Porovnáme-li řešení závěsného mostu v úloze 13 a 24, je vidět, že „malá změna“ v předpokladu – v příkladu 13 jsme předpokládali zatížení rovnoměrně po délce řetězu v horizontální přímce, zatímco v příkladu 24 jsme předpokládali zatížení rovnoměrně po celé délce lana, může mít vliv na značně rozdílný výsledek – v případě příkladu 13 nám vyšla parabola, v příkladu 24 nám vyšla řetězovka.

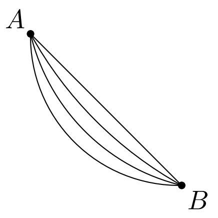
Nyní se podívejme na další problémy, které opět vedou k sestavení a řešení diferenciální rovnice.

Úloha o křivce nejkratšího času, neboli také o křivce nejrychlejšího klesání byla sestavena švýcarským matematikem Johannem Bernoullim v roce 1696 a spočívala v následujícím: ve svislé rovině jsou dány dva body A a B (viz obr. 18), které neleží v jedné svislé přímce. Chceme ze všech možných křivek procházejících oběma body nalézt takovou, po které by se kulička (hmotný bod) působením tíhové síly dostala z bodu A do bodu B za co nejkratší dobu.

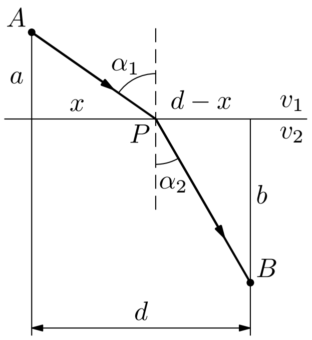
Příklad 25 – úloha o křivce nejkratší doby – Fermatův princip

My se v této úloze pokusíme nalézt tvar křivky, po které by se měl pohybovat hmotný bod v prostředí, kde se velikost rychlosti mění „skokem“ v různých úsecích.

Řešení



Obr. 18 Křivky možného pohybu z A do B



Obr. 19 Pohyb kuličky na rozhraní

Doba T potřebná k průchodu kuličky z bodu A do bodu B, se určí z rovnice $T = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2}$.

Jestliže předpokládáme, že hmotný kulička se má dostat z bodu A do bodu B po výše uvedené cestě za co nejkratší dobu, musí být $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = 0$. Z této podmínky pak lze odvodit zákon $\dfrac{\sin\alpha_1}{v_1} = \dfrac{\sin\alpha_2}{v_2}$ (proveďte). Tento zákon byl poprvé objeven experimentálně ve tvaru $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = a$, kde $a = konst.$.

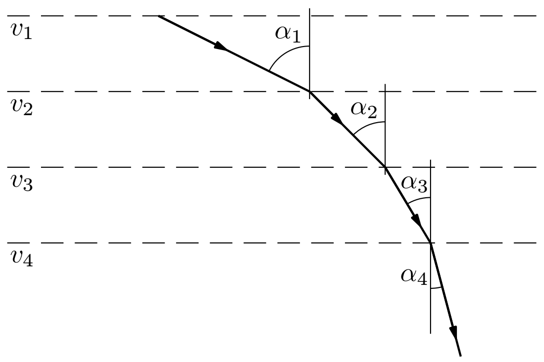
Výše uvedená úloha o tom, že hmotný bod (kulička) prochází z bodu A do bodu B za minimální dobu, se nazývá *Fermatův princip nejmenšího času (doby)*.

Pokud bychom obdobný postup aplikovali v optice, dostaneme nám dobře známý Snellův zákon.

Význam tohoto principu spočívá v tom, že může být použit k nalezení trajektorie pohybu kuličky prostředím, kde se velikost rychlosti mění spojitě, ne po částech přímek, jak jsme prozatím uvažovali. Tím se budeme zabývat v další úloze.

Příklad 26 – úloha o křivce nejkratší doby – brachystochrona

Ve svislé rovině máme proložit takovou křivku, aby částice vypuštěná z bodu A a pohybující se v tíhovém poli dosáhla po ní bodu B co nejdříve, tedy v co nejkratší době. Tření a odpor prostředí zanedbejte. (Může jít o kuličku navlečenou na tenkém drátu.)



Obr. 20 Pohyb kuličky

Řešení

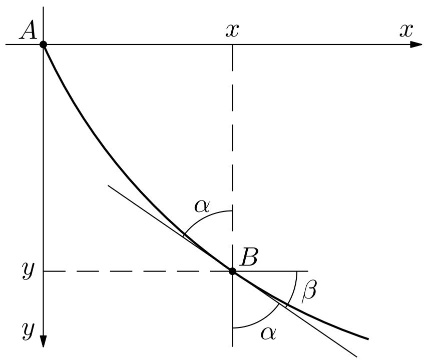
Podívejme se nejprve na obr. 20, na němž je zobrazeno prostředí z vrstev. Budeme uvažovat, že v každé oddělené vrstvě je rychlost kuličky konstantní. Použitím vztahu z předchozí úlohy můžeme psát

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} = \frac{\sin\alpha_3}{v_3} = \frac{\sin\alpha_4}{v_4}.$$

Uvažujme nyní, že se tloušťka vrstev bude neomezeně zmenšovat a počet vrstev neomezeně poroste. V tomto případě pak můžeme uvažovat, že se rychlost kuličky mění spojitě. Vzhledem k tomu, že $\dfrac{\sin\alpha_i}{v_i} = konst.$, můžeme úvahu ukončit vztahem

$$\frac{\sin\alpha}{v} = a, \quad \text{kde } a = konst. \tag{61}$$

Představme si dále, že kulička si „umí“ vybrat takovou trajektorii klesání z bodu A do bodu B, aby doba pohybu byla co nejmenší.



Obr. 21 Klesání kuličky

V takovém případě, na základě předchozích úvah, můžeme použít vztah (61). Vycházíme-li z principu zachování energie, dostáváme, že rychlost získaná kuličkou v určité výšce, závisí pouze na ztrátě potenciální energie při dosažení této výšky, ale nikoliv na trajektorii, po které se kulička pohybuje. To znamená, že

$$v = \sqrt{2gy} \tag{62}$$

Nyní vezmeme v úvahu, že podle obr. 21 platí $\sin\alpha = \cos\beta$, kde $\cos\beta$ můžeme dále rozepsat. Tedy

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta + \sin^2\beta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}},$$

kam za $\operatorname{tg}\beta$ dosadíme: $\operatorname{tg}\beta = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'$.

Neboli $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$. Za $\sin\alpha$ dosadíme ze vztahu (61), tj. $\sin\alpha = av$. Dostaneme

$$av = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

kam za v dosadíme ze (62):

$$a\sqrt{2gy} = \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Po umocnění a dalších úpravách obdržíme

$$y[1+(y')^2] = \frac{1}{2ga^2}.$$

Položíme $\frac{1}{2ga^2} = C$. Potom

$$y[1 + (y')^2] = C, \tag{63}$$

což je diferenciální rovnice křivky „nejmenšího času“. Tuto diferenciální rovnici budeme řešit následujícím „speciálním“ postupem. Do rovnice (63) dosadíme za $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, pak vyjádříme $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$y\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right] = C,$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{C}{y} - 1\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nyní provedeme separaci proměnných:

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{y}{C - y}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}y. \tag{64}$$

Nyní zavedeme novou proměnnou ϑ, a to následujícím způsobem: položíme

$$\left(\frac{y}{C - y}\right)^{\frac{1}{2}} = \operatorname{tg}\vartheta,$$

potom $\frac{y}{C - y} = \operatorname{tg}^2\vartheta$,

$$y = \frac{C \operatorname{tg}^2\vartheta}{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta} = \frac{C\frac{\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}}{\frac{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}} = C\sin^2\vartheta.$$

Výraz $y = C\sin^2\vartheta$ zderivujeme podle ϑ a vyjádříme $\mathrm{d}y = 2C\sin\vartheta\cos\vartheta\mathrm{d}\vartheta$. Po dosazení do rovnice (64) dostaneme

$$\mathrm{d}x = \operatorname{tg}\vartheta\mathrm{d}y = 2C\sin^2\vartheta\mathrm{d}\vartheta,$$

$\sin\vartheta$ upravíme pomocí součtového vzorce

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\vartheta}{2}},$$

potom

$$\mathrm{d}x = C(1 - \cos 2\vartheta)\mathrm{d}\vartheta.$$

Integrací poslední rovnice dostáváme

$$x = \frac{C}{2}(2\vartheta - \sin 2\vartheta) + C_1.$$

Užitím počátečních podmínek $x = y = 0$ tj. při $\vartheta = 0$ vyjde $C_1 = 0$. Potom $x = \frac{C}{2}(2\vartheta - \sin 2\vartheta)$, $y = C\sin^2\vartheta = \frac{C}{2}(1 - \cos 2\vartheta)$.

Položíme-li nyní $\frac{C}{2} = R$, $2\vartheta = \varphi$, dostaneme

$$x = R(\varphi - \sin\varphi), \quad y = R(1 - \cos\varphi),$$

což jsou parametrické rovnice cykloidy.

Kulička dopadající směrem k zemi do bodu, který neleží na vertikále z výchozího bodu, působením tíhové síly se tedy musí pohybovat s souladu s principem nejmenší doby po cykloidě, která prochází oběma body.

4 Shrnutí – návod, jak sestavovat diferenciální rovnice podle podmínek úloh

Sestavit diferenciální rovnici znamená nalézt závislost mezi argumentem, funkcí a jejími derivacemi.

Nelze nalézt univerzální metodu, kterou by bylo možno použít ve všech případech. Je nutné získat zkušenosti a určité návyky při řešení rozličných úloh a samostatným řešením analogických příkladů.

Jsou nutné také znalosti fyzikální, přírodovědné, technické nebo společenskovědní disciplíny, ve které úloha vznikla.

Sestavení diferenciální rovnice podle podmínek úlohy obvykle spočívá ve stanovení matematické závislosti mezi proměnnými veličinami a jejich přírůstky, které se později zaměňují odpovídajícími diferenciály.

Sestavená diferenciální rovnice je výchozí matematický model zkoumaného děje. Její obecný integrál popisuje obecný průběh děje (resp. celé třídy dějů), partikulární integrál (po uvážení počátečních podmínek) popisuje průběh konkrétního děje.

Jsou i případy, kdy lze diferenciální rovnici napsat přímo, bez předchozího zápisu přírůstků, např.

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t},$$

což už je diferenciální rovnice.

Sestavení této rovnice už v sobě vlastně přírůstky zahrnuje. Vyplývá to z toho, že platí

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}.$$

Získání rovnice určitého (fyzikálního) děje spočívá v sestavení diferenciální rovnice pro určitý okamžik nebo určité místo; řešením (integrací) této diferenciální rovnice obdržíme obecné řešení, a tím i zákon pro daný (fyzikální) děj.

Uplatníme-li dále počáteční a okrajové, popř. doplňující podmínky, dostaneme konkrétní popis daného (fyzikálního) děje – funkční závislost mezi závisle a nezávisle proměnnou.

Při řešení (fyzikálních) úloh pomocí diferenciálních rovnic je vhodné postupovat následujícím způsobem:

1. Důkladně pročteme text úlohy a snažíme se pochopit smysl úlohy.
2. Podrobně rozebereme podmínky úlohy, event. sestavíme náčrtek, který by objasnil podstatu úlohy.

3. Zvážíme, zda jsme podobnou úlohu již neřešili. V kladném případě se snažíme si vytvořit určitou analogii s touto úlohou.

4. Stanovíme (v důsledku rozboru úlohy) závisle a nezávisle proměnnou, resp. uvědomíme si, co budeme považovat za závisle a nezávisle proměnnou.

5. Ujasníme si, které (fyzikální) zákony pro děje tohoto nebo obdobného charakteru platí.

6. Uvážíme, kde je možno použít zjednodušující předpoklady: např., že v malém časovém intervalu lze nerovnoměrnou změnu nahradit rovnoměrnou, kdy lze křivočarý element trajektorie nahradit přímočarým atd.

7. Pokusíme se nalézt vztah mezi přírůstkem funkce (zde označíme Δy) a přírůstkem jejího argumentu (zde označíme Δx). Vztah sestavujeme na základě platných matematických operací, fyzikálních zákonů.

8. Prověříme korektnost předpokladů záměny $\Delta x \to \mathrm{d}x$, $\Delta y \to \mathrm{d}y$. Chceme, aby se tyto veličiny s rostoucím stupněm přesnosti blížily co nejvíce ke skutečnosti.

9. Sestavíme diferenciální rovnici uvažovaného děje.

10. Integrujeme rovnici a stanovíme obecné řešení.

11. Na základě zadaných počátečních, okrajových resp. doplňujících podmínek určíme partikulární integrál této rovnice.

12. Zkoumáme získanou závislost v limitních případech, provádíme diskusi závislosti, porovnání se skutečností, případně tabulkovými hodnotami.

Některé z těchto bodů lze vynechat podle charakteru zadání úlohy.

Řešení cvičení

Cvičení 1

1. $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = k\mathrm{d}x$, $\ln|y| = kx + \ln C$, kde $C > 0$, $y = C\mathrm{e}^{kx}$.

2. $\dfrac{\mathrm{d}y}{y+3} = \mathrm{d}x$, $\ln|y+3| = x + \ln C$, $|y+3| = C\mathrm{e}^{x}$.

3. $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = 2x\mathrm{d}x$, $y = C\mathrm{e}^{x^2}$.

4. I. $y' - y = 0$, $y = C\mathrm{e}^{x}$, II. $y = C(x)\mathrm{e}^{x}$, $C'(x) = 1$, $C(x) = x + K$, závěr $y = x\mathrm{e}^{x} + K\mathrm{e}^{x}$.

5. I. $y' + y = 0$, $y = C\mathrm{e}^{-x}$, II. $y = C(x)\mathrm{e}^{-x}$, $C(x) = x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + K$, závěr $y = (x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + K)\mathrm{e}^{-x} = x - 1 + K\mathrm{e}^{-x}$.

Cvičení 2

1. $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv$; $\dfrac{\mathrm{d}v}{v} = -\dfrac{k}{m}\mathrm{d}t$; $v = C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$; v čase $t = 0$ je $v = v_0$, z čehož $C = v_0$; $v = v_0\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$; $v = 0{,}64\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$.

2. Pro $x = 0$ dostáváme po dosazení do výsledku úlohy 6
   $t = C = \dfrac{14}{15}\dfrac{\pi}{kS_0\sqrt{2g}}r^{\frac{5}{2}}$, $t = 14\ \mathrm{min}\ 32\ \mathrm{s}$.

3. Postup obdobný jako v úloze 5; $t = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{D}{d}\right)^2\sqrt{\dfrac{2}{g}}(\sqrt{h} - \sqrt{x})$;
   $t_0 = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{D}{d}\right)^2\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$; $t_0 = 12\ \mathrm{min}\ 18\ \mathrm{s}$.

4. $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -kQ$; $\dfrac{\mathrm{d}Q}{Q} = -k\mathrm{d}t$; $Q = C e^{-kt}$, v čase $t = 0$ je $v = v_0$, $C = Q_0$, potom $Q = Q_0\mathrm{e}^{-kt}$, z doplňující podmínky v čase $t = 1\ \mathrm{min}$ je $Q = 900\ \mathrm{C}$ dostaneme $Q = Q_0 \cdot 0{,}9^{t}$, kam za t dosazujeme čas v minutách. V čase $t = 10\ \mathrm{min}$ je $Q = 348{,}7\ \mathrm{C}$.

5. Závislost teploty na čase je dána vztahem $t = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1200}\tau}$, kde za τ dosazujeme čas v sekundách. Po dosazení - pokles teploty na 30 °C bude za 1 hodinu.

6. $\mathrm{d}I = -kI\ \mathrm{d}h$, $I = I_0\mathrm{e}^{-kh}$. Okrajové podmínky: je-li $h = 0$ je intenzita $I = I_0$, z čehož $C = I_0$. Doplňující podmínka: v hloubce $h = 3$ m je $I = \frac{I_0}{2}$, z čehož $k = \frac{\ln 2}{3}\ \mathrm{m}^{-1}$, $I = I_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}h}$. Pro $h = 30$ m je $I = \frac{1}{1024}I_0$.

Cvičení 3

1. $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{4x}$
2. $y = C_1\mathrm{e}^{ax} + C_2\mathrm{e}^{-ax}$
3. $y = \mathrm{e}^{-3x}(C_1 + C_2x)$
4. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$
5. $y = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

Cvičení 4

1. $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}$, $y = \frac{2}{3}\mathrm{e}^{x} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2x}$
2. $\lambda^2 + 4\lambda + 23 = 0$, $\lambda_{1,2} = -2 \pm i\sqrt{19}$, $\alpha = -2$, $\beta = \sqrt{19}$,
   $y = \mathrm{e}^{-2t}(C_1\cos\sqrt{19}t + C_2\sin\sqrt{19}t)$, $y = 1{,}5\mathrm{e}^{-2t}\sin\sqrt{19}t$.
3. $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$, $\lambda_{1,2} = -3$, $y = \mathrm{e}^{-3t}(C_1 + C_2t)$, $y = \mathrm{e}^{-3t}(-6 - 14t)$.

Cvičení 5

1. Matematické kyvadlo: $F = mg\sin\alpha$; $\sin\alpha \doteq \alpha = \frac{y}{l}$; $m\ddot{y} = -mg\frac{y}{l}$,

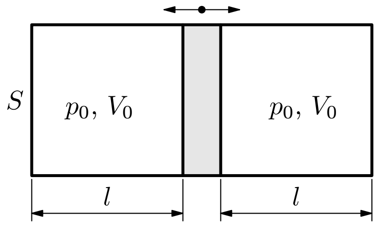
   $\ddot{y} + \frac{g}{l}y = 0$, $\omega^2 = \frac{g}{l}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

2. Rovnovážná poloha: $mg - \varrho S\,\frac{2}{3}hg = 0$, z čehož $m = \frac{2}{3}S\varrho h$. Po zatlačení válce působí na válec síla $F = -\varrho g S y$ ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{y}$ mají navzájem opačný směr, $\boldsymbol{F}$ působí proti okamžité výchylce z rovnovážné polohy $\boldsymbol{y}$).

   Platí $m\ddot{y} = -\varrho g S y$, $\frac{2}{3}S\varrho g\ddot{y} + \varrho g S y = 0$, $\ddot{y} + \frac{3}{2}\frac{g}{h}y = 0$. Označíme $\omega^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{h}$.

   Pak $T = \frac{2\pi}{\omega}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{2h}{3g}}$.

3. Kmity pístu ve válci



Obr. 21 Kmity pístu

Dle obr. 21 platí $V_0 = S \cdot l$.
Při pohybu doprava o délku x:
levá část $V_1 = V_0 + Sx = S(l + x)$, tlak p_1;
pravá část $V_2 = V_0 - Sx = S(l - x)$, tlak p_2.

Adiabatická změna: $p_0 V_0{}^{\varkappa} = p_1 V_1{}^{\varkappa}$; $p_0 V_0{}^{\varkappa} = p_2 V_2{}^{\varkappa}$.
Po dosazení za V_1, V_2:

$$p_0 l^{\varkappa} = p_1 (l + x)^{\varkappa}; \quad p_0 l^{\varkappa} = p_2 (l - x)^{\varkappa}.$$

$F = (p_2 - p_1)S$,

$$F = Sp_0 l^{\varkappa}\left[\frac{1}{(l-x)^{\varkappa}} - \frac{1}{(l+x)^{\varkappa}}\right] = Sp_0\left[\left(1 - \frac{x}{l}\right)^{-\varkappa} - \left(1 + \frac{x}{l}\right)^{-\varkappa}\right];$$

protože $x \ll l$ můžeme psát

$$F = Sp_0\left[1 + \frac{x\varkappa}{l} - \left(1 - \frac{x\varkappa}{l}\right)\right] = \frac{2S\ p_0\varkappa}{l}x.$$

platí tedy $F = konst \cdot x$, z toho vyplývá, že kmitavý pohyb je harmonický.

Podle 2. Newt. pohyb. zákona je $m\ddot{x} = -\frac{2S\ p_0\varkappa}{l}x$

(znaménko minus proto, že síla působí proti okamžité výchylce z rovnovážné polohy).

Po úpravě $\ddot{x} + \frac{2Sp_0\varkappa}{ml}x = 0$.

Označíme $\omega^2 = \dfrac{2S\,p_0\varkappa}{ml}$. Pak $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{2S\,p_0\varkappa}}$.

Pro dané hodnoty: $T \doteq 0{,}065$ s.

ÚV FO připravil:

CD ROM pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

- CD ROM obsahuje studijní texty, soutěžní úlohy z předchozích ročníků FO, překlady úloh z celé řady předchozích Mezinárodních fyzikálních olympiád.
- CD ROM je doplněn i dalšími texty souvisejícími s fyzikou, je zde celá řada odkazů na zajímavé fyzikální stránky.
- Podrobnější informace o obsahu CD ROMu je možno získat na

  http://www.uhk.cz/fo

CD ROM byl rozeslán předsedům KV FO, ale je ho možno rovněž objednat na adrese: ivo.volf@uhk.cz.

Literatura

[1] Ponomarev, K. K.: *Sostavlenije diferencialnych uravněnij.* Vyšejšaja škola, Minsk 1973.

[2] Amelkin, V. V: *Diferencialnyje uravněnija v priloženijach.* Nauka, Moskva 1987.

[3] Hajko, V: *Fyzika v príkladoch.* Alfa, Bratislava 1983.

[4] Košťál, R.: *XIX. ročník fyzikální olympiády.* SPN, Praha 1980.

[5] Žampa, K.: *XXVI. ročník fyzikální olympiády.* SPN, Praha 1989.

[6] Beiser, A.: *Úvod do moderní fyziky.* Academia, Praha 1975.

[7] Lepil, O.: *Fyzika pro gymnázia. Mechanické kmitání a vlnění.* Prometheus, Praha 2001.

[8] Kejla, F. a kol.: *Matematika III. – učební text pro průmyslové školy.* SPN, Praha 1954.

[9] Hladík, A: *Teoretická mechanika.* Academia, Praha 1987.

[10] Vybíral, B.: *Mechanika ideálních plynů.* Knihovnička FO č. 67, MAFY, Hradec Králové 2004.

[11] Horák, Z., Krupka, F.: *Fyzika.* SNTL, Praha 1981.