FUNKCE VE FYZICE

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Miroslava Jarešová – Ivo Volf

Obsah

Elementární funkce na CD ROMu

Mezi **základní elementární funkce** řadíme funkce mocninné, exponenciální, logaritmické, goniometrické a cyklometrické.

Elementární funkce je pak každá funkce, která buď patří mezi základní elementární funkce, anebo je z nich vytvořena pomocí konečného počtu základních algebraických operací nebo tvořením složených funkcí.

Elementární funkce je možné rozčlenit podle následujícího schématu:

- Algebraické
  - Racionální
    - Polynomické
    - Lineární lomené
  - Iracionální
- Transcendentní
  - Exponenciální
  - Logaritmické
  - Goniometrické
  - Cyklometrické

Takové schéma naleznete také na úvodní stránce přiloženého CD ROMu a je dále rozvedeno. CD ROM je součástí tohoto studijního textu a bude vám napomáhat ke zopakování vašich poznatků z matematiky, rozšíření vašich dosavadních znalostí z matematiky, ukáže vám také užití funkcí ve fyzice a umožní vám modelovat některé vybrané funkce v matematice a také modelovat řadu fyzikální problémů. Zkrátka naší snahou je, aby se CD ROM stal vaším nepostradatelným pomocníkem nejen teď – ve 2. ročníku, ale i později až si dále rozšíříte své obzory o další poznatky. CD ROM je součástí tohoto studijního textu – ten už obsahuje o něco náročnější úlohy než najdete na CD ROMu, abyste mohli své znalosti a dovednosti získané studiem pomocí CD ROMu dále rozšířit při své následné další práci se studijním textem.

CD ROM se spouští pomocí tzv. AutoRUNu - tj. dojde k jeho spuštění po vložení do CD mechaniky. Pokud bychom chtěli CD po předchozím uzavření znovu spustit, činíme tak pomocí dvojkliku na ikonu znázorňující CD v okně Tento počítač.

CD ROM také obsahuje instalační soubory k instalaci prohlížečů PS a PDF souborů - tyto je vhodné si nainstalovat na počítač. Na CD ROMu jsou totiž umístěny některé studijní texty v těchto dvou formátech – slouží k doplnění daného tématického celku.

K vlastní práci s CD ROMem je nutné mít na počítači nainstalovaný prohlížeč Internet Explorer.

Při studiu funkcí pomocí již popisovaného studijního textu s CD ROMem je vhodné si před vlastním studiem textu zopakovat příslušné části pomocí CD ROMu – jsou zde shrnuty základní matematické poznatky k danému tématickému celku. Studijní text je zaměřen především na procvičování tvorby grafů funkcí k tématickým celkům pohyby těles v homogenním tíhovém poli Země a kmitavé pohyby – řada úloh použitých v tomto studijním textu jsou různě upravené úlohy z různých ročníků FO za účelem co nejefektivnější práce při vytváření grafů popisujících daný problém.

Ovšem vlastní CD ROM toho obsahuje podstatně více – kromě výše uvedeného jsou zde zpracovány i další pojmy: anamorfóza grafu, posloupnosti, limita funkce. Vše sleduje ještě další cíl: připravit vás na to, abyste v budoucnu mohli lépe zvládnout další studijní texty zaměřené na užití diferenciálního a integrálního počtu ve fyzice.

Při vlastním studiu úloh ze studijního textu doporučujeme si nejprve samostatně sestrojit grafy funkcí u řešených úloh a pak teprve začít řešit tomu odpovídající cvičení. Většinu sestrojených grafů je také možno modelovat pomocí programů na CD ROMu.

Přejeme hodně úspěchů při tvorbě grafů funkcí a příjemnou práci s CD ROMem.

1 Základní pojmy

1.1 Pojem funkce

V technice, ve fyzice, v přírodních vědách a matematice nás nezajímají pouze změny jedné veličiny samotné, nýbrž závislosti mezi několika proměnnými veličinami.

V nejjednodušším případě, kterým se budeme zabývat v tomto textu, pracujeme se závislostmi mezi dvěma proměnnými. Např. je-li s dráha, kterou urazí těleso padající volným pádem za čas t, můžeme psát

$$s = \frac{1}{2}gt^2. \tag{1}$$

Rovnice (1) určuje závislost mezi t a s.

Představme si, že nás bude zajímat délka dráhy, kterou proběhne těleso za t_1 sekund. Potom za proměnnou t dosadíme hodnotu t_1 a vypočteme tomu příslušející dráhu.

Charakter změny proměnné veličiny s se liší od charakteru změny proměnné t. Veličina, jejíž číselnou hodnotu je možno libovolně volit, se nazývá *nezávisle proměnná (argument)*. Proměnná, která nabývá určitých číselných hodnot nezávisle na argumentu, se nazývá *závisle proměnná – funkce* .

Nyní nás bude zajímat obrácená úloha, tj. budeme se zabývat úlohou, za jakou dobu urazí těleso určitou zvolenou dráhu. Vztah odpovídající této situaci dostaneme, vyjádříme-li neznámou t ze vzorce (1), tj.

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}. \tag{2}$$

Je vidět, že v tomto případě si proměnná t a s navzájem vyměnily role: argumentem je nyní proměnná s a funkcí proměnná t.

Kterou z proměnných v dané funkční závislosti budeme považovat za argument a kterou za funkci, je zcela jednoznačně určeno podmínkami úlohy.

Je-li např. v nějaké nádobě uzavřen ideální plyn pod tlakem pístu, potom mezi tlakem p a objemem V plynu existuje závislost

$$pV = konst.$$

Pokud se bude podle podmínek úlohy jevit p jako nezávisle proměnná, můžeme psát

$$V = \frac{konst.}{p}.$$

Je tudíž objem V funkcí tlaku p.

Na základě výše uvedených příkladů můžeme nyní napsat definici pojmu funkce:

Proměnná veličina y se nazývá funkcí nezávisle proměnné veličiny x, jestliže každé hodnotě veličiny x odpovídá jedna určitá hodnoty veličiny y.

Nechť je dána funkce f: $y = f(x)$. Množinu hodnot, kterých může nabývat proměnná x, nazýváme definiční obor funkce f, značíme $D(f)$. Množinu hodnot, kterých nabývá proměnná y, nazýváme obor hodnot funkce $H(f)$.

Poznámka

Definice funkce nic neříká o způsobu, jímž je stanovena závislost mezi funkcemi a argumenty. Tyto způsoby mohou být rozmanité, my se v tomto textu budeme zabývat především případy, kdy je funkce dána vzorcem.

V přírodních vědách a v technice se často setkáváme s případy, kdy závislost mezi funkcí a argumentem není určena vzorcem, ale pokusem. Pak vyjadřujeme vztah mezi funkcí a argumentem užitím tabulky, ale někdy se snažíme sestavit vzorec, vyjadřující funkční závislost přibližně pomocí tzv. *empirického vzorce*.

Místo empirického vzorce je někdy vhodnější vyjádřit funkční závislost v přibližném grafu.

Historická poznámka

Slovo funkce poprvé použili německý matematik G. V. Leibnitz (1646 – – 1716) a švýcarský matematik Jakob Bernoulli (1654 – 1705).

Pojem funkce jako pravidla daného určitým počtem početních výkonů, které je nutno provést s nezávisle proměnnou x, abychom dostali závisle proměnnou y, zavedli v první polovině 18. století J. Bernoulli (1718) a L. Euler (1748). L. Euler (1707 – 1783) mimo jiné podal systematický výklad o funkcích a značil je již symbolem $f(x)$.

1.2 Graf funkce

Graf funkce obvykle sestrojujeme v kartézské soustavě souřadnic $O(x, y)$, která je tvořena dvěma k sobě kolmými orientovanými souřadnicovými osami x, y. V kartézské soustavě souřadnic odpovídá každé uspořádané dvojici $[x_0, y_0]$ jediný bod A_0 o souřadnicích $A_0 = [x_0, y_0]$, který sestrojíme tak, že na ose x vyznačíme souřadnici x_0, na ose y vyznačíme souřadnici y_0. Vyznačenými body vedeme rovnoběžky s osami souřadnic a pak průsečík těchto přímek vyznačuje polohu A_0.

Je-li dána spojitá funkce $y = f(x)$, pak graf této funkce sestrojíme tak, že

- vypočteme tabulku funkčních hodnot y pro vhodně zvolené hodnoty proměnné x, tedy tabulku

x	x_1	x_2	x_3	x_4	$\ldots$
y	y_1	y_2	y_3	y_4	$\ldots$

- uspořádané dvojice hodnot $[x, y]$ považujeme za souřadnice bodů $A_1 = [x_1, y_1]$, $A_2 = [x_2, y_2]$, $\ldots$, které vyznačíme v kartézské soustavě souřadnic,

- vyznačené body A_1, A_2, $\ldots$ spojíme souvislou (spojitou) čarou, která je grafickým znázorněním funkce $y = f(x)$.

Ne vždy je nutné grafy funkcí sestrojovat takovýmto pracným způsobem, ale existuje řada možností, jak sestrojit graf požadované funkce podstatně efektivnějším způsobem, což si i dále v tomto studijním textu ukážeme.

Funkce je možno rozčlenit na tzv. elementární funkce a z těch pak vytvářet funkce složitější. Toto členění a další informace o těchto funkcích a jejich užití je zpracováno na přiloženém CD ROMu.

2 Úlohy z kinematiky

Před vlastním sestrojováním grafů je třeba si sestudovat a procvičit příslušné partie pomocí úloh na CD ROMu.

Příklad 1 – cestující a vlak

(Námětem je úloha ze 17. ročníku FO)

Neukázněný cestující běží rychlostí $v = 6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, aby nastoupil do posledního vagónu vlaku, který je na nástupišti připraven k odjezdu. V okamžiku, kdy cestující je ve vzdálenosti $d_1 = 20$ m od dveří posledního vagónu, začne se vlak rozjíždět se stálým zrychlením $a = 1\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

a) Určete dráhu s_1 cestujícího a dráhu s_2 vlaku jako funkce času. Sestrojte oba grafy do jednoho obrázku. Z grafů rozhodněte, zda cestující dohonil poslední vagón vlaku.

b) Určete vzdálenost d cestujícího od dveří posledního vagónu vlaku jako funkci času. Sestrojte graf funkce $d = f(t)$.

Řešení

a) Označíme s_1 dráhu, kterou urazí cestující, s_2 dráhu vlaku v závislosti na čase. Počátek soustavy souřadnic umístíme do vzdálenosti d_1, ve které se nachází cestující v okamžiku, kdy se vlak začíná rozjíždět.
Platí

$$s_1 = vt,$$

$$s_2 = d_1 + \frac{1}{2}at_1^2.$$

Konkrétně můžeme psát pro číselné hodnoty

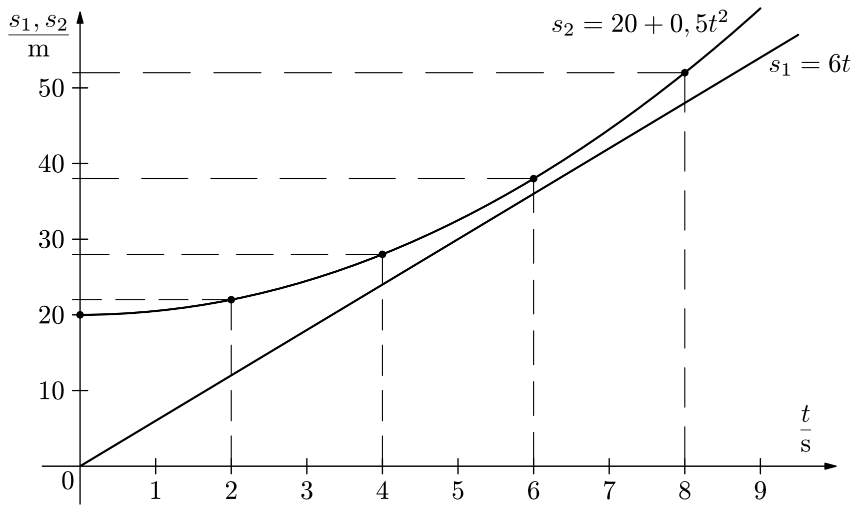
$$s_1 = 6t,$$

$$s_2 = 20 + 0,5t^2.$$

K sestrojení grafu pro dráhu s_2 je nutné sestrojit tabulku (proveďte si sami) – viz grafy kvadratických funkcí na CD ROMu.

Graf pro dráhu s_1 je přímka procházející počátkem a nějakým dalším bodem, jehož souřadnice si opět dopočtěte – viz graf lineární funkce na CD ROMu.

Z níže uvedeného grafu je vidět, že cestující bude nejblíže vlaku v čase asi 6 s od okamžiku, kdy se vlak začal rozjíždět.



Obr. 1 Graf závislosti drah s_1, s_2 na čase

Početní řešení: hledáme průsečík přímky a paraboly.

$$\begin{aligned} s_1 &= s_2 \\ 6t &= 20 + 0,5t^2 \\ t^2 - 12t + 40 &= 0 \end{aligned}$$

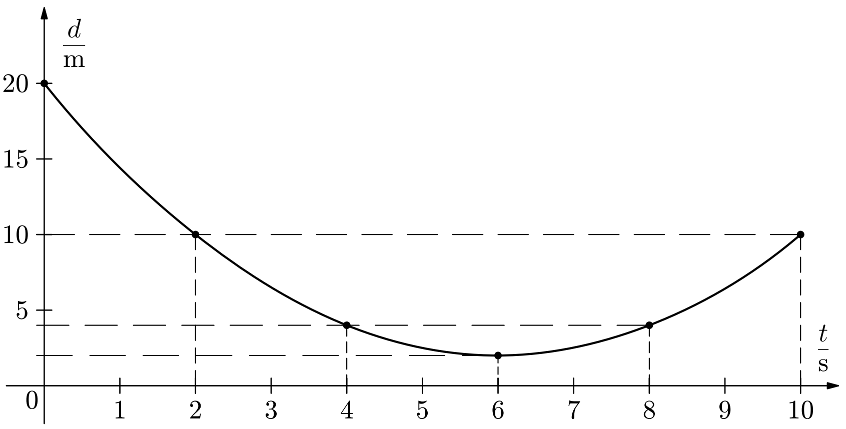
Dostali jsme kvadratickou rovnici, která má záporný diskriminant $D < 0$. To znamená, že početní řešení potvrzuje správnost grafického řešení.

Cestující poslední vagón vlaku nedohonil.

b) Budeme hledat, kdy je vzdálenost d mezi cestujícím a dveřmi posledního vagónu nejmenší. Platí

$$\begin{aligned} d &= s_2 - s_1 \\ d &= d_1 + \frac{1}{2}at^2 - v_1 t \\ d &= 0,5t^2 - 6t + 20 \end{aligned}$$

Před sestrojením grafu si vytvořte tabulku hodnot tak, abyste pak mohli níže uvedený graf samostatně sestrojit.



Obr. 2 Graf závislosti d na čase $d = d(t)$

Z grafu je možno odečíst, že nejmenší vzdálenost $d = 2$ m bude v čase $t = 6$ s od místa rozjezdu vlaku.

O správnosti grafického řešení je možno se přesvědčit početně. Hledáme souřadnice vrcholu paraboly

$$d = 0,5t^2 - 6t + 20.$$

Obecně platí, že souřadnice vrcholu paraboly $y = ax^2 + bx + c$ jsou dány vztahem $V = \left[-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right]$. Po dosazení příslušných koeficientů do výše uvedeného vztahu dostaneme

$$V = [6; 2].$$

Tento výsledek odpovídá výsledku získanému grafickým řešením.

Cvičení 1

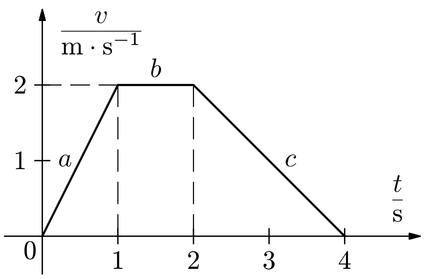
Vyřešte graficky a početně předchozí úlohu, bude-li $d_1 = 10$ m při jinak nezměněných podmínkách úlohy.

Cvičení 2

Určete největší možnou počáteční vzdálenost d cestujícího od vlaku (v příkladu 1), kdy má ještě cestující šanci dohonit rozjíždějící se vlak.

Příklad 2 – nerovnoměrný pohyb

Na obr. 3 je nakreslen graf závislosti rychlosti tělesa na čase, tj. $v = v(t)$.
a) Určete velikost zrychlení a uraženou dráhu v jednotlivých úsecích.
b) Nakreslete graf závislosti dráhy na čase, tj. $s = s(t)$.
c) Napište pro jednotlivé úseky rovnice jednotlivých křivek znázorňujících závislost dráhy na čase od počátku pohybu.



Obr. 3 Graf závislosti rychlosti na čase

Řešení

a) Označíme s_1, s_2, s_3 dráhy uražené v jednotlivých úsecích, t_0, t_1, t_2, t_3 časy pro jednotlivé úseky: $t_0 = 0$ s, $t_1 = 1$ s, $t_2 = 2$ s, $t_3 = 4$ s.

1. úsek: $a_1 = 2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, na počátku pohybu dráha $s_1 = 0$,

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1(t_1 - t_0)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (1-0)^2\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{m}.$$

2. úsek: $a_2 = 0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, na konci 1. úseku $s_2 = 0$,

$$s_2 = v_2(t_2 - t_1) = 2 \cdot (2-1)\ \mathrm{m} = 2\ \mathrm{m}.$$

3. úsek: $a_3 = -1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, na konci 2. úseku $s_3 = 0$,

$$s_3 = v_2(t_3 - t_2) + \frac{1}{2}a_3(t_3 - t_2)^2 = [2 \cdot (4-2) + \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (4-2)^2]\ \mathrm{m} = 2\ \mathrm{m}.$$

c)

a: $s_{\mathrm{a}} = t^2 \quad t \in \langle 0; 1 \rangle$

b: $s_{\mathrm{b}} = 1 + 2(t - 1)$

$s_{\mathrm{b}} = -1 + 2t \quad t \in \langle 1; 2 \rangle$

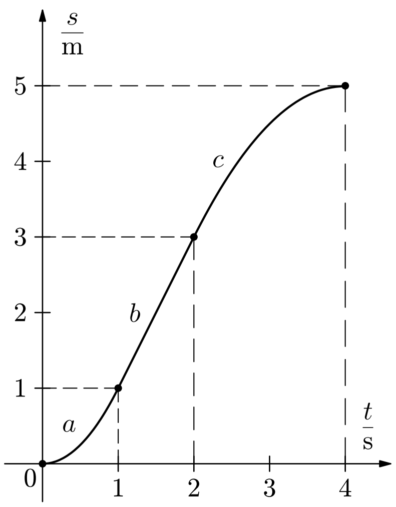
c: $s_{\mathrm{c}} = 2(t-2) + \dfrac{1}{2} \cdot (-1) \cdot (t-2)^2 + 3$

$s_{\mathrm{c}} = -\dfrac{1}{2}t^2 + 4t - 3 \quad t \in \langle 2; 4 \rangle$

Poznámka

Tuto část c je možno také řešit užitím poznatků o parabole $s = At^2 + Bt + C$. Ze zadání víme: $A = -\dfrac{1}{2}$; $V = [4; 5]$. Souřadnice vrcholu paraboly jsou dány vztahem
$V = \left[-\dfrac{B}{2A}; C - \dfrac{B^2}{4A}\right]$.

b)



Obr. 4 Graf závislosti dráhy na čase

Porovnáním koeficientů pro souřadnice vrcholu:

$$4 = -\frac{B}{2A} \Rightarrow B = 4,$$

$$5 = C - \frac{B^2}{4A} \Rightarrow C = -3.$$

Nakonec

$$s = -\frac{1}{2}t^2 + 4t - 3 \qquad t \in \langle 2; 4 \rangle.$$

Shrnutí:

Pro $t \in \langle 0; 1 \rangle \quad s = t^2$,

pro $t \in \langle 1; 2 \rangle \quad s = -1 + 2t$,

pro $t \in \langle 2; 4 \rangle \quad s = -\dfrac{1}{2} + 4t - 3$.

Příklad 3 – pohyb v tíhovém poli Země

(Námětem je úloha z 25. ročníku FO)

Těleso o hmotnosti m se pohybuje svisle vzhůru v tíhovém poli Země působením tažné síly motoru $\boldsymbol{F}$ ($F > mg$). Po době t_1 od začátku pohybu dojde k vypnutí motoru.

a) Popište pohyb tělesa.

b) Nakreslete graf výšky h tělesa nad jeho počáteční polohou jako funkci času.

Úlohu a) řešte nejprve obecně, potom pro hodnoty: $m = 10$ kg, $F = 150$ N, $t_1 = 8$ s, $g = 10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Odpor prostředí zanedbejte.

Řešení

a) Pohyb tělesa je možno rozložit do tří částí:

1. $t \in \langle 0; t_1\rangle$ – rovnoměrně zrychlený pohyb se zrychlením

$$a_1 = \frac{F - mg}{m} = \frac{F}{m} - g.$$

Dále můžeme psát

$$v_1 = a_1 t = \left(\frac{F}{m} - g\right) t,$$

$$h = \frac{1}{2} a_1 t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m} - g\right) t^2.$$

V první etapě dosáhne těleso maximální rychlosti

$$v_{1\max} = \left(\frac{F}{m} - g\right) t_1 = \left(\frac{150}{10} - 10\right) \cdot 8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 40\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

a maximální výšky

$$h_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{F}{m} - g\right) t_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{150}{10} - 10\right) \cdot 8^2\ \mathrm{m} = 160\ \mathrm{m}.$$

2. $t \in \langle t_1; t_2\rangle$, kde t_2 je doba výstupu tělesa do maximální výšky celého pohybu měřená od okamžiku vypnutí motoru. Platí

$$v = v_{1\max} - gt.$$

V nejvyšším bodě je $v = 0$:

$$0 = v_{1\max} - gt_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v_{1\max}}{g} = 4\ \mathrm{s}.$$

Maximální výška měřená od místa vypnutí motoru:

$$h_2 = v_{1\max} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = \frac{v_{1\max}^2}{2g} = 80\ \mathrm{m}.$$

Maximální výška, měřená od počátečního místa pohybu je tedy

$$H = h_1 + h_2 = 240 \text{ m}.$$

3. $t \in \langle t_2; t_3 \rangle$. Jedná se o volný pád, kde t_3 je doba volného pádu tělesa z výšky H. Platí

$$t_3 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 240}{10}} \text{ s} = 6{,}9 \text{ s}.$$

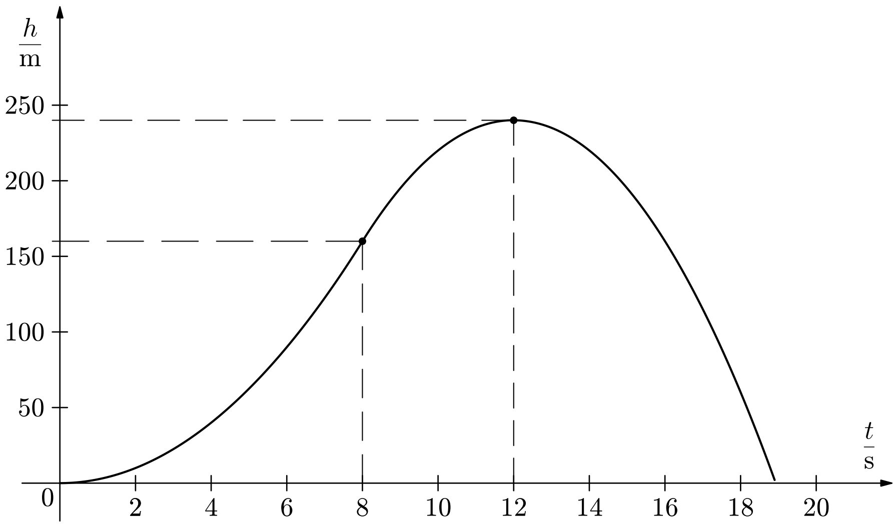
Pro okamžitou výšku tělesa nad povrchem Země v časovém intervalu $\langle t_2; t_3 \rangle$ platí

$$h = H - \frac{1}{2} g t^2.$$

Shrnutí informací o pohybu potřebných pro sestrojení grafu:

1. úsek: $h = 2,5t^2 \qquad t \in \langle 0; 8 \text{ s} \rangle$
2. úsek: $h = h_1 + v_{1\max} - \frac{1}{2} g t^2 = 160 + 40t - 5t^2 \qquad t \in \langle 8 \text{ s}; 12 \text{ s} \rangle$
3. úsek: $h = H - \frac{1}{2} g t^2 = 240 - 5t^2 \qquad t \in \langle 12 \text{ s}; 18{,}9 \text{ s} \rangle$

b) Graf závislosti výšky nad povrchem Země jako funkce času:



Obr. 5 Graf závislosti $h = h(t)$

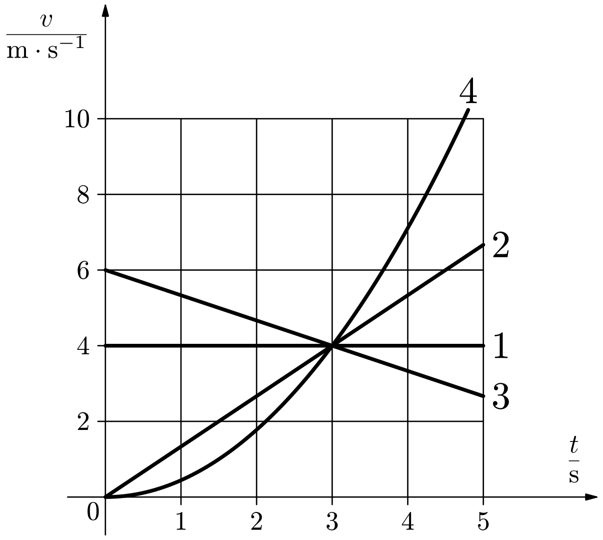
Cvičení 3

Na obr. 6 jsou grafy znázorňující čtyři funkce $v = v(t)$, kde v je velikost rychlosti pohybu hmotného bodu, t je čas.

a) Jaké pohyby hmotného bodu znázorňují grafy 1, 2, 3? Odpovědi zdůvodněte (napište konkrétní rovnice závislostí rychlostí na čase pro jednotlivé případy).

b) Zapište obecně rovnici dráhy $s = s(t)$ v případech 1, 2, 3, víte-li, že v okamžiku $t = 0$ je dráha nulová. Narýsujte příslušné grafy v časovém intervalu $t \in \langle 0\ \mathrm{s}; 4\ \mathrm{s}\rangle$.

c) Graf 4 je parabola. Zapište obecně rovnici rychlosti pohybu $v = v(t)$ odpovídající grafu.



Obr. 6 Graf závislostí $v = v(t)$

3 Úlohy na kmitavé pohyby

Při znázorňování kmitavých pohybů se neobejdeme bez důkladných znalostí grafů goniometrických funkcí.

Před řešením níže uvedených úloh doporučujeme zopakovat si příslušné učivo pomocí CD ROMu, kde jsou uvedeny informace, jak patřičné grafy kreslit. Pomocí programů na CD ROMu je rovněž možno grafy funkcí modelovat.

Příklad 4 – základní grafy kmitavých pohybů

a) Napište rovnici okamžité výchylky harmonických kmitů v závislosti na čase, je-li amplituda výchylky $y_{\mathrm{m}} = 10$ cm a doba kmitu $T = 2$ s. Znázorněte graficky závislost okamžité výchylky na čase. V čase $t = 0$ je okamžitá výchylka rovna nule.

b) Napište rovnici harmonických kmitů o poloviční amplitudě výchylky, dvojnásobné frekvenci a počáteční fázi $-\dfrac{3\pi}{2}$. I tuto funkci znázorněte graficky.

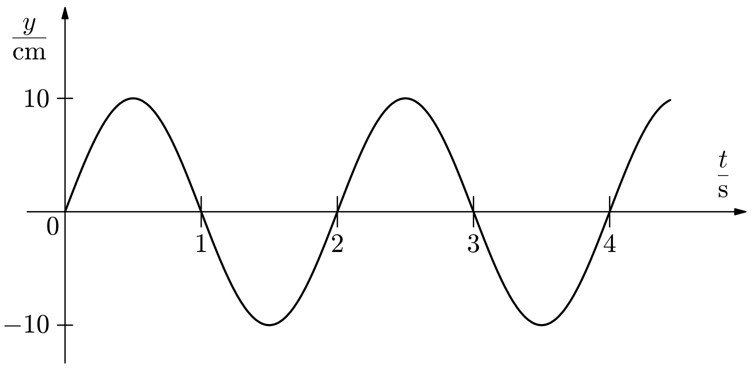
Řešení

Zopakujme si, že obecně můžeme psát

$$y = y_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi_0) = y_{\mathrm{m}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0\right),$$

kde y_{m} je amplituda kmitavého pohybu, T je perioda, φ_0 je počáteční fáze kmitavého pohybu.

a) V tomto případě je $\dfrac{2\pi}{T} = \pi$, $\varphi_0 = 0$. Potom $\{y\} = 10 \sin \pi \{t\}$.

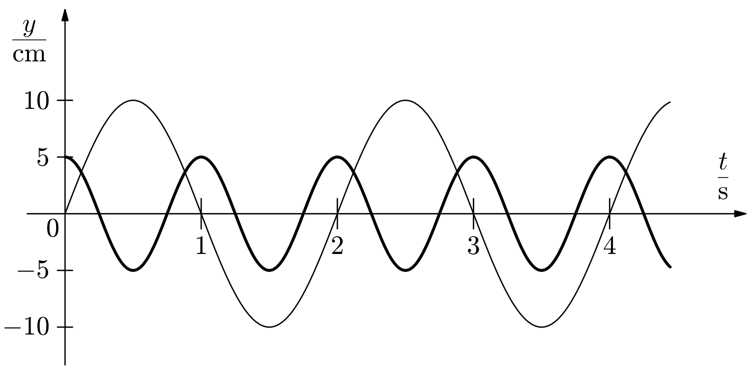


Obr. 7 Graf funkce $\{y\} = 10 \sin \pi \{t\}$

b) Je-li $y'_{\mathrm{m}} = \dfrac{y_{\mathrm{m}}}{2}$, $f' = 2f$ a $\varphi_0 = -\dfrac{3\pi}{2}$, má rovnice harmonických kmitů tvar

$$\{y\} = 5\sin\left(2\pi\{t\} - \frac{3\pi}{2}\right).$$

Na obr. 8 je tento graf vyznačen silnou čarou.

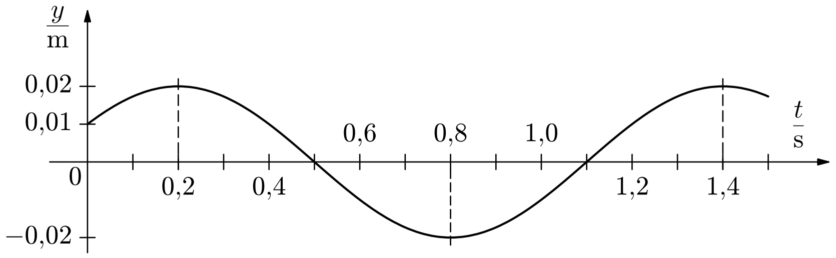


Obr. 8 Graf funkce $\{y\} = 5\sin\left(2\pi\{t\} - \frac{3\pi}{2}\right)$

Příklad 5 – určování údajů z grafu

Na obr. 9 je znázorněn graf závislosti výchylky harmonického kmitavého pohybu na čase. Určete

a) periodu, frekvenci a úhlovou frekvenci tohoto kmitavého pohybu,
b) počáteční fázi kmitavého pohybu,
c) amplitudu výchylky,
d) napište rovnici výše uvedeného kmitavého pohybu.



Obr. 9 Graf funkce

Řešení

Dosazením do základních vztahů obdržíme

a) $T = 1{,}2\ \mathrm{s}$; $f = \dfrac{1}{T} = 0{,}83\ \mathrm{Hz}$; $\omega = 2\pi f = 5{,}24\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$,

b) $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}$,

c) $y_\mathrm{m} = 0{,}02\ \mathrm{m}$,

d) $\{y\} = 0{,}02\sin\left(5{,}24\{t\} + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

Příklad 6 – okamžitá rychlost a zrychlení

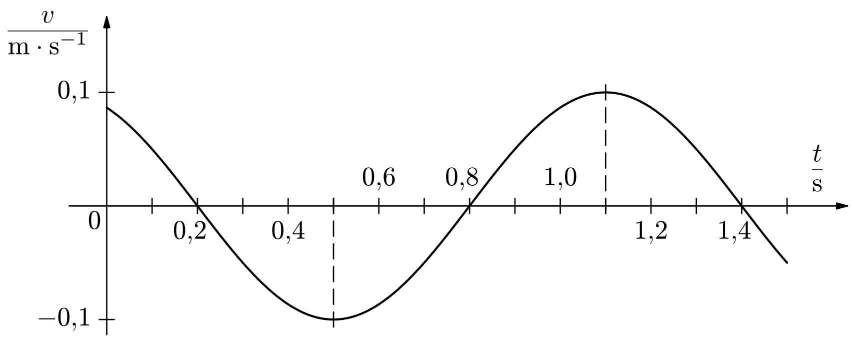
Napište rovnici rychlosti a zrychlení kmitavého pohybu z příkladu 5. Sestrojte grafy závislostí $v = v(t)$, $a = a(t)$.

Řešení

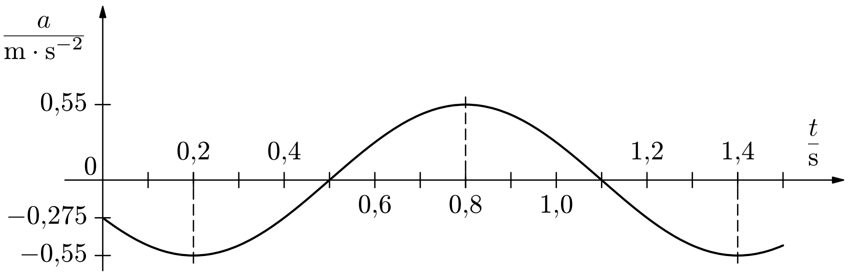
Platí

$$v = \omega y_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad \{v\} = 0{,}1\cos\left(5{,}24\{t\} + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$a = -\omega^2 y_\mathrm{m}\sin(\omega t + \varphi_0), \qquad \{a\} = -0{,}55\sin\left(5{,}24\{t\} + \frac{\pi}{6}\right).$$



Obr. 10 Graf závislosti okamžité rychlosti na čase



Obr. 11 Graf závislosti okamžitého zrychlení na čase

Příklad 7 – mechanický oscilátor

Mechanický oscilátor kmitá s periodou $T = 2$ s. Určete amplitudu a počáteční fázi kmitů, je-li počáteční výchylka $y_0 = 5$ cm a počáteční rychlost $v_0 = -1$ m·s^{-1}. Napište rovnici závislosti $y = y(t)$, $v = v(t)$, $a = a(t)$. Sestrojte grafy výše uvedených závislostí. O správnosti svého výsledku se přesvědčte pomocí „Modelování" na CD ROMu.

Řešení

Obecně platí

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi,$$

$$\begin{aligned} y &= y_\mathrm{m}\sin(\omega t + \varphi_0) \\ v &= y_\mathrm{m}\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \\ a &= -\omega^2 y_\mathrm{m}\sin(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

V čase $t = 0$ je

$$\begin{aligned} y_0 &= y_\mathrm{m}\sin\varphi_0 \\ v_0 &= \omega y_\mathrm{m}\cos\varphi_0 \\ a_0 &= -\omega^2 y_\mathrm{m}\sin\varphi_0. \end{aligned}$$

Dále můžeme psát

$$\frac{y_0}{v_0} = \frac{1}{\omega}\frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}\varphi_0 &= \frac{2\pi}{T}\cdot\frac{y_0}{v_0}\\
\operatorname{tg}\varphi_0 &= \frac{2\pi}{2}\cdot\frac{0{,}05}{-1}\\
\varphi_0 &= -0{,}05\pi .
\end{aligned}
$$

Z rovnice $y_0 = y_\mathrm{m}\sin\varphi_0$ můžeme vyjádřit $y_\mathrm{m} = \dfrac{y_0}{\sin\varphi_0}$.
Po dosazení $y_\mathrm{m} = -0{,}32$ m.

Nakonec

$$
\begin{aligned}
\{y\} &= -0{,}32\sin(\pi\{t\} - 0{,}05\pi) = 0{,}32\sin(\pi\{t\} + 0{,}95\pi),\\
\{v\} &= \pi\cdot\cos(\pi\{t\} + 0{,}95\pi) = 1{,}0\cos(\pi\{t\} + 0{,}95\pi),\\
\{a\} &= -\pi^2\cdot 0{,}32\sin(\pi\{t\} + 0{,}95\pi) = -3{,}2\sin(\pi\{t\} + 0{,}95\pi).
\end{aligned}
$$

Cvičení 4

Určete frekvenci sinusového kmitání hmotného bodu pružiny, jestliže za dobu 0,1 s po projití rovnovážnou polohou urazí $\frac{1}{8}$ celkové dráhy kmitu.

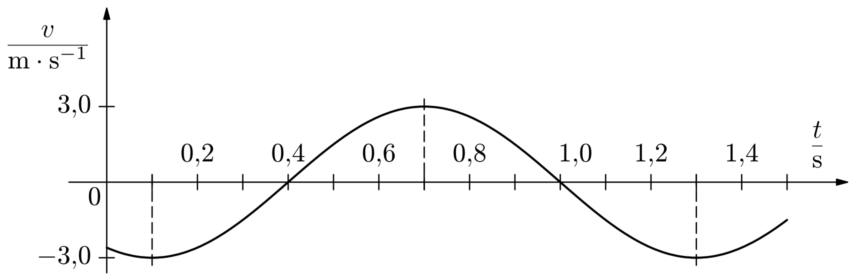
Cvičení 5

Těleso zavěšené na pružině koná harmonické kmity. Závislost okamžité rychlosti na čase je znázorněna na obr. 12.

a) Určete amplitudu výchylky y_m, amplitudu zrychlení a_m a počáteční fázi.

b) Napište rovnice, vyjadřující závislosti $y = y(t)$, $v = v(t)$, $a = a(t)$.

c) Nakreslete grafy funkcí z úlohy b). O správnosti svého postupu se přesvědčte pomocí „Modelování“ na CD ROMu.



Obr. 12 Graf závislosti okamžité rychlosti na čase

Příklad 8 – miska s plastelínou

(Úloha ze 42. ročníku FO)

Kousek plastelíny o hmotnosti 150 g dopadne z výšky $h = 12$ cm do středu misky o hmotnosti $M = 120$ g zavěšené na pružině tuhosti $k = 12\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$, která má zanedbatelnou hmotnost.

a) Napište rovnice vyjadřující časové funkční závislosti $y = y(t)$, $v = v(t)$, $a = a(t)$.

b) Sestrojte grafy funkčních závislostí z úlohy a). Zobrazte alespoň dvě periody.

Řešení

Velikost rychlosti, se kterou dopadne plastelína na misku, je $v' = \sqrt{2gh}$. Dojde k nepružnému rázu. Bezprostředně po něm se bude miska i s plastelínou pohybovat počáteční rychlostí $\boldsymbol{v}_0$ směrem dolů a začne kmitat kolem nové rovnovážné polohy, která je níže o $\Delta l = \dfrac{mg}{k}$. Velikost počáteční rychlosti určíme užitím zákona zachování hybnosti:

$$mv' = (m + M)v_0, \qquad |\boldsymbol{v}_0| = \frac{m\sqrt{2gh}}{M + m}.$$

Kmity misky s plastelínou popíšeme ve vztažné soustavě, jejíž počátek je v nové rovnovážné poloze misky. Počáteční podmínky jsou tedy:

$$y_0 = \Delta l = \frac{mg}{k} = 0{,}1225\ \mathrm{m}, \qquad v_0 = -\frac{m\sqrt{2gh}}{M + m} = -0{,}852\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Úhlová frekvence a perioda kmitů jsou:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M + m}} = 6{,}67\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}942\ \mathrm{s}.$$

Amplitudu kmitů určíme užitím zákona zachování energie

$$\frac{1}{2}ky_\mathrm{m}^2 = \frac{1}{2}k\ y_0^2 + \frac{1}{2}(M + m)v_0^2,$$

$$y_\mathrm{m} = \sqrt{y_0^2 + \frac{(M + m)v_0^2}{k}} = y_0\sqrt{1 + \frac{2hk}{g(M + m)}} = 0{,}177\ \mathrm{m}.$$

Zbývá vypočítat amplitudu rychlosti, amplitudu zrychlení a počáteční fázi:

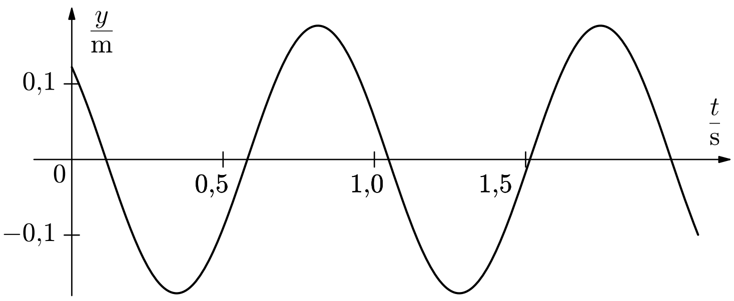
$$v_\mathrm{m} = \omega y_\mathrm{m} = 1{,}18\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}, \qquad a_\mathrm{m} = \omega^2 y_\mathrm{m} = 7{,}87\ \mathrm{m \cdot s^{-2}},$$

$$y_0 = y_\mathrm{m}\sin\varphi_0, \quad v_0 = \omega y_\mathrm{m}\cos\varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{tg}\,\varphi_0 = \frac{y_0\omega}{v_0},$$

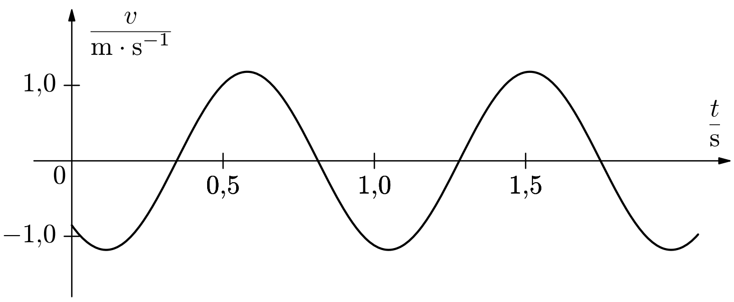
$$\mathrm{tg}\,\varphi_0 = \frac{\dfrac{mg}{k}\sqrt{\dfrac{k}{M + m}}}{-\dfrac{m}{M + m}\sqrt{2gh}} = -\sqrt{\frac{(M + m)g}{2hk}}, \qquad \varphi_0 = 136{,}2^\circ = 2{,}38\ \mathrm{rad}.$$

Časový průběh kmitů je popsán rovnicemi:

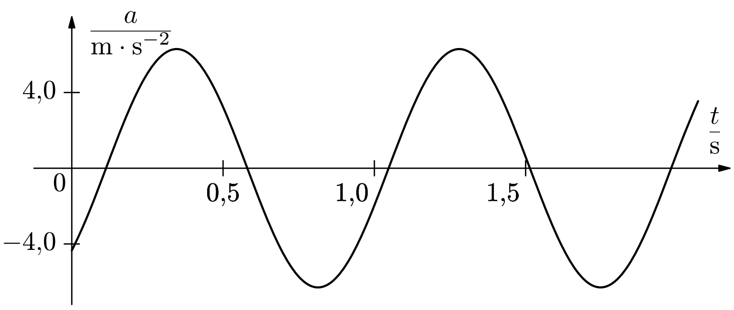
$$y = y_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad \{y\} = 0{,}177 \sin(6{,}67\{t\} + 2{,}38),$$
$$v = v_\mathrm{m} \cos(\omega t + \varphi_0), \qquad \{v\} = 1{,}18 \cos(6{,}67\{t\} + 2{,}38),$$
$$a = -a_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad \{a\} = -7{,}87 \sin(6{,}67\{t\} + 2{,}38).$$



Obr. 13 Graf závislosti okamžité výchylky na čase



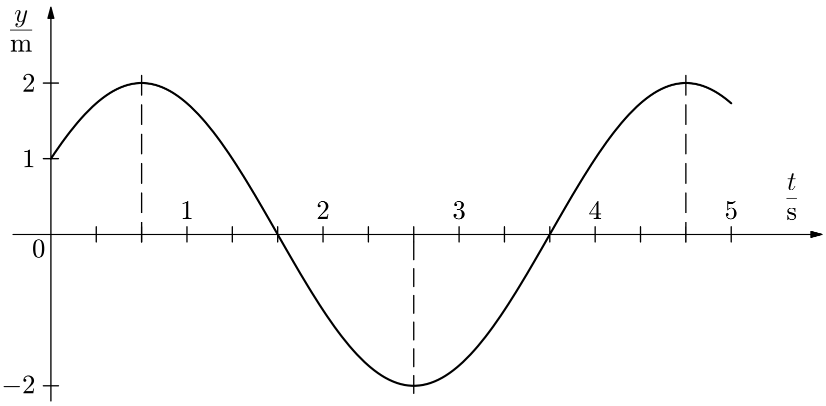
Obr. 14 Graf závislosti okamžité rychlosti na čase



Obr. 15 Graf závislosti okamžitého zrychlení na čase

Cvičení 6

Z daného grafu určete amplitudu y_m, periodu T a počáteční fázi φ_0 kmitavého pohybu. Potom napište rovnice časových závislostí $y = y(t)$, $v = v(t)$, $a = a(t)$. Určete dále okamžitou výchylku, rychlost a zrychlení pohybu v časech 1 s, 2 s, 3 s a 4 s od počátku pohybu.



Obr. 16 Graf závislosti okamžité výchylky na čase

4 Limity

V této kapitole se zaměříme na úlohy z fyziky, kde je možno se setkat s limitami. Nejprve si ukážeme na úlohu vedoucí k řešení limity posloupnosti, potom na úlohu vedoucí na výpočet limity funkce. Před četbou této kapitoly je vhodné si tyto pojmy zopakovat podle některé ze současných středoškolských učebnic matematiky nebo užitím přiloženého CD ROMu. Na tomto CD ROMu lze rovněž nalézt i další fyzikální úlohy vyžadující k správnému řešení znalosti o limitách a posloupnostech.

4.1 Limita posloupnosti

Následující příklad reprezentuje jednu ze skupiny úloh, kde je možno řešit úlohy daného typu – úlohy řešitelné užitím vyšší matematiky pouze pomocí limity posloupnosti bez užití vyšší matematiky.

K tomu, abychom vyřešili následující úlohu budeme potřebovat následující vzorec – pro součet třetích mocnin přirozených čísel. Platí

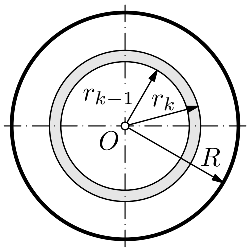
$$S = \sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2. \tag{3}$$

Tento vztah je možno nalézt v matematických tabulkách, odvození se provádí pomocí matematické indukce a je uvedeno v učebnicích matematiky.

Příklad 9 – moment setrvačnosti kruhové desky

Určete moment setrvačnosti homogenní kruhové desky o hmotnosti m a poloměru R vzhledem k ose procházející středem desky kolmo na rovinu desky. Tloušťku desky zanedbejte.

Řešení



Obr. 22 Výpočet momentu setrvačnosti kruhu

Poloměr kruhu si rozdělíme na n stejně velkých částí, potom dělícími body povedeme soustředné kružnice. Tím se kruh rozdělí na n mezikruží (obr. 22). Hmotnost k-tého mezikruží pak určíme užitím vztahu

$$m_k = \pi(r_k^2 - r_{k-1}^2) \cdot \sigma,$$

kde σ je plošná hustota a vypočteme ji užitím vztahu $\sigma = \dfrac{m}{\pi R^2}$.

Každé mezikruží nyní budeme považovat za hmotnou kružnici o poloměru rovnému aritmetickému průměru krajních poloh mezikruží. Označíme-li

$$r_k = \frac{R}{n}k, \qquad r_{k-1} = \frac{R}{n}(k-1),$$

pak pro moment setrvačnosti k-tého mezikruží můžeme psát

$$J_k = \pi(r_k^2 - r_{k-1}^2)\sigma\left(\frac{r_k - r_{k-1}}{2}\right)^2 = \frac{\pi\sigma R^4}{4n^2}(2k-1)^3.$$

Sečtením dílčích momentů setrvačnosti J_k dostaneme celkový moment setrvačnosti kruhové desky $J(n)$, který se bude skutečné hodnotě blížit tím více, čím bude větší n. Platí

$$J(n) = \sum_{k=1}^{n} J_k = \frac{\pi\sigma R^4}{4n^4}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3.$$

Použitím vztahu (3) dostaneme

$$J(n) = \frac{\pi\sigma R^4}{4n^4}n^2(2n^2-1) = \frac{\pi\sigma R^4}{4}\left(2 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Budeme-li za n postupně dosazovat hodnoty $1, 2, 3 \ldots$, dostaneme posloupnost

$$J_1 = \frac{\pi\sigma R^4}{4}, \quad J_2 = \frac{\pi\sigma R^4}{4}\frac{7}{4}, \quad J_3 = \frac{\pi\sigma R^4}{4}\frac{17}{9}, \ldots, \quad J_n = J(n).$$

Hledaný moment setrvačnosti kruhové desky pak dostaneme jako limitu této posloupnosti, tj.

$$J = \lim_{n\to\infty} J(n) = \frac{\pi\sigma R^4}{2}.$$

Nakonec ještě dosadíme zpět za $\sigma = \dfrac{m}{\pi R^2}$ a obdržíme nám dobře známý vztah pro moment setrvačnosti kruhové desky vzhledem k ose kolmé na rovinu kruhu a procházející středem kruhu

$$J_0 = \frac{1}{2}mR^2.$$

4.2 Limita funkce

V této části si ukážeme použití limity funkce jedné reálné proměnné ve vztahu k fyzice. Podrobněji lze část o limitách funkcí nalézt zpracovanou buď na přiloženém CD ROMu (zde i s dalšími fyzikálními aplikacemi) nebo v současných středoškolských učebnicích matematiky.

Limita funkce má velké uplatnění při řešení úloh vedoucích k použití vyšší matematiky. My si nyní na úvod uvedeme alespoň jednu úlohu, kde se s limitou funkce můžeme setkat (další úlohy jsou uvedeny na CD ROMu).

Příklad 10 – pohyb kuličky ve vodě

Kulička je ponořena do vody, přičemž hustota kuličky je jen o málo větší než hustota vody. Kuličku z její výchozí polohy pustíme nulovou počáteční rychlostí. Budeme uvažovat, že obtékání kuličky je laminární a velikost odporové síly je přímo úměrná první mocnině rychlosti, tj.

$$F = -kv.$$

Na kuličku kromě této síly ještě působí síla vztlaková a tíhová. Při řešení závislosti rychlosti na čase bychom nyní dále museli sestavit příslušnou diferenciální rovnici. Po vyřešení této rovnice bychom dostali vztah [1]

$$v = \frac{a}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right). \tag{4}$$

Určete mezní rychlost kuličky.

Řešení

Na pravé straně rovnice (4) je výraz obsahující proměnnou t. Roste-li t nade všechny meze, pak se hodnota výrazu

$$y = \mathrm{e}^{-kt}$$

blíží nule, což můžeme zapsat jako

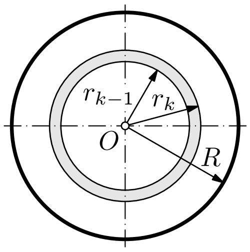
$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-kt} = 0.$$

Potom tedy můžeme psát

$$v_\mathrm{m} = \lim_{t\to\infty} \frac{a}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right) = \frac{a}{k}.$$

[1] Popis jak sestavovat a řešit tyto rovnice je možno nalézt např. v publikaci [6].

Na níže uvedeném obrázku tuto závislost ještě znázorníme graficky.



Obr. 22 Graf funkce $v = \frac{a}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right)$

Poznámka

S podobnými situacemi je ve fyzice možné se setkat např. při řešení *přechodových dějů* v elektrických obvodech.

Další úlohy vztahující se k problematice limit posloupností a funkcí je možno i se stručným teoretickým výkladem a přehledem početních vztahů nalézt na přiloženém CD ROMu.

Řešení cvičení

Cvičení 1

1. Početně: sestavíme kvadratickou rovnici $t^2 - 12t + 20 = 0$.
Řešením této kvadratické rovnice jsou v tomto případě dva kořeny

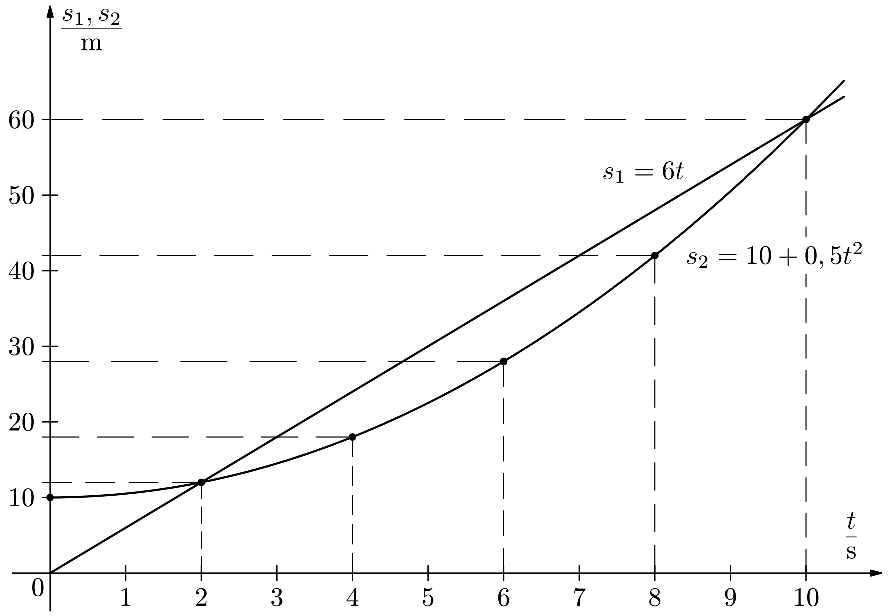
$$t_1 = 2 \text{ s}, \qquad t_2 = 10 \text{ s}.$$

Úloze vyhovuje pouze kořen $t = 2$ s.
Nyní určíme dráhu odpovídající času 2 s:

$$s = 12 \text{ m}.$$

Cestující v tomto případě dohoní rozjíždějící se vlak za 2 s od okamžiku, kdy se vlak začal rozjíždět.

2. Graficky:

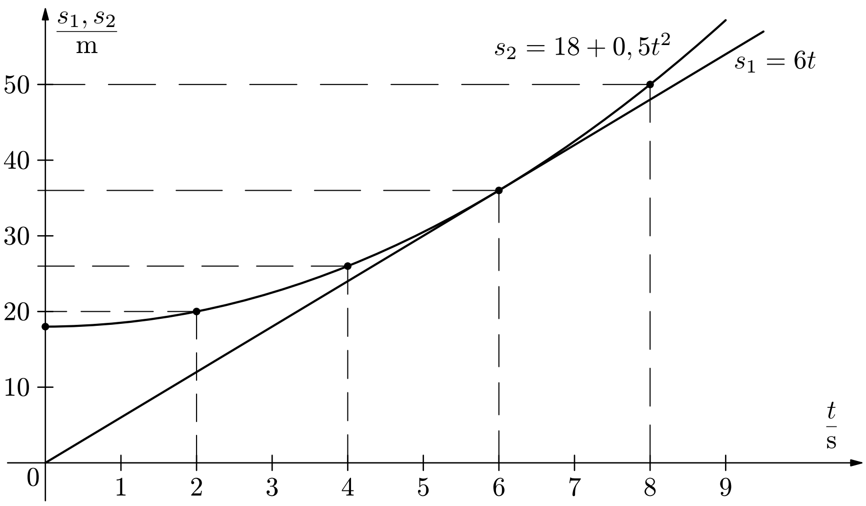


Obr. 17 Graf závislosti drah s_1, s_2 na čase

Cvičení 2

1. Početně:
Sestavíme kvadratickou rovnici $t^2 - 12t + 2d_1 = 0$.
Požadujeme, aby $D \geq 0$. Potom musí platit $12^2 - 8d_1 \geq 0$.
Řešením nerovnice dostaneme $d_1 \leq 18$ m.
Největší možná vzdálenost je 18 m.

2. Graficky: ověříme, že přímka a parabola mají pouze jeden společný bod.



Obr. 18 Graf závislosti drah s_1, s_2 na čase

Cvičení 3

a)

1: rovnoměrný pohyb – $v = konst. = 4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

2: rovnoměrně zrychlený pohyb – $v = a_2 t = \frac{4}{3}t \Rightarrow a_2 = \frac{4}{3}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

3: rovnoměrně zpomalený pohyb – $v = 6 - \frac{1}{3}t \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{3}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

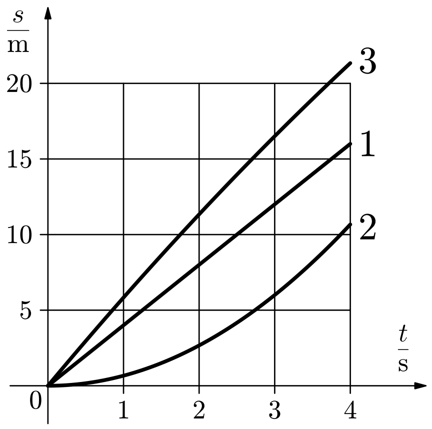
b)

1: $s_1 = vt = 4t$,

2: $s_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} t^2 = \frac{2}{3} t^2$,

3: $s_3 = 6t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} t^2 = 6t - \frac{1}{6} t^2$.

Pro sestrojení grafů v případě 2, 3 si sami vytvořte patřičné tabulky hodnot.



Obr. 19 Graf závislosti drah s_1, s_2, s_3 na čase

c) Obecně pro 4: parabola prochází počátkem [0; 0] a bodem [3; 4], $v = kt^2$, po dosazení souřadnic bodu [3; 4] dostaneme

$$4 = k \cdot 3^3 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4}{9}.$$

Rovnice paraboly tedy je $v = \frac{4}{9} t^2$.

Cvičení 4

Urazí-li hmotný bod po průchodu rovnovážnou polohou $\frac{1}{8}$ celkové dráhy kmitu, je možno psát $\omega t = \frac{\pi}{6}$. Dále můžeme psát

$$2\pi f \cdot 0{,}1 = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{5}{6}\ \mathrm{Hz}.$$

Cvičení 5

a) $v_\mathrm{m} = 3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; $y_\mathrm{m} = \dfrac{v_\mathrm{m}}{\omega} = \dfrac{v_\mathrm{m}T}{2\pi}\ \mathrm{m} = 0{,}57\ \mathrm{m}.$

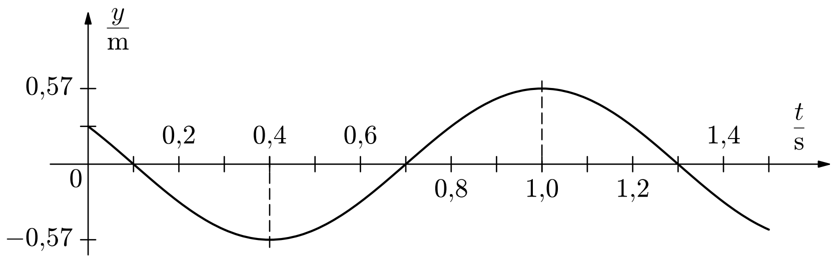
$T = 1{,}2\ \mathrm{s}$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 5{,}24\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$,

$a_\mathrm{m} = \omega^2 y_\mathrm{m} = \omega v_\mathrm{m} = 15{,}70\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $\varphi_0 = -\dfrac{7}{6}\pi.$

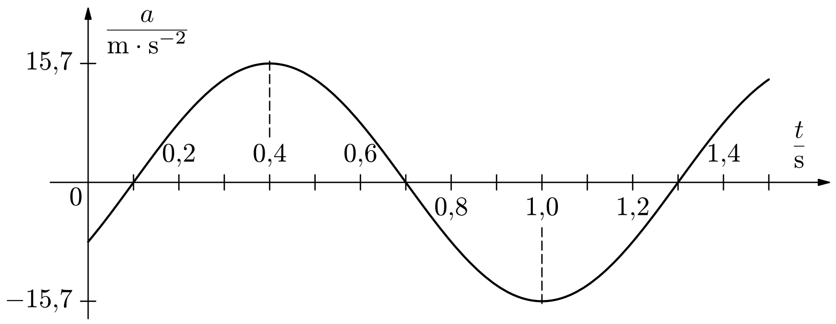
b)

$$\begin{aligned}
\{y\} &= 0{,}57\sin\left(5{,}24\{t\} - \frac{7}{6}\pi\right), \\
\{v\} &= 3{,}0\cos\left(5{,}24\{t\} - \frac{7}{6}\pi\right), \\
\{a\} &= -15{,}70\sin\left(5{,}24\{t\} - \frac{7}{6}\pi\right).
\end{aligned}$$

c)



Obr. 20 Graf závislosti $y = y(t)$



Obr. 21 Graf závislosti $a = a(t)$

Cvičení 6

$T = 4$ s; $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}$; $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{6}$;

$y_{\mathrm{m}} = 2$ m; $v_{\mathrm{m}} = \omega y_{\mathrm{m}} = \pi$; $a_{\mathrm{m}} = -\omega^2 y_{\mathrm{m}} = -\dfrac{\pi^2}{2}$.

$$\begin{aligned} \{y\} &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\{t\} + \frac{\pi}{6}\right), \\ \{v\} &= \pi\cos\left(\frac{\pi}{2}\{t\} + \frac{\pi}{6}\right), \\ \{a\} &= -\frac{\pi^2}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\{t\} + \frac{\pi}{6}\right). \end{aligned}$$

V čase $t = 1$ s: $\{y\} = \sqrt{3}$, $\{v\} = -\dfrac{\pi}{2}$, $\{a\} = -\pi^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

V čase $t = 2$ s: $\{y\} = -1$, $\{v\} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$, $\{a\} = \dfrac{\pi^2}{4}$.

V čase $t = 3$ s: $\{y\} = -\sqrt{3}$, $\{v\} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$, $\{a\} = \pi^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

V čase $t = 4$ s: $\{y\} = 1$, $\{v\} = \dfrac{\pi}{2}$, $\{a\} = -\dfrac{\pi^2}{4}$.

Literatura

[1] Košťál, R. a kol: *XVII. ročník fyzikální olympiády.* SPN, Praha 1978.

[2] Žampa, K. a kol: *XXV. ročník fyzikální olympiády.* SPN, Praha 1988.

[3] Žampa, K. a kol: *XXVI. ročník fyzikální olympiády.* SPN, Praha 1990.

[4] Volf, I., Šedivý, P.: *42. ročník fyzikální olympiády.* MAFY, Hradec Králové 2000.

[5] Vybíral, B., Zdeborová, L.: *Pohyb těles s vlivem odporových sil.* MAFY, Hradec Králové 2002.

[6] Ungerman, Z.: *Matematika a řešení fyzikálních úloh.* SPN, Praha 1990.

[7] Tarasov, N., P.: *Základy vyšší matematiky pro průmyslové školy.* SPN, Praha 1954.