ODPOROVÉ SÍLY

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Bohumil Vybíral a Lenka Zdeborová

Obsah

Úvod

V textu předkládáme čtenářům soustavné pojednání o odporových silách a o jejich vlivu na pohyb těles. V mechanice se často řeší problémy za velmi zjednodušujících předpokladů, odporové síly se zanedbávají. Tím může dojít k podstatnému zkreslení reality.

Jako příklad značného vlivu odporu prostředí na pohyb těles můžeme uvést šikmý vrh. Problém často řešíme, jako by šlo o pohyb ve vakuu. To lze ve vzduchu s dostatečnou přesností předpokládat jen při malých rychlostech řádu $10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Půjde-li však např. o puškovou střelu vystřelenou počáteční rychlostí $900\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ pod elevačním úhlem 30°, bude skutečná délka vrhu (tj. dostřel) činit pouhých 6% délky, kterou bychom vypočetli pro vakuum.

Účinek odporových sil na pohyb těles je ale nejen nepříznivě omezující. Jako příklad uvedeme užitečný účinek tření, který nám umožňuje chůzi, aniž bychom si to běžně uvědomovali. Stačí však, dojde-li k podstatnému zmenšení součinitele tření při náledí a máme znemožněnou chůzi i jízdu automobilem.

Předložený studijní text se zabývá všemi druhy odporových sil, se kterými se můžeme setkat v mechanice. Především je to tření vznikající mezi pevnými tělesy. Další významnou skupinou odporových sil jsou síly v tekutinách působící proti pohybu pevných těles, která se pohybují různými rychlostmi včetně rychlostí srovnatelných s rychlostí zvuku v daném prostředí.

V textu jsme se snažili o obecný rigorózní výklad, který běžné středoškolské učebnice kvůli obtížnosti postrádají. K ilustraci výkladu je v textu zařazeno 7 řešených příkladů. Na konci textu je zadáno 15 úloh, jejichž samostatným řešením čtenář získá určitou zběhlost v řešení podobných problémů např. ve fyzikální olympiádě. Pro kontrolu správnosti jsou uvedeny i výsledky.

Na předložený text bude volně navazovat druhý díl „Vliv odporových sil na pohyb těles“.

1 Odpor při pohybu těles

Pohybují-li se vůči sobě dvě dotýkající se tělesa stejného nebo různého skupenství, působí proti jejich vzájemnému pohybu síla, které říkáme *odporová síla*. Ze zkušenosti víme, že tato síla má opačný směr než relativní rychlost, a že obecně je nějakou funkcí rychlosti tělesa. Lze ji vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{F} = -f(v)\boldsymbol{v}^0, \tag{1}$$

kde $\boldsymbol{v}^0 = \boldsymbol{v}/v$ je jednotkový vektor ve směru rychlosti. Funkce $f(v)$ obecně popisuje velikost odporové síly v závislosti na rychlosti. Její tvar vyplývá z teorie nebo z experimentu.

Často užíváme speciálního tvaru funkce $f(v)$ a místo obecného vztahu (1) píšeme

$$\boldsymbol{F} = -kv^n\boldsymbol{v}^0, \tag{2}$$

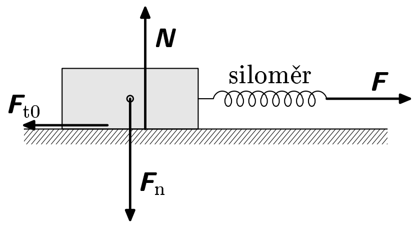
kde k je konstanta, která vyplývá z experimentu nebo teorie a n je reálné číslo, jež v jednoduchých případech odporových sil může být 0, 1 nebo 2.

Při rotaci pevného tělesa (např. v ložisku) se odpor projevuje *momentem odporové síly*, který je namířen proti rotaci. Odvaluje-li se rotační pevné těleso po reálné podložce, vzniká *valivý odpor*, který se opět projevuje momentem síly namířeným proti rotaci, resp. proti odvalování.

2 Tření mezi pevnými tělesy

2.1 Klidové (statické) tření

Povrch reálných těles a povrch např. podložky, na níž tělesa spočívají, není dokonale hladký. Drsnost povrchu způsobuje, že těleso se vůči podložce uvede do smykového pohybu, až když působící síla překročí jistou velikost. Snadno si to ověříme pokusem podle obr. 1. Těleso uvádíme do pohybu prostřednictvím pružiny siloměru a zjistíme, že pohyb nastane, až když

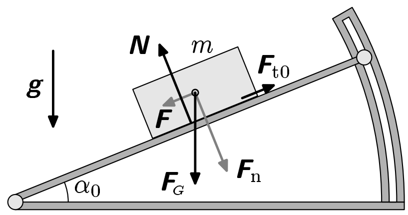


Obr. 1. Těleso se začne pohybovat, až když síla $\boldsymbol{F}$ překročí jistou velikost

$$F = F_{t0} = f_0 F_n, \qquad (3)$$

kde f_0 je *součinitel klidového (statického) tření* a $\boldsymbol{F}_n$ je normálová síla, která působí kolmo na stykovou plochu a přitlačuje těleso k podložce. Podložka naopak působí na těleso reakcí $\boldsymbol{N}$ (nositelka této síly je rovnoběžně posunuta vzhledem k nositelce síly $\boldsymbol{F}_n$; podrobný rozbor sil provedeme v obr. 3). Síla $\boldsymbol{F}_t$, která splňuje podmínku $F_t \leq F_{t0}$ se nazývá *síla klidového tření.* Tato síla tedy zaručuje, že se stykové plochy vůči sobě nepohybují, a je tomu přizpůsobena její velikost i směr. Maximální velikost síly $\boldsymbol{F}_{t0}$ je dána vztahem (3), po porušení této podmínky se začíná těleso smýkat.

Pokusy můžeme přesněji provádět na sklonném drsnoměru (*tribometru*) podle obr. 2, kde silou uvádějící těleso do pohybu je složka $F = F_G \sin\alpha$ tíhové síly $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$. Těleso se dostane do pohybu při splnění podmínky $F_G \sin\alpha_0 = f_0 F_n = f_0 F_G \cos\alpha_0$, tedy při sklonu pod úhlem α_0, který splňuje



Obr. 2. Sklonný drsnoměr (tribometr)

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = f_0. \qquad (4)$$

Úhel α_0 se nazývá *klidový úhel tření.*

Nyní provedeme podrobnou analýzu sil a jejich momentů působících na těleso z obr. 1, které se nachází v mezním stavu klidového tření, kdy síla tření $\boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{F}_{t0}$. Na těleso působí síly (viz obr. 3)

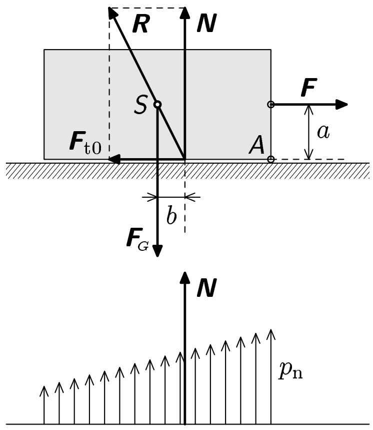
- $\boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{F}_G$ — přítlačná síla (rovná tíhové síle),

- $\boldsymbol{F}$ — síla, která má tendenci uvést těleso do pohybu,
- $\boldsymbol{F}_{t0}$ — síla mezního klidového tření (3),
- $\boldsymbol{N}$ — reakce podložky.

Nositelka síly $\boldsymbol{F}$ nechť prochází hmotným středem S (těžištěm) ve vzdálenosti a od podložky, vzdálenost b nositelky reakce $\boldsymbol{N}$ od S budeme určovat.

Soustava na obr. 3 je v rovnováze, takže součet sil ve vodorovném a svislém směru i součet momentů (např. vzhledem k bodu S) musí být nulový:

$$F - F_{t0} = 0,$$
$$N - F_n = 0,$$
$$Nb - F_{t0}a = 0.$$



Obr. 3. Síly působící na těleso v mezním stavu klidového tření

Ze třetí rovnice vzhledem ke vztahu (3) dostaneme

$$b = \frac{F_{t0}}{N}a = \frac{F_{t0}}{F_n}a = f_0 a = a \operatorname{tg} \alpha_0, \tag{5}$$

kde α_0 je klidový úhel tření (4). Výslednice $\boldsymbol{R}$ reakcí podložky musí zřejmě procházet bodem S, jinak by se těleso otáčelo.

Významný je poznatek (5), že reakce $\boldsymbol{N}$ podložky je předsunuta před přítlačnou sílu $\boldsymbol{F}_n$; z toho plyne, že rozložení tlaku p_n ve stykové ploše musí být nerovnoměrné (obr. 3). Pokud by a bylo takové, že klopný moment síly $\boldsymbol{F}$ k hraně A (tj. Fa) nebude moci být vyrovnán momentem dvojice sil $\boldsymbol{F}_n$, $\boldsymbol{N}$ (tj. Nb), dojde k překlopení tělesa kolem hrany A. Potvrzuje to zkušenost např. s přesouváním skříně po podlaze — efektivní je táhnout ji u dna, jinak ji snadno překlopíme.

Bude-li pro působící sílu $\boldsymbol{F}$ na obr. 1 platit $F \leq f_0 F_n$ nedojde k pohybu tělesa. Na této vlastnosti je založena řada důležitých činností a technických funkcí: chůze, pohyb kolových vozidel, spojovací funkce hřebíku, klínu a šroubu, přenos momentu síly řemenem, třecí spojkou atp. Při změně součinitele klidového tření (náledí, olej) dochází k poruchám popsaných funkcí.

Velikost součinitele klidového tření závisí na vlastnostech povrchů, které se stýkají — na drsnosti a na materiálu stýkajících se povrchů. Součinitel f_0 a úhel α_0 můžeme najít v tabulce 1 na konci tohoto textu.

2.2 Kužel tření

Nechť na těleso (o jehož tíze zde neuvažujeme) působí síla $\boldsymbol{F}$, jejíž nositelka svírá s normálou stykové plochy úhel β (viz obr. 4). Bude-li splněna podmínka

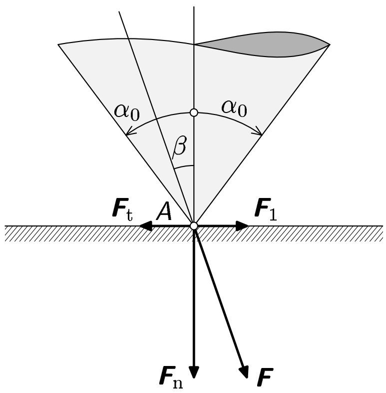
$$F_1 = F \sin\beta \leq f_0 F_\mathrm{n} = f_0 F \cos\beta,$$

nebude se těleso pohybovat. Tuto podmínku můžeme psát ve tvaru

$$\mathrm{tg}\,\beta \leq f_0 = \mathrm{tg}\,\alpha_0,$$

kde jsme zavedli úhel tření α_0 podle (4). Bude-li tedy

$$\beta \leq \alpha_0,$$



Obr. 4. Kužel tření

těleso se nebude pohybovat. Vyjádřeno geometricky: k pohybu nedojde, bude-li nositelka síly $\boldsymbol{F}$ procházet vnitřkem nebo v mezním případě pláštěm kužele o vrcholovém úhlu $2\alpha_0$, který je opsán kolem normály v místě dotyku A (viz obr. 4). Kužel se nazývá *kužel tření*.

2.3 Smykové (dynamické) tření

Při pokusech na zařízeních popsaných na obrázcích 1 a 2 můžeme zjistit, že po uvedení tělesa do pohybu je síla potřebná k udržení jeho rovnoměrného přímočarého pohybu menší než popisuje vztah (3). Jev se nazývá *smykové (dynamické) tření* a tečná síla, která se při něm projevuje se nazývá *síla smykového tření*. Můžeme ji charakterizovat jako mechanický odpor, který vzniká ve stykové ploše dotýkajících a pohybujících se pevných těles přitlačovaných k sobě určitou silou. Děj provází zahřívání stykových ploch, elektrování těles, mechanické porušování stykových ploch apod. Důsledkem těchto doprovodných jevů je úbytek (ztráta) mechanické energie při smykovém tření.

Pro sílu smykového tření můžeme psát

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{t} = -f F_\mathrm{n} \boldsymbol{v}^0, \tag{6}$$

kde $\boldsymbol{v}^0$ je jednotkový vektor ve směru pohybu a f je *součinitel smykového tření*, který obdobně jako f_0 závisí na materiálech stýkajících se těles, na drsnosti jejich povrchů. Můžeme jej určit experimentálně na tribometru (obr. 2) pomocí úhlu α, při kterém se těleso bude pohybovat stálou rychlostí. Za stejných podmínek vzájemného styku těles platí nerovnost

$$f = \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \alpha_0 = f_0. \tag{7}$$

Součinitel f a úhel α pro některé látky můžeme najít v tabulce 1 na konci textu společně s jejich hodnotami pro klidové tření.

Z experimentů vyplývá, že součinitel smykového tření (7), resp. síla (6), nezávisí na velikosti plochy stýkajících se těles ani na rychlosti jejich vzájemného pohybu. To ovšem znamená, že síla (6) nezávisí ani na změně rychlosti, tedy na zrychlení. Tím je nezávislá rovněž na silách působících ve směru pohybu.

Součinitel smykového tření lze ovšem považovat za konstantní jen v jistém rozmezí rychlostí a normálové síly. Ve skutečnosti je $f = f(v, F_\mathrm{n})$, přičemž tato závislost může být významná při velkých rychlostech a silách.

Druhotným efektem při tření je zahřívání stýkajících se ploch v důsledku disipace (rozptylu) mechanické energie. Není-li tření suché, je-li tedy mezi styčnými plochami viskózní kapalina (mazivo), zmenšuje se zahříváním jeho viskozita a třecí síla se zmenšuje. Může jít také o pružné plastické chování materiálu stýkajících se ploch. Popsané děje mohou mít za následek např. zmenšení účinku brzd automobilu (nebo jejich úplné selhání) při dlouhotrvajícím brzdění (při sjíždění táhlého kopce musí těžké automobily brzdit motorem).

Vlastnosti smykového tření poprvé popsal francouzský fyzik Ch. A. Coulomb (1736–1806), a proto se smykové tření také někdy nazývá *Coulombovo tření*.

Naše dosavadní úvahy o tření byly založeny jen na experimentálních poznatcích a jeho příčinu jsme připisovali větším či menším nerovnostem (drsnosti) stýkajících se ploch a druhu materiálu těchto ploch. To byl makroskopický pohled na jev.

Fyzikální podstata tření je však mnohem složitější, neboť síly tření mají elektromagnetickou povahu, jejíž příčiny je třeba hledat v molekulách, resp. atomech, stýkajících se látek. Nerovnosti styčných ploch se na úrovni atomů projevují v nepravidelnostech jejich uspořádání (ve shlucích). Ve stýkajících se plochách těles existuje mnoho styčných plošek, v nichž se atomy silněji vzájemně přitahují (resp. váží) než v jiných místech. Při smyku těles vzniká v těchto místech deformace shluků atomů, poté se atomy vzájemně odtrhnou a dochází k jejich kmitání, to vyžaduje energii. Proces se projeví spotřebou (úbytkem) makroskopické mechanické energie (jako záporné práce třecí síly při posunu tělesa). Úbytek mechanické energie se pak projeví vzrůstem kinetické energie atomů resp. molekul, zvětší se vnitřní energie tělesa a podložky, obojí se zahřeje. Protože popsaná vazba mezi atomy na styčné ploše se bude zvětšovat s přítlačnou silou $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$, je síla tření úměrná této síle.

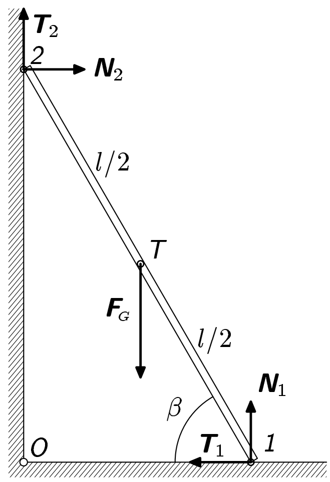
Příklad 1 – tyč opřená o zeď

Uvažujte homogenní tyč opřenou o vodorovnou a svislou stěnu. Součinitel klidového tření uvažujte v obou místech dotyku stejný $f_0 = 0{,}20$. Vypočtěte pro jaký nejmenší úhel sklonu β, měřený od vodorovné roviny, tyč ještě nesklouzne.

Řešení

Na tyč působí kromě její tíhy $\boldsymbol{F}_G$ také reakce $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ v bodech dotyku s vodorovnou a svislou stěnou. V důsledku existence klidového tření nejsou tyto síly kolmé na stěny, nýbrž mají vedle normálových složek $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{N}_2$ ještě tečné složky $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$, které v mezním případě, kdy ještě nedojde ke sklouznutí, nabývají velikostí $T_1 = f_0 N_1$, $T_2 = f_0 N_2$ (viz obr. 5).

Statická rovnováha soustavy vyžaduje, aby součet sil ve vodorovném a svislém směru byl nulový, a aby součet momentů k libovolnému bodu byl nulový. Zvolíme-li O za momentový bod, musí platit



Obr. 5. K příkladu 1 (tyč opřená o zeď)

$$N_2 - f_0 N_1 = 0,$$

$$N_1 + f_0 N_2 - F_G = 0,$$

$$N_1 l \cos\beta - N_2 l \sin\beta - \frac{F_G}{2}\cos\beta = 0.$$

Vypočteme-li z prvních dvou rovnic N_1 a N_2 a dosadíme-li do třetí rovnice, dostaneme po úpravě výsledek

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{1 - f_0^2}{2f_0} = 67{,}4^\circ.$$

Příklad 2 – lyžař

Lyžař startuje z klidu a sjíždí kopec o výšce h, přičemž vodorovná vzdálenost od vrcholu k patě kopce je d. Během jízdy se neodpichuje ani nebrzdí a jeho lyže jsou v neustálém styku se sněhem. Součinitel smykového tření mezi lyžemi a sněhem je f. Jakou vzdálenost s lyžař ještě urazí po rovině po tom, co sjede k patě onoho kopce? Tvar svahu neznáte, jen víte, že stále klesá.

Řešení

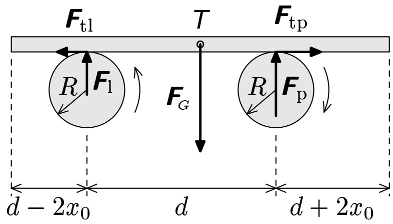
Mechanická energie lyžaře na začátku, když je ještě v klidu, je $E = mgh$. Úbytek mechanické energie během pohybu je roven práci, kterou spotřebuje třecí síla. Element této práce v místě, kde má kopec sklon α, je $\Delta W = F_t \Delta r$, kde F_t je třecí síla a Δr je elementární posunutí ve směru pohybu (a tudíž i ve směru třecí síly). Platí

$$F_t = mgf \cos\alpha,$$
$$\Delta r = \frac{\Delta x}{\cos\alpha},$$

kde Δx je posunutí ve vodorovném směru. Po dosazení dostáváme pro element práce $\Delta W = mgf\Delta x$. Posune-li se tedy lyžař ve vodorovném směru o vzdálenost x, spotřebuje třecí síla práci $W = mgfx$, položíme-li toto do rovnosti se změnou mechanické energie, dostaneme pro maximální posunutí ve vodorovném směru $x = h/f$. Po rovině ujede tedy ještě vzdálenost $s = h/f - d$ (protože $s > 0$, musí být $h > fd$; pro $h \leq fd$ se lyžař zastaví někde na svahu nebo se vůbec nerozjede). Důležitý je zde poznatek, že práce třecí síly nezávisí na tvaru svahu.

Příklad 3 – deska na dvou protiběžných válcích

Dva stejné válce o poloměru R, jejichž osy jsou rovnoběžné a leží ve vodorovné rovině ve vzdálenosti d, rotují opačnými směry úhlovou rychlostí ω (pravý válec v kladném směru). Na tyto válce položíme vodorovně desku délky $2d$ o hmotnosti m tak, že přečnívá vpravo o vzdálenost $2x_0$ více než vlevo (obr.6). Mezi deskou a válci je součinitel smykového tření f. Popište pohyb desky. Valivý odpor zanedbejte.



Obr. 6. K příkladu 3 — deska na dvou protiběžných válcích

Řešení

Na desku působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{g}$ s působištěm v těžišti desky, dále reakce sil $\boldsymbol{F}_p$ a $\boldsymbol{F}_l$, kterými ona sama působí na válce, a třecí síly $\boldsymbol{F}_{tp}$, $\boldsymbol{F}_{tl}$. Ve svislém směru se deska nepohybuje, ani se neotáčí, z toho můžeme napsat rovnováhu sil a jejich momentů (x je výchylka ze symetrické polohy)

$$F_p + F_l = F_G \qquad F_G\left(\frac{d}{2} + x\right) = F_p a.$$

Z tohoto již můžeme vyjádřit velikosti sil $\boldsymbol{F}_p$ a $\boldsymbol{F}_l$:

$$F_p = mg\frac{d + 2x}{2d} \qquad F_l = mg\frac{d - 2x}{2d}.$$

Nyní předpokládejme, že se deska pohybuje pomaleji než obvodovou rychlostí válce $v_m = \omega R$, a tedy válce na ni působí třecími silami o velikostech

$$F_{tp} = fmg\frac{d + 2x}{2d} \qquad F_{tl} = fmg\frac{d - 2x}{2d}.$$

Napíšeme pohybovou rovnici desky

$$ma = F_{\mathrm{tl}} - F_{\mathrm{tp}} = -\frac{2fmg}{d}x,$$

což je rovnice analogická pohybové rovnici harmonických kmitů, její řešení je

$$x = x_0 \cos\sqrt{\frac{2fg}{d}}\,t.$$

Deska se tedy chová jako harmonický oscilátor s periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{2fg}}.$$

Podívejme se nyní, co se děje, není-li splněna podmínka, že se deska stále pohybuje pomaleji než v_{m}, tj. když

$$x_0\sqrt{\frac{2fg}{d}} > v_{\mathrm{m}} = \omega R.$$

Nechť je tedy deska vychýlena z rovnovážné polohy o x_0, zrychluje, až dosáhne rychlosti v_{m}. V tom okamžiku je její relativní rychlost vůči pravému válci rovna nule a tento válec na desku nepůsobí žádnou silou ve vodorovném směru. Deska je zpomalena třecí silou levého válce, ale jen nepatrně, neboť okamžitě začne působit třecí síla na pravém válci a jelikož deska ještě neprošla rovnovážnou polohou, výslednice opět desku urychlí na v_{m}. Deska se tedy až do průchodu rovnovážnou polohou bude pohybovat rychlostí v_{m}. Po průchodu rovnovážnou polohou bude již výslednice desku zpomalovat a dále se bude pohybovat jako harmonický oscilátor se stejnou periodou jako v případě předchozím ale s amplitudou

$$x_{\mathrm{m}} = \omega R\sqrt{\frac{d}{2fg}}, \quad \text{neboť} \quad v_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{2fg}{d}}x_{\mathrm{m}}.$$

Rychlosti v_{m} deska dosáhne tedy již jen při průchodu rovnovážnou polohou, což pohyb neovlivní.

Zajímavý na tomto příkladě je fakt, že třecí síla zde pohyb nezpomaluje ani netlumí, nýbrž jej způsobuje.

3 Smykové tření v ložiskách

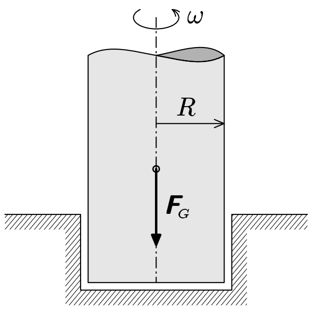
Nyní se budeme zabývat rotačním pohybem tělesa, které je uchyceno na hřídeli. Konce hřídele (čepy) jsou uložené v kluzných ložiskách, ve kterých se mohou otáčet. Čepy podle směru zatížení dělíme na axiální a radiální. Axiální čepy jsou namáhané silou působící v ose hřídele, radiální čepy jsou namáhané silou působící kolmo na osu hřídele. V ploše dotyku mezi čepem a kluzným ložiskem vzniká při otáčení hřídele smykové tření. Toto tření způsobuje moment sil, který brzdí otáčení hřídele.

3.1 Axiální čepy

Axiální čepy jsou namáhané silou působící v ose hřídele. Označíme f součinitel smykového tření mezi čepem a kluzným ložiskem.

Uvažme rovinný čep (na válcové hřídeli) o poloměru R na obr. 7, který se otáčí úhlovou rychlostí ω. Tlak na rovinnou plochu dotyku čepu a ložiska předpokládáme konstantní

$$p = \frac{F_G}{\pi R^2} = \text{konst.}$$



Obr. 7. Axiální čep

Uvažme mezikruží o vnitřním poloměru r a vnějším $r + \Delta r$, kde Δr je malý přírůstek poloměru. Plocha tohoto mezikruží je $\Delta S = 2\pi r \Delta r$. Tření na této plošce způsobuje brzdný moment o velikosti

$$\Delta M = r f p \Delta S = \frac{2 f F_G}{R^2} r^2 \Delta r.$$

Je-li změna brzdného momentu úměrná druhé mocnině poloměru krát jeho změně, je celkový moment úměrný třetině celkového poloměru čepu. (K tomuto výsledku lze dospět pomocí matematického procesu, kterému se říká integrace.* Prozatím ho můžete brát jako fakt.) Celkový brzdný moment síly způsobený třením v tomto ložisku tedy je

$$M = \frac{2}{3} f F_G R.$$

*) Od konečných přírůstků ΔM přejdeme k diferenciálům $\mathrm{d}M$ a provedeme integraci pro r v mezích od $r = 0$ (střed čepu) do $r = R$ (okraj čepu):

$$M = \int_0^M \mathrm{d}M = \frac{2fF_G}{R^2} \int_0^R r^2 \,\mathrm{d}r = \frac{2fF_G}{R^2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{2}{3} f F_G R.$$

3.2 Radiální čepy

Radiální čepy jsou namáhané silou působící kolmo na osu hřídele. Uvažujme válcový čep o poloměru R, který je uložen v ložisku o nepatrně větším poloměru r_0. Předpokládejme, že zatěžující síla $\boldsymbol{F}_G$ působí v rovině kolmé na osu hřídele. Když se hřídel začne otáčet, čep se odvalí do polohy, ve které spojnice jeho středu a bodu dotyku s ložiskem svírá se svislicí úhel φ (viz obr. 8). V této poloze pak čep prokluzuje po ploše ložiska. Působí na něj kromě zatěžující síly ještě reakce ložiska $\boldsymbol{F}_\mathrm{r}$ a třecí síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ úměrná součiniteli smykového tření a reakci ložiska, tj. $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{r}$. Tyto síly musí být v rovnováze, neboť těžiště čepu se již dále nepohybuje, tedy

$$-F_G + F_\mathrm{r}\cos\varphi + fF_\mathrm{r}\sin\varphi = 0, \qquad fF_\mathrm{r}\cos\varphi - F_\mathrm{r}\sin\varphi = 0.$$

Z těchto rovnic vyloučíme úhel φ a dostaneme vztah mezi silami

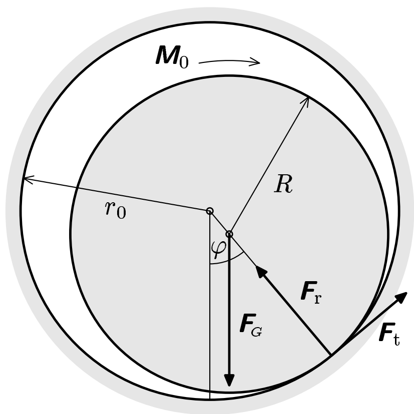
$$F_G = F_\mathrm{r}\sqrt{1+f^2},$$

z čehož pro brzdný moment třecí síly F_t máme

$$M = RF_\mathrm{t} = RfF_\mathrm{r} = \frac{fRF_G}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Má-li se čep otáčet, musí na něj působit hnací moment síly $\boldsymbol{M}_0$ (obr. 8). Bude-li $M_0 = M$, bude otáčení rovnoměrné.

Obdobně bychom výpočet vedli i pro jiné druhy čepů, např. ve tvaru komolých kuželů.



Obr. 8. Radiální čep

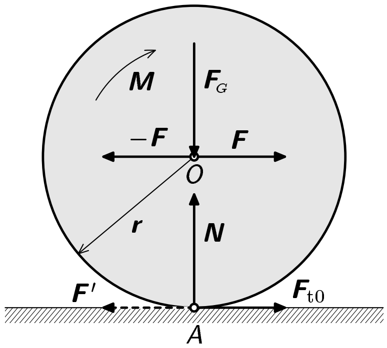
4 Valení rotačního tělesa

4.1 Valení hnaného rotačního tělesa po vodorovné podložce

Nutnou podmínkou pro to, aby došlo k čistému valení rotačního tělesa, tj. k *valení bez smyku*, je existence klidového (statického) tření mezi tělesem a podložkou. Klidové tření umožňuje přenos hnací síly např. z motoru automobilu přes odvalující se kolo a způsobuje tak řízený pohyb automobilu po vozovce.

Uvažujme hnací kolo dopravního prostředku odvalující se po vodorovné vozovce (podložce) viz obr. 9. V této části předpokládáme, že kolo i podložka jsou tuhé. Vliv deformace kola a podložky na pohyb kola, neboli valivý odpor, probereme až v oddíle 4.3.

Na hnací kolo nechť působí svislá síla $\boldsymbol{F}_G$ (což je odpovídající část tíhové síly dopravního prostředku) a hnací moment síly $\boldsymbol{M}$ od motoru (viz obr. 9). Reakcí podložky na sílu $\boldsymbol{F}_G$ je síla $\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{F}_G$. Účinek hnacího momentu $\boldsymbol{M}$ se v bodě A dotyku s vozovkou projeví silou $\boldsymbol{F}'$ o velikosti $F' = M/r$, kterou hnací kolo tečně působí na vozovku (na obr. 9) je znázorněna čárkovaně, neboť tato síla nepůsobí na těleso). Síla $\boldsymbol{F}'$ rozhoduje o tom, zda dojde či nedojde ke smyku kola. Reakce na sílu $\boldsymbol{F}'$ je totiž síla klidového tření $\boldsymbol{F}_t$, kterou působí vozovka na kolo. Její mezní velikost je $F_{t0} = f_0 F_G$; na obr. 9 je naznačena mezní síla $\boldsymbol{F}_{t0}$. Má-li se hnané kolo dokonale odvalovat, nemá-li tedy nastat smyk, musí být splněna podmínka $F' \leq f_0 F_G$, neboli



Obr. 9. Hnací kolo dopravního prostředku

$$\frac{M}{r} \leq f_0 F_G, \text{ odkud } M \leq f_0 r F_G. \tag{8}$$

Přeneseme-li sílu $\boldsymbol{F}_{t0}$ do osy O tak, že zde necháme působit dvě síly $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}$ (obr. 9), přičemž $F = F_{t0}$, dostaneme dvojici sil $\boldsymbol{F}_{t0}$, $-\boldsymbol{F}$, jejíž moment je v rovnováze s hnacím momentem $\boldsymbol{M}$ a zbylá síla $\boldsymbol{F}$ je hnací síla uvažovaného kola automobilu. Její mezní velikost tedy je $F = f_0 F_G$.

Z výrazu (8) můžeme analyzovat, na čem závisí velikost hnacího momentu, aby nedocházelo ke smyku. Je to velikost tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ připadající na hnací nápravu a poloměr kola (to jsou konstrukční záležitosti), a pak především velikost součinitele f_0, který je závislý na stavu vozovky a na konstrukci a stavu pneumatik.

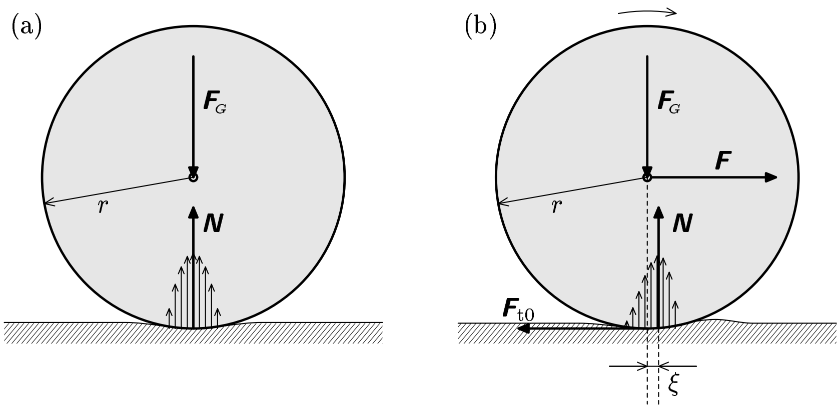
4.2 Valení rotačního tělesa po nakloněné rovině

Uvažujme tuhé homogenní rotační těleso na nakloněné rovině. Aby se těleso odvalovalo, musí mezi ním a rovinou působit síla klidového tření. Řešení problému je závislé na tom, zda budeme požadovat, aby se těleso dokonale odvalovalo (tj. aby vzniklo čisté valení bez smyku) anebo zda nastane mezní stav, kdy se bude těleso odvalovat a současně smýkat. Tento problém je kompletně řešen v textu [16] na str. 35–39 a proto se jím zde zabývat již nebudeme.

4.3 Valivý odpor

V předchozích úvahách jsme předpokládali idealizovaný stav, kdy mezi rotačním tělesem a podložkou je bodový dotyk, resp. dotyk podél úsečky. Skutečná tělesa ovšem nejsou dokonale tuhá a v místě dotyku vzniká deformace tělesa i podložky. Takže již nedochází k dotyku v bodě (u koule) nebo v přímce (u válce), nýbrž v dotykové plošce.

Je-li těleso v klidu, je rozložení tlakových sil v dotykové plošce přibližně takové, jak je naznačeno na obr. 10a, tedy je souměrné kolem osy tělesa. Výslednice $\boldsymbol{N}$ těchto tlakových sil je reakcí podložky a leží na téže nositelce jako tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$. Dojde-li nyní vlivem tažné síly $\boldsymbol{F}$ k valení, vznikne nesouměrná deformace tělesa a podložky a v důsledku toho nesouměrné rozložení tlaků, jak je naznačeno na obr. 10b. Výslednice $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$ nyní již neleží na nositelce tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$, nýbrž je posunuta o jistou malou vzdálenost ξ ve směru valení, která se nazývá *rameno valivého odporu*. V dotykové plošce s podložkou bude na kolo v tečném směru působit síla klidového tření (na obr. 10 je naznačen mezní případ $\boldsymbol{F}_\mathrm{t0}$).



Obr. 10. Rozložení tlakových sil v klidu (a) a při odvalování (b)

Pro rovnoměrné (nezrychlené) valení musí opět platit rovnováha sil a jejich momentů, neboli

$$F - F_{\mathrm{t0}} = 0, \quad N - F_G = 0, \quad \xi N - rF = 0.$$

Odtud pro rameno valivého odporu vychází

$$\xi = \frac{F}{N} r = \frac{F}{F_G} r. \tag{9}$$

Proti valení tělesa působí tedy *valivý odpor* vyjádřený *momentem valivého odporu*

$$M_{\mathrm{v}} = \xi F_{\mathrm{n}}.$$

Rameno valivého odporu nemůže být libovolně velké. Aby nedocházelo při valení ke smyku, musí být tažná síla $F \leq f_0 F_{\mathrm{n}}$. Pak po dosazení do (9) dostaneme

$$\xi \leq f_0 r.$$

Není-li splněna tato podmínka, není těleso schopné se odvalovat, nýbrž se smýká.

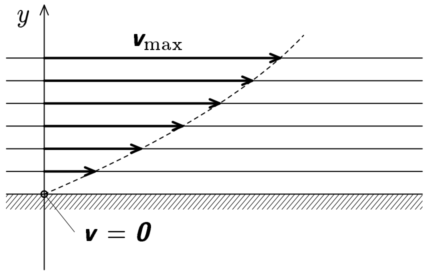
Při vhodné volbě materiálu rotačních těles a podložek mohou být ramena valivého odporu malá a tím je i malý moment valivého odporu. Odpor tělesa proti pohybu je pak mnohem menší než při smýkání. Pro železo na železe (kola vlaku) je $\xi \approx 5 \cdot 10^{-5}$ m, pro kalenou ocel (kuličky v ložiskách) je $\xi \approx 5 \cdot 10^{-6}$ m. Pro dosažení malých valivých odporů silničních kolových vozidel je nutné dbát na dostatečný tlak vzduchu v pneumatikách.

5 Odporové síly při proudění reálných tekutin

5.1 Vnitřní tření tekutiny

Při pohybu reálných tekutin, tj. látek ve skupenství kapalném nebo plynném, se uplatňují třecí síly, které vznikají mezi částicemi tekutiny při jejich vzájemném pohybu. Uvažujme nejprve o laminárním proudění tekutiny (viz odstavec 5.2). Proudí-li např. voda potrubím, pak vrstvička vody těsně přiléhající k jeho stěně lne k povrchu potrubí, a je tedy v klidu.

Se vzrůstající vzdáleností od stěn rychlost vzrůstá a největší hodnoty nabude v ose trubice. Obdobně tomu bude např. při proudění kapaliny otevřeným korytem (viz obr. 11). Rychlost proudění se v uvedených případech spojitě mění od nuly až do maxima a přitom dochází ke tření mezi jednotlivými vrstvami tekutiny. Tento jev se nazývá *vnitřní tření* a projevuje se působením tečného napětí τ mezi jednotlivými vrstvami tekutiny (obr. 12). Tečné napětí obecně definujeme vztahem

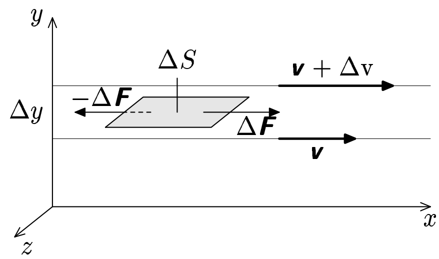


Obr. 11. Proudění kapaliny otevřeným korytem

$$\tau = \frac{\Delta F}{\Delta S},$$

kde ΔF je velikost elementu síly působící v tečné rovině elementu plochy ΔS.

U proudící tekutiny jsou plochy, v nichž působí tečné napětí, vrstvami tekutiny, které se vůči sobě posouvají proměnnou rychlostí $\boldsymbol{v}$ (viz obr. 12). Jev vnitřního tření pro případ kapalin popsal roku 1647 již I. Newton (1642–1727). Vyslovil hypotézu, že tečné napětí je přímo úměrné gradientu $\Delta v/\Delta y$ rychlosti. Zde Δv je přírůstek rychlosti mezi dvěma sousedními vrstvami tekutiny, které jsou od sebe vzdáleny o element Δy (obr. 12). Můžeme to vyjádřit rovnicí



Obr. 12. Mezi vrstvami tekutiny, které se vůči sobě posouvají různou rychlostí, vzniká tečné napětí $\tau = \Delta F/\Delta S$

$$\tau = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y}, \qquad (10)$$

kde konstanta úměrnosti η se nazývá *dynamická viskozita.* Její jednotkou je Pa·s (pascal sekunda) = N·s·m^{-2} = = m^{-1}·kg·s^{-1}. Tekutina má dynamickou viskozitu 1 Pa·s, právě když v ní při laminárním proudění, při němž napříč proudu je gradient rychlosti o velikosti právě $1\,\mathrm{s}^{-1}$, vzniká v každém jejím bodě tečné napětí 1 Pa. Vedle dynamické viskozity se definuje také *kinematická viskozita* vztahem

$$\nu = \frac{\eta}{\varrho},$$

kde ϱ je hustota tekutiny. Její jednotkou je $\mathrm{m}^2{\cdot}\mathrm{s}^{-1}$.

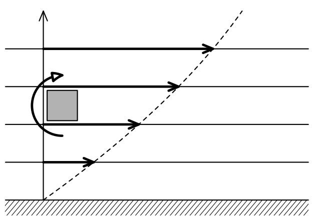
Z experimentálních poznatků vyplývá, že u většiny tekutin je Newtonův vztah (10) splněn. U některých tekutin, které obsahují shluky většího počtu molekul, jako jsou koloidní roztoky, emulze a suspenze, viskozita závisí na gradientu rychlosti. Tyto tekutiny se označují jako *nenewtonovské*.

Viskozita závisí na teplotě a tlaku v tekutině, s teplotou výrazně klesá. Např. dynamická viskozita vody se při změně teploty z 0 °C na 50 ° zmenší 3,3 krát a při změně z 0 °C na 100 °C 6,3 krát. U glycerínu je tato závislost ještě výraznější — při zvýšení teploty z 0 °C na 100 °C se jeho viskozita zmenší 93,1 krát. Hustota, dynamická viskozita a kinematická viskozita některých tekutin jsou v tabulce 2 na konci textu.

5.2 Proudění laminární a turbulentní

Na proudění reálné tekutiny má podstatný vliv vnitřní tření, které způsobuje, že se při zvětšující se rychlosti mění charakter proudění.

Při proudění tekutiny (např. vody nebo oleje) malou rychlostí jde o uspořádaný pohyb částic tekutiny ve vrstevnatě rozložených proudnicích. Toto proudění se označuje jako laminární („lamina“ je vrstva). Tekutina se při něm nepromíchává a vektory rychlostí tekutiny jsou v uvažovaném průřezu rovnoběžné. I když proudění reálné tekutiny bude laminární, má tendenci přejít na proudění vírové, jak můžeme posoudit z následující úvahy. Představme si malý element kapaliny ve tvaru krychle uvnitř jejího toku (viz obr. 13). Kolem její spodní stěny se v naznačeném případě pohybuje kapalina pomaleji než kolem její horní stěny, a proto vzniká tendence k rotaci elementu v naznačeném směru.



Obr. 13. Vznik turbulentního proudění

Laminární proudění tekutiny se v důsledku výše popsaného jevu může udržet jen do určité kritické střední rychlosti. Při jejím překročení začne převládat rušivý vliv tendence ke vzniku vírů a charakter proudění se změní z laminárního na *proudění turbulentní.* Při něm kromě hlavního proudění (převážně popsatelného laminárně) existuje ještě sekundární proudění vírového, zdánlivě neuspořádaného charakteru. Při tomto proudění se rychlost jednotlivých částic nepravidelně mění, přičemž původně stacionární proudění se stane prouděním nestacionárním, protože jednotlivé částice nemají stálou rychlost co do směru a velikosti. Přesto lze např. zjistit průměrné rozložení rychlosti v příčném průřezu proudící tekutiny. V důsledku vířivého proudění se změní rychlostní profil tekutiny (pojednáme o něm na příkladě vazké tekutiny ve válcové trubici až ve druhém díle).

Charakter proudění tekutiny se dá posoudit užitím *Reynoldsova čísla*

$$\mathcal{R}e = \frac{vd}{\nu},$$

kde v označuje velikost střední rychlosti toku, d charakteristickou délku (např. průměr kruhového průřezu trubice) a ν kinematickou viskozitu. K tomuto číslu dospěl Osbourne Reynolds (1842–1912).

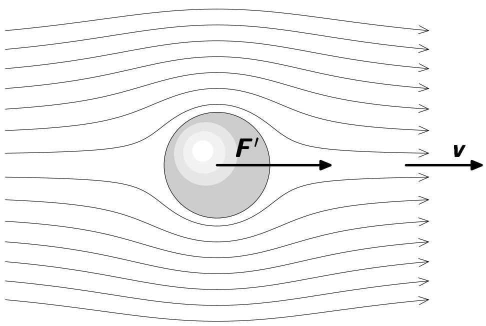
Kritická hodnota Reynoldsova čísla je $\mathcal{R}e_{\mathrm{kr}} \approx 2300$. Pro $\mathcal{R}e < \mathcal{R}e_{\mathrm{kr}}$ je proudění laminární a pro $\mathcal{R}e \geq \mathcal{R}e_{\mathrm{kr}}$ je proudění turbulentní. Tuto hranici je však třeba brát jen orientačně, protože turbulentní proudění je velmi složitý jev. Lze vytvořit speciální podmínky, při nichž se dá dosáhnout laminárního proudění i při mnohem větších hodnotách $\mathcal{R}e$. Naopak turbulentní proudění může vzniknout i pro $\mathcal{R}e \leq \mathcal{R}e_{\mathrm{kr}}$. Proto používání Reynoldsova čísla při posuzování proudění v praxi vyžaduje značnou zkušenost.

V teoretické literatuře (viz např. [4]) se u trubic bere za charakteristickou délku její poloměr. Pak kritická hodnota Reynoldsova čísla je právě poloviční.

6 Odporová síla při obtékání pevných těles reálnou tekutinou

6.1 Odporová síla při laminárním obtékání

Obtékání pevných těles reálnou tekutinou je velmi složitý jev, při kterém dochází k relativnímu pohybu těles a tekutiny. Při obtékání vznikají *odporové síly*, které působí proti relativnímu pohybu tělesa v tekutině.



Obr. 14. Laminární obtékání koule

Je-li relativní rychlost tekutiny malá a nemá-li obtékané těleso ostré hrany, je proudění tekutiny v okolí tělesa laminární (obr. 14). Zde je koule laminárně obtékána tekutinou rychlostí $\boldsymbol{v}$ a tekutina kouli strhává silou $\boldsymbol{F}'$. Bule-li tekutina v klidu a budeme-li koulí pohybovat rychlostí $\boldsymbol{v}$, bude tekutina na kouli působit odporovou silou $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{F}'$. Při laminárním proudění je jedinou příčinou odporové síly $\boldsymbol{F}$ vnitřní tření v tekutině, a jak ukazují teoretické výpočty i experimenty, je velikost odporové síly v těchto případech úměrná prvé mocnině rychlosti. Lze tedy psát

$$\boldsymbol{F} = -A\boldsymbol{v},$$

kde konstanta A závisí na tvaru tělesa a vlastnostech (viskozitě) kapaliny. Jak ukazují řešení linearizovaných Navierových-Stokesových rovnic (rovnice popisující proudění kapaliny, viz např. [4], str. 655–661), pro pohyb koule o poloměru r velmi malou rychlostí $\boldsymbol{v}$ v neomezeném prostředí o dynamické viskozitě η je $A = 6\pi\eta r$ a odporová síla je

$$\boldsymbol{F} = -6\pi\eta r\boldsymbol{v}. \tag{11}$$

Tento vztah poprvé odvodil r. 1851 G. G. Stokes (1819–1903) a nazývá se *Stokesův vzorec.*

6.2 Odporová síla při turbulentním proudění

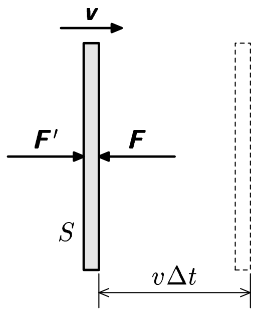
Při zvětšení rychlosti obtékání nad jistou hodnotu se laminární proudění změní na turbulentní, při kterém se za tělesem tvoří víry. Tím se zcela změní charakter silového působení tekutiny na obtékané těleso.

Jestliže při velmi malých rychlostech způsobilo pohybující se těleso jenom tření vrstev tekutiny, když do ní postupně pronikalo, musí těleso při větších rychlostech odstraňovat tekutinu, která stojí před ním. Části této tekutiny uděluje rychlost, kterou se samo pohybuje. Problém příslušné odporové síly řešil již I. Newton.

Newton uvažoval rovinnou desku o ploše S, která se pohybuje v tekutině o hustotě ϱ relativní ustálenou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Přitom deska uvádí do pohybu tekutinu rychlostí $\boldsymbol{v}$ (viz obr. 15). Za elementární čas Δt deska opíše objem $Sv\Delta t$, a tak (v idealizované zjednodušené úvaze) uvede do pohybu tekutinu o hmotnosti $\Delta m = \varrho Sv\Delta t$ a udělí jí element hybnosti

$$\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}\Delta m = v\boldsymbol{v}^0\Delta m = \varrho Sv^2\boldsymbol{v}^0\Delta t,$$

kde $\boldsymbol{v}^0$ je jednotkový vektor ve směru rychlosti.



Obr. 15. Pohybující se deska uvádí do pohybu i tekutinu před sebou

Abychom desku udrželi v pohybu rychlostí $\boldsymbol{v}$ musíme na ni působit silou

$$\boldsymbol{F}' = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t} = -\boldsymbol{F},$$

kde $\boldsymbol{F}$ je reakce tekutiny na sílu $\boldsymbol{F}'$, tedy odpor tekutiny při pohybu desky. Pak

$$\boldsymbol{F} = -\varrho Sv^2\boldsymbol{v}^0.$$

Protože úvaha, na základě které jsme provedli výpočet, byla zidealizovaná, zavádíme do výrazu pro odpor tekutiny číselný faktor C, tzv. *součinitel odporu.* Výraz se píše ve tvaru

$$\boldsymbol{F} = -\frac{1}{2}C\varrho Sv^2\boldsymbol{v}^0 \qquad (12)$$

a nazývá se *Newtonův vzorec.* Součinitel odporu C závisí na tvaru tělesa, koriguje objem tekutiny skutečně uvedené do pohybu a určuje se experimentálně. Jeho hodnoty pro různé tvary těles jsou uvedeny v tabulce 3 na konci textu. Plocha S je obsah průřezu tělesa kolmého ke směru rychlosti (někdy se označuje jako obsah „stínového“ průřezu tělesa). Pro kouli je $S = \pi r^2$ a $C = 0{,}48$ ($\approx 1/2$).

K výrazu (12) můžeme dospět i alternativní úvahou o spotřebovaném výkonu síly $\boldsymbol{F}$, tj. $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$, který se projeví vzrůstem kinetické energie tekutiny za jednotku času. Zahrneme-li do úvahy již tvarový faktor, tj. součinitel odporu C, dostaneme pro velikost odporové síly vztah

$$Fv = \frac{1}{2}\frac{\Delta m}{\Delta t}v^2 = \frac{1}{2}C\varrho Sv \cdot v^2.$$

Odtud již plyne (po doplnění znaménka mínus a jednotkového vektoru $\boldsymbol{v}^0$) výraz (12).

K odporové síle (12) úměrné druhé mocnině rychlosti je třeba ještě připočítat odporovou sílu, která souvisí s vnitřním třením a je úměrná první mocnině rychlosti. Takže obecněji platí

$$\boldsymbol{F} = -(Av + Bv^2)\boldsymbol{v}^0. \tag{13}$$

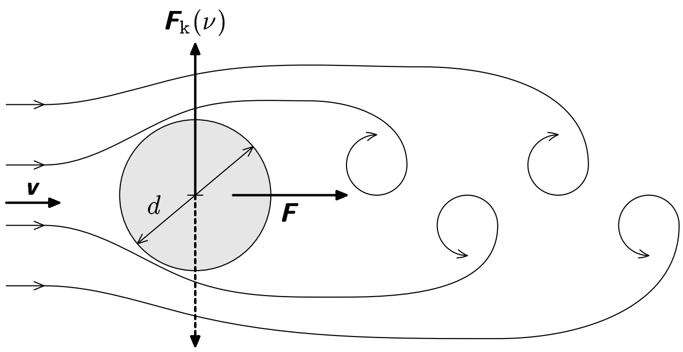
Se vzrůstající rychlostí ovšem vliv prvního členu slábne a všeobecně se proto využívá jen jednoduššího vztahu (12).

Při obtékání těles se projevuje ještě jiný efekt. Zvětšujeme-li rychlost, začnou se víry, které se vytvářejí za tělesem, odtrhávat střídavě pravidelně po obou stranách tělesa. Vzniká tzv. Karmánova vírová cesta (obr. 16). Tento efekt se projevuje periodicky proměnnými vztlakovými silami $\boldsymbol{F}_\mathrm{k}$. Jejich frekvenci ν pro proudění vzduchu rychlostí $\boldsymbol{v}$ popsal český fyzik F. Strouhal empirickým vztahem (viz [8])

$$\nu = 0{,}185\,\frac{v}{d},$$

kde d je průměr tyče.

Efekt příčných sil můžeme snadno ověřit např. při pohybu ruky vhodnou rychlostí ve vodě v bazénu; síly příčně rozkmitají prsty. Působením těchto sil vzniká příčné kmitání známé jako chvění telefonních drátů ve větru, ale i jako kmitání vysokých komínů a stožárů. Méně je u nás známé kmitání visutých lanových (kabelových) mostů ve větru. Dostane-li se vlivem nevhodné konstrukce mostu frekvence Karmánových vírů do oblasti vlastní frekvence kmitů mostu, dochází k rezonanci. Tato rezonance se stala osudnou např. pro 1500 m dlouhý most u města Takoma ve státě Washington na západním pobřeží USA. Ten se v roce 1940, 4 měsíce po dokončení, dostal při rychlosti větru 65 km·h^{-1} do rezonančních kmitů. Při rezonanci se mostovka vlnila s amplitudou až 5 metrů a kroutila se s úhlovou amplitudou až 45°. Posléze se most zřítil.

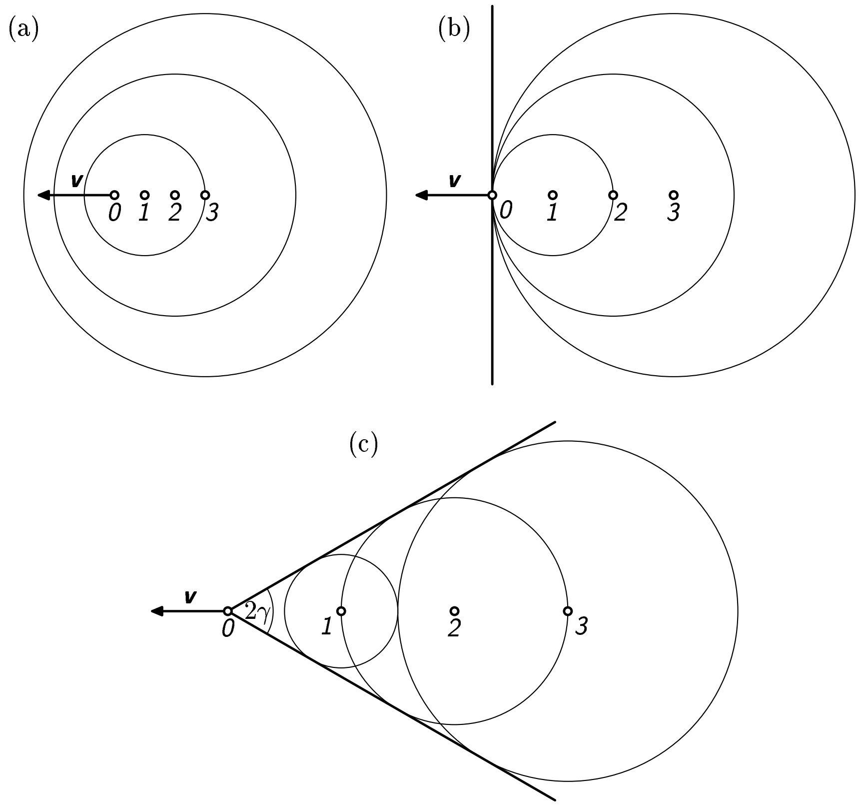


Obr. 16. Karmánova vírová cesta

6.3 Rázová síla (při obtékání tělesa vzduchem)

Platnost kvadratické závislosti (12) odporu vzduchu na rychlosti pohybu je omezena zhruba na rychlosti menší než $250\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Při pohybu těles ve vzduchu vznikají totiž tlakové vlny, které se šíří rychlostí zvuku c_z. Od tělesa pohybujícího se rychlostí $\boldsymbol{v}$ se přitom šíří kulové tlakové vlnoplochy, jejichž poloměr se zvětšuje rychlostí c_z a jejichž střed se posouvá rychlostí $\boldsymbol{v}$. Za doby t, $2t$, $3t$ se tedy středy kulových ploch posunou o vzdálenost vt, $2vt$, $3vt$ a poloměry příslušných kulových ploch budou $c_z t$, $2c_z t$, $3c_z t$. Na obrázku 17 jsou znázorněny tři kvalitativně odlišné případy:

(a) rychlost tělesa je menší než rychlost zvuku ($v = c_z/2$),
(b) mezní případ, kdy je rychlost tělesa rovna rychlosti zvuku,
(c) rychlost tělesa je větší než rychlost zvuku ($v = 2c_z$).



Obr. 17. Šíření tlakových vlnoploch od pohybujícího se tělesa, jejichž obálkou je pro $v > c_z$ tlaková bariéra

Je-li $v \geq c_z$, vzniká tzv. *balistická tlaková vlna*, resp. *tlaková bariéra*, která v případě $v > c_z$, má tvar kužele o vrcholovém úhlu 2γ, přičemž

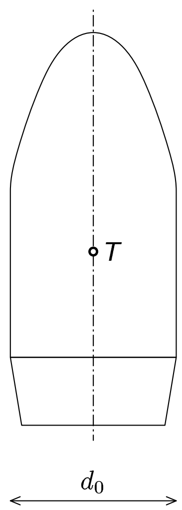
$$\sin\gamma = \frac{c_z}{v} = \frac{1}{M},$$

kde

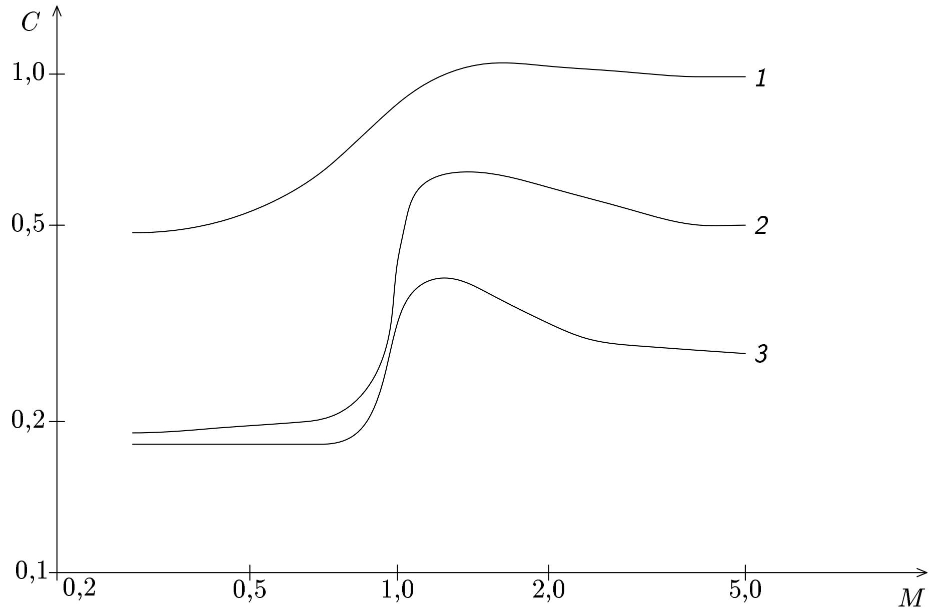
$$M = \frac{v}{c_z} \tag{14}$$

je tzv. *Machovo číslo.* V čele balistické vlny roste tlak, a tím i hustota vzduchu, skokem. Přetlak na špici dosahuje pro $M = 2{,}0$ hodnoty asi 0,50 MPa a pro $M = 3{,}0$ asi 1,1 MPa. Balistická vlna vzniká i při pohybu nadzvukových letadel a projevuje se známým třeskem.

Když rychlost tělesa překračuje rychlost zvuku ve vzduchu, odpor vzduchu náhle stoupne, neboť zhuštění vzduchu v čele pohybujícího se tělesa (tlaková bariéra) se při zvukové nebo nadzvukové rychlosti nestačí vyrovnávat do okolí. Výraz pro odpor vzduchu se ponechává ve tvaru (12), ve kterém však součinitel odporu C již není konstanta nýbrž funkce Machova čísla (14). Tuto závislost převzatou z [9] a [13], vidíme pro některé případy na obr. 19. Křivka 1 platí pro kouli, křivka 2 pro tzv. *normální střelu*, jejíž tvar je nakreslen na obr. 18, a křivka 3 pro dalekonosné střely. Na obr. 18 je d_0 ráže střely a T její těžiště.



Obr. 18. Tvar tzv. *normální střely*



Obr. 19. Závislost součinitele odporu C na velikosti Machova čísla M pro kouli (1), normální střelu (2) a dalekonosnou střelu (3). Měřítko grafu je logaritmické

7 Přehled odporových sil

Nyní můžeme ve stručném shrnutí posoudit závislost odporových sil na rychlosti v souvislosti se vztahy (1) a (2). Tato závislost je vyjádřena exponentem n, případně funkcí $f(v)$.

a) *Tření mezi pevnými tělesy, Coulombovo tření*
Podle vztahů (3) a (6) je nezávislé na rychlosti, $n = 0$.

b) *Laminární obtékání pevných těles*
Stokesův vzorec (11), odporová síla je lineární funkcí rychlosti, $n = 1$.

c) *Turbulentní obtékání pevných těles*
Newtonův vzorec (12), odporová síla je kvadratickou funkcí rychlosti, $n = 2$. V přesnějším vyjádření (13) jde o funkční závislost (1), v daném případě o polynom 2. stupně.

d) *Obtékání těles rychlostí srovnatelnou s rychlostí zvuku*
Rázové síly. Na základě empiricky získaných výsledků pro součinitele odporu C je nutné použít funkci $f(v)$ ve výrazu (1). Pro určité speciální případy lze tvar $f(v)$ nalézt např. v [9] jako polynom n-tého stupně.

Příklad 4 – mezní rychlost při pádu

Při pádu tělesa ve vzduchu se působením tíhového pole zvětšuje rychlost tělesa, a tím současně i odporová síla působící proti síle tíhové. V rovnovážném stavu pohybu se obě síly vyrovnají a rychlost tělesa se již nezvětšuje — jde o tzv. *mezní ustálenou rychlost.*

Vypočtěte mezní ustálenou rychlost pro pád koule o poloměru r a o hustotě ϱ ve vzduchu o viskozitě η a hustotě ϱ_{vz}, a to

a) při laminárním obtékání (v_{l}),
b) při turbulentním obtékání (v_{t}).
c) Výsledky posuďte numericky pro vodní kapičku o poloměru $r = 1{,}0\,\mathrm{mm}$ a rychlosti porovnejte s rychlostí v_0 jejího pádu ve vakuu z výšky $1\,500\,\mathrm{m}$. Při řešení neuvažujte vztlakovou sílu ve vzduchu.

Řešení

a) Rovnováha nastane pro

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g - 6\pi\eta r v_{\mathrm{l}} = 0.$$

Mezní rychlost při laminárním obtékání je

$$v_{\mathrm{l}} = \frac{2r^2\varrho g}{9\eta}.$$

b) Analogicky platí

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g - \frac{1}{2} C S \varrho_{\mathrm{vz}} v_{\mathrm{t}}^2$$

a mezní rychlost při turbulentním obtékání je

$$v_{\mathrm{t}} = \sqrt{\frac{8r\varrho g}{3C\varrho_{\mathrm{vz}}}}.$$

c) $v_{\mathrm{l}} = 127\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}, v_{\mathrm{t}} = 6{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}, v_0 = \sqrt{2gh} = 172\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Poznámka: Velký rozptyl výsledků ukazuje na nesplnění předpokladů, za kterých byly vztahy pro výpočet odporových sil odvozeny. Stokesův vzorec nelze použít, protože při těchto vypočtených rychlostech již proudění není laminární. Výsledek pro vakuum dává rychlost vzrůstající s výškou do hodnot, které by v případě deště byly doslova vražedné. Správné je použití Newtonova vzorce, tedy řešení ad b). Podle literatury o meteorologii lze Stokesův vztah použít pro kapičky mrholení o průměru jen $r < 20\,\mu\mathrm{m}$.

Příklad 5 – zpomalující částice v magnetickém poli

Nabitá částice vlétá do prostředí, ve kterém na ni působí odporová síla. Směr této síly je opačný, než je směr rychlosti částice, a budeme předpokládat, že její velikost je přímo úměrná rychlosti. Než se částice zastaví, urazí v prostředí dráhu $l_1 = 10\,\mathrm{cm}$. Je-li v prostředí navíc homogenní magnetické pole kolmé na směr rychlosti částice, pak se částice zastaví ve vzdálenosti $l_2 = 6{,}0\,\mathrm{cm}$ od místa, kde do prostředí vstoupila. V jaké vzdálenosti l_3 od místa, kde do prostředí vstoupila, se částice zastaví, bude-li mít magnetické pole indukci poloviční velikosti?

Řešení

V magnetickém poli na částici působí dvě síly. Proti směru pohybu působí třecí síla $F_{\mathrm{t}} = kv$, kde v je rychlost částice a k je blíže neurčená konstanta. Kolmo na směr pohybu působí síla magnetická $F_{\mathrm{m}} = qvB$, kde q je náboj částice a B velikost magnetické indukce. Změna velikosti rychlosti ve směru pohybu i ve směru na něj kolmém je tedy úměrná velikosti rychlosti částice. Za malý časový okamžik Δt můžeme psát

$$\frac{\Delta v_{\parallel}}{\Delta t} = \frac{F_{\mathrm{t}}}{m} = \frac{k\Delta s}{m\Delta t}, \qquad \frac{\Delta v_{\perp}}{\Delta t} = \frac{F_{\mathrm{m}}}{m} = \frac{qB\Delta s}{m\Delta t},$$

z čehož je vidět, že mezi vektorem změny rychlosti a vektorem změny polohy je po celou dobu pohybu konstantní úhel a konstantní poměr jejich velikostí

$$\frac{\sqrt{{\Delta v_{\parallel}}^2 + {\Delta v_{\perp}}^2}}{\Delta s} = \frac{\sqrt{k^2 + q^2B^2}}{m}.$$

Platí-li výše uvedené vztahy pro všechny malé změny rychlosti a polohy, musí platit i pro jejich celkovou změnu. Změna rychlosti je ve všech třech případech ze zadání rovna počáteční rychlosti, kterou částice do prostředí vlétá, z čehož plyne

$$l_1\frac{k}{m} = l_2\frac{\sqrt{k^2+q^2B^2}}{m} = l_3\frac{\sqrt{k^2+q^2(B/2)^2}}{m}.$$

Odtud již jednoduchým vyloučením neznámých konstant dostáváme výsledek

$$l_3 = \frac{2l_1l_2}{\sqrt{3l_1^2+l_2^2}} = 8{,}3\,\mathrm{cm}.$$

V takové vzdálenosti od místa, kde částice do prostředí vstoupila, se tedy zastaví, bude-li mít magnetické pole indukci poloviční velikosti.

Příklad 6 – maximální rychlost automobilu

Vypočtěte maximální rychlost, které může dosáhnout osobní automobil, je-li $P = 50{,}0\,\mathrm{kW}$ výkon jeho motoru měřený na kolech hnané nápravy, $S = 1{,}50\,\mathrm{m}^2$ obsah průmětu plochy karoserie do směru rychlosti a $C = 0{,}30$ součinitel odporu. Automobil má hmotnost $m = 1\ 100\,\mathrm{kg}$. Valivý odpor pneumatik neuvažujte. Problém řešte ve třech režimech přímé jízdy: po rovině (rychlost v_0), z táhlého kopce o klesání 1 : 5, tj. $\alpha = 11{,}3°$ (rychlost v_1) a při jízdě do téhož kopce (rychlost v_2).

Řešení

V ustáleném stavu, při němž automobil dosáhne maximální (mezní) rychlosti v, bude výslednice vnějších sil působících na automobil nulová, tj.

$$F = \frac{P}{v} + mg\sin\alpha - \frac{1}{2}CS\varrho v^2 = 0,$$

přičemž při jízdě z kopce $\alpha > 0$, při jízdě do kopce $\alpha < 0$ a po rovině $\alpha = 0$. Rovnici můžeme přespat do přehlednějšího tvaru

$$v^3 + pv + q = 0, \tag{15}$$

kde

$$p = -\frac{2mg\sin\alpha}{CS\varrho}, \quad q = -\frac{2P}{CS\varrho}$$

jsou konstanty, přitom $q < 0$ a znaménko p závisí na znaménku úhlu α.

Rovnice (15) má určitě kladný kořen, neboť hodnota výrazu $v^3 + pv + q$ je pro nulovou rychlost záporná a pro dostatečně velké v kladná. Pokud má rovnice (15) tři reálné kořeny (jiný počet než 1 nebo 3 mít nemůže), označíme je $v_\mathrm{a}, v_\mathrm{b}, v_\mathrm{c}$ a platí

$$(v - v_\mathrm{a})(v - v_\mathrm{b})(v - v_\mathrm{c}) = v^3 + pv + q,$$

tedy $v_\mathrm{a} v_\mathrm{b} v_\mathrm{c} = -q > 0$ a $v_\mathrm{a} + v_\mathrm{b} + v_\mathrm{c} = 0$. Odtud již plyne, že právě jeden z kořenů je kladný. Rovnice (15) má tedy vždy právě jeden kladný kořen, který má význam ustálené rychlosti.

O počtu reálných (ne nutně kladných) řešení (15) rozhoduje její diskriminant

$$\Delta = \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}.$$

Je-li $\Delta > 0$, má (15) jediný reálný kořen

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}.$$

Pro $\Delta < 0$ má tři reálné kořeny, z nichž jediný kladný je roven

$$v = \sqrt{-\frac{4p}{3}} \cos\left[\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{\frac{27}{-p^3}}\right)\right].$$

Číselně pro zadané hodnoty je pro jízdu po rovině

$$v_0 = \sqrt[3]{-q} = \sqrt[3]{\frac{2P}{CS\varrho}} = 55{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 200\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}},$$

pro jízdu z kopce ($\alpha = 11{,}3^\circ$) vychází $v_1 = 95{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 345\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a pro jízdu do kopce ($\alpha = -11{,}3^\circ$) vychází $v_2 = 22{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 80\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Rychlost v_1 je ovšem pro běžný automobil technicky i bezpečnostně nereálná.

Informace o řešení kubické rovnice najde čtenář např. v [3]. Rovnici lze též řešit numericky.

8 Energie

Odporové síly nejsou konzervativní, protože práce těchto sil na uzavřené trajektorii není nulová. Pro pole nekonzervativní síly nelze formulovat potenciální energii E_p, proto se *při působení odporových sil nezachovává mechanická energie* uvažované soustavy definovaná vztahem $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{p} + E_\mathrm{k}$.

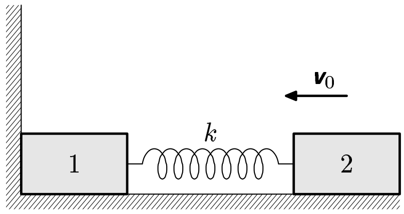
Celková energie soustavy E_c se i při působení odporových sil zachovávat musí. Zmenšující se mechanická energie se zpravidla projeví zvětšením vnitřní energie U těles a následnou tepelnou výměnou s okolím. *Energetická bilance* procesu je

$$E_\mathrm{c} = E_\mathrm{m} + U = \mathrm{konst.}$$

Neboli $\Delta E_\mathrm{c} = 0$, tj. $\Delta E_\mathrm{m} + \Delta U = 0$, z toho $\Delta E_\mathrm{m} = -\Delta U$. Změna vnitřní energie je rovna práci odporových sil na uvažované trajektorii. Úbytek mechanické energie se nemusí projevit jen jako energie tepelná, ale např. i jako energie elektrická (při tření může docházet k nabíjení těles).

Příklad 7 – dva kvádry spojené pružinkou

Na vodorovné podložce máme dva stejné kvádry, každý o hmotnosti m, spojené dlouhou pružinou o tuhosti k (viz obr. 20). Součinitel klidového tření je f_1, smykového f_2. Pružina je na začátku nenapnutá; má klidovou délku. Jakou minimální rychlostí v_0 musíme poslat kvádr č. 2 směrem ke kvádru č. 1 opřenému o pevnou stěnu, aby se v důsledku nastalého děje pohnul i tento kvádr?



Obr. 20. K příkladu 7

Řešení

Kvádr č. 1 se pohne pouze v případě, když se pružina prodlouží alespoň o délku $x_1 = mgf_1/k$, toto prodloužení totiž způsobí pružnou sílu dostatečně velkou na překonání statické třecí síly, která brání jeho pohybu. Označme x_2 délku, o kterou je pružina zkrácena v okamžiku, kdy kvádr č. 2 je nejblíže ke kvádru č. 2. Zákon zachování mechanické energie v naší soustavě neplatí, ale můžeme využít zachování celkové energie, započítáme-li práci spotřebovanou třecí silou $W = mgf_2\Delta x$, kde Δx je celkové posunutí kvádru č. 2. Předpokládáme-li, že v polohách, kdy je pružina zkrácena resp. prodloužena o x_2 resp. x_1, má kvádr č. 2 nulovou rychlost, můžeme psát energetickou bilanci mezi kinetickou energií kvádru, potenciální energií pružiny a prací odporové síly

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kx_2^2 + mgf_2x_2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + mgf_2(2x_2 + x_1).$$

Z čehož po dosazení za x_1 dostaneme pro x_2

$$x_2 = \frac{mg(2f_2 + f_1)}{k}$$

a pro počáteční rychlost kvádru č. 2 (při nepatrně větší počáteční rychlosti se již kvádr č. 1 pohne)

$$v_0 = g\sqrt{\frac{m}{k}}\sqrt{8f_2^2 + 6f_1f_2 + f_1^2}.$$

Přičemž jsme předpokládali, že parametry soustavy jsou takové, že stlačení x_2 je možné.

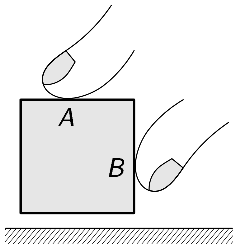
Zadání úloh

Úloha 1 – válec versus koule

Máte kouli a válec stejné hmotnosti m, materiálu i poloměru R. Obě tyto tělesa vrhnete bez roztočení rychlostí v_0 po podlaze. U válce předpokládáme, že vektor jeho rychlosti je kolmý k jeho ose. Na jaké rychlosti v se pohyb těles ustálí? Uvažujte jen smykové tření, valivý odpor zanedbejte.

Úloha 2 – kostka

Stanovte podmínku, která musí platit, aby se vám podařilo uchopit kostku tak, jak je naznačeno na obrázku 21. Součinitel klidového tření mezi kostkou a prsty je f_0.



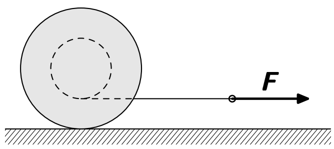
Obr. 21. K úloze 2

Úloha 3 – formule 1

Jak byste konstruovali vlastní formuli, aby ze startu na rovině vyjela s co největším zrychlením?

Úloha 4 – špulka

Na špulce odvalující se na podložce je navinutá nit, za níž táhneme ve vodorovném směru konstantní silou $\boldsymbol{F}$. Jaký směr má třecí síla působící v místě dotyku špulky s podložkou, bude se nit navíjet nebo odvíjet? Uvažujte, že špulka neprokluzuje. Výsledek úvah ověřte experimentem.



Obr. 22. K úloze 4

Úloha 5 – řetízek

Polovina řetízku délky l visí ze stolu, druhá polovina leží na stole a je na něm upevněna. Součinitel dynamického tření mezi deskou stolu a řetízkem je f. Najednou se upevnění uvolní a řetízek se začne sesouvat dolů. Určete závislost jeho rychlosti na poloze do okamžiku, kdy celý sjede ze stolu.

Úloha 6 – krasobruslařka

Krasobruslařka jede rovnoměrně po ledu na jedné brusli. Led, který má hustotu $0{,}90\,\mathrm{g\cdot cm^{-3}}$ pod bruslí taje do hloubky asi $h = 0{,}030\,\mathrm{mm}$. Nůž brusle je široký $d = 3{,}0\,\mathrm{mm}$. Skupenské teplo tání ledu je $l_\mathrm{t} = 3{,}3\cdot10^5\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$. Vypočtěte velikost třecí síly mezi bruslí a ledem. Tepelnou vodivost ledu a ohřívání brusle zanedbejte, předpokládejte, že teplota okolního prostředí je stejná jako teplota tajícího ledu.

Úloha 7 – válec

Jaký sklon má nakloněná rovina, valí-li se z ní rovnoměrně válec, rameno valivého odporu je ξ?

Úloha 8 – automobil

Uvažte automobil, který do kopce jede na plný výkon rychlostí $v_1 = 50\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Ze téhož kopce dolů dosáhne při stejném výkonu rychlosti $v_2 = 120\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Jak rychle je tento automobil schopen jet po rovině, je-li odporová síla úměrná čtverci rychlosti?

Úloha 9 – cyklista

Cyklista jede po rovině maximální rychlostí $v_\mathrm{m} = 30\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Proti němu vane vítr o rychlosti $v_\mathrm{v} = 5\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Jakou rychlostí jede za bezvětří?

Úloha 10 – jednoduchý experiment

Máte k dispozici dva listy tvrdého papíru, tenkou lepící pásku a stopky. Navrhněte co nejjednodušší pokus, na základě kterého budete moci říci, zda při pádu papíru je odpor prostředí úměrný rychlosti či čtverci rychlosti. Po teoretické úvaze experiment proveďte.

Úloha 11 – Millikanův pokus

Náboj elektronu se měří Millikanovou metodou tak, že se sleduje ustálený pohyb malé nabité olejové kapičky o poloměru r a hmotnosti m ve vzduchu o viskozitě η, jednak za přítomnosti svislého elektrického pole E (ustálená rychlost v_E) a jednak bez něj (v_0). Millikan měřil rozdíl $v_E - v_0$ a zjistil, že tento rozdíl nabývá diskrétních hodnot, přičemž dvě nejbližší hodnoty jsou vzdáleny o Δv. Určete z toho náboj elektronu.

Úloha 12 – kapky deště na okně vlaku

Kvalitativně vysvětlete, proč na okně rovnoměrně jedoucího vlaku za deště vznikají šmouhy od dešťových kapek ve dvou význačných směrech?

Úloha 13 – mezní rychlost a laminární proudění

Jaká je mezní rychlost v_m ocelové kuličky o průměru $d = 5{,}0\,\mathrm{mm}$ padající v tíhovém poli v nádobě s glycerínem. Hustota oceli je $\varrho_\mathrm{o} = 8{,}50 \cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a glycerínu $\varrho = 1{,}32 \cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Dynamická viskozita glycerínu je $\eta = 1{,}39\,\mathrm{Pa{\cdot}s}$. Posuďte, zda proudění glycerínu kolem kuličky je laminární.

Úloha 14 – podmínka podobnosti při proudění

Kouli o průměru $d = 1{,}00\,\mathrm{m}$ obtéká proud vody rychlostí $v_1 = 0{,}250\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Jak velkou rychlost v_2 musí mít proud vzduchu obtékající stejnou kouli, aby v obou případech byla stejná odporová síla? Teplota a tlak obou tekutin jsou stejné: $20\,^\circ\mathrm{C}$ a $1{,}013 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$, při kterých je kinematická viskozita pro vodu $\nu_1 = 1{,}07 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2{\cdot}s^{-1}}$ a pro vzduch $\nu_2 = 13{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^2{\cdot}s^{-1}}$.

Úloha 15 – plavec

Kolika tatrankám (porovnáváme-li energetickou hodnotu jedné tatranky — — 20 kJ s prací odporové síly) se vyrovná práce, kterou vykoná plavec na překonání odporové síly, má-li na klidné vodě uplavat 1 km rychlostí $v = 5{,}0\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Součin CS z Newtonova vztahu je pro plavce $CS = 0{,}050\,\mathrm{m^2}$.

Řešení úloh

1. Obě tělesa se po dopadu začnou smýkat po podložce a třecí síla je bude roztáčet až do okamžiku, kdy se jejich posuvná rychlost bude rovnat rychlosti obvodové. Třecí síla uděluje úhlové zrychlení $\varepsilon = rmgf/J$, pohyb se ustálí, bude-li $v = \omega r$, což nastane v čase $t = (Jv)/(mgfr^2)$, pro posuvnou rychlost $v = v_0 - gft$. Z posledních dvou vztahů dostaneme při uvážení příslušného momentu setrvačnosti pro válec konečnou rychlost $v_\mathrm{v} = 2v_0/3$ pro kouli $v_\mathrm{k} = 5v_0/7$.

2. Označme $\boldsymbol{F}_A$ ($\boldsymbol{F}_B$) sílu, kterou na kostku působí horní (krajní) prst. Abychom ji udrželi, musí platit rovnováha $mg + F_\mathrm{nA} = F_\mathrm{tB}$ a $F_\mathrm{tA} = F_\mathrm{nB}$. Díky tření ale $F_\mathrm{tA} \leq f_0 F_\mathrm{nA}$ a $F_\mathrm{tB} \leq f_0 F_\mathrm{nB}$, z toho po úpravě dostaneme $mg \leq (f^2 - 1)F_\mathrm{nA}$ a obdobné podmínky pro ostatní síly. Jelikož všechny veličiny vystupující v uvedeném vztahu jsou kladné, musí být $f > 1$. Je-li toto splněno, lze najít síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{A}$, $\boldsymbol{F}_\mathrm{B}$ a jejich umístění tak, aby kostka byla v rovnováze. Případ $f > 1$ není sice běžný, ale nastane např. pro kostku se „zubatým" povrchem, nebo pro kostku ze speciálních materiálů.

3. Nejdůležitější je, aby těžiště formule bylo umístěno co nejblíže (ve vodorovném směru) k ose zadního poháněcího kola (nejlépe tak, aby těžiště a osy kol ležely v jedné rovině). Pak normálová složka, kterou toto kolo bude působit na zem, bude rovna téměř celé tíze formule a ta bude moci zrychlovat s $a = f_0 g$, kde f_0 je součinitel klidového tření mezi pneumatikou a vozovkou. Tento koeficient se konstruktéři snaží maximalizovat a mívá u špičkových pneumatik hodnotu větší než $f_0 = 1$. Důležitá je též odporová síla vzduchu, formule je konstruována tak, aby ji tato síla přitlačovala k zemi a tím zvyšovala normálovou sílu.

4. Třecí síla má směr opačný než má síla tahová, neboť kdyby bylo tření nulové, pohybovala by se špulka ve směru působící síly. Špulka se bude pohybovat ve směru síly F, tedy nit navíjet. Kdyby se pohybovala na druhou stranu, musela by třecí síla být větší než síla F a tudíž celkový moment síly by nutil špulku pohybovat se opačným směrem a nemohla by se tedy valit bez prokluzování.

5. Označme s vzdálenost, o kterou již řetízek sjel. K řešení využijeme bilanci mechanické energie se započtením práce spotřebované třecí silou. Po úpravách vyjde
$$v = \sqrt{sg\left[(1-f) + \frac{s}{l}(1+f)\right]}.$$

6. Práce, kterou vykoná třecí síla, se spotřebuje na roztání ledu, z toho získáme pro třecí sílu $F_\mathrm{t} = h\varrho l_\mathrm{t} d = 27\,\mathrm{N}$.

7. Sklon roviny je $\alpha = \operatorname{arctg} \xi$.

8. Rychlost automobilu na rovině je
$$v = \sqrt[3]{\frac{v_1 v_2(v_1^2 + v_2^2)}{v_1 + v_2}} = 84\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}.$$

9. Výkon cyklisty je úměrný odporové síle krát rychlosti vzhledem k zemi a tedy $P_\mathrm{max} = kv^3 = k(v_\mathrm{m} + v_\mathrm{v})^2 v_\mathrm{m}$, kde k je konstanta. Z toho $v = \sqrt[3]{(v_\mathrm{m} + v_\mathrm{v})^2 v_\mathrm{m}} = 33\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.

10. Využijeme toho, že ustálená rychlost tělesa při odporu úměrném rychlosti je úměrná hmotnosti tělesa, zatímco při odporu úměrném čtverci rychlosti je úměrná odmocnině z hmotnosti. Při pokusu tedy změříme jak dlouho určitý úsek padá jeden papír a pak dva k sobě slepené papíry. Podle toho zda poměr těchto dob bude $1/2$ či $\sqrt{2}/2$, pak již určíme jaké mocnině rychlosti je úměrná odporová síla.

11. Ze Stokesova vztahu dostaneme
$$e = \frac{6\pi\eta r}{E}\Delta v.$$

12. Jeden směr kapek je dán rychlostí vlaku a ustálenou rychlostí pádu kapek. Druhý směr rychlostí pádu kapky, která už je na okně a odporovou silou vzduchu působící proti směru jízdy vlaku.

13. Mezní rychlost je $v_\mathrm{m} = gd^2(\varrho_\mathrm{o} - \varrho)/18\eta = 7{,}03 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Reynoldsovo číslo $\mathcal{R}e = v_\mathrm{m} d\varrho/\eta = 0{,}100$, tedy proudění je laminární.

14. Podmínkou podobnosti proudění v obou případech je, aby bylo stejné Reynoldsovo číslo.
$$v_2 = v_1 \frac{\nu_2}{\nu_1} = 3{,}08\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$$

15. Práce odporové síly je podle Newtonova vztahu $W = CS\varrho v^2 s/2 = 1{,}1\,\mathrm{kJ}$, tj. asi dvacetina tatranky. Výsledek je nečekaně malý, což je způsobeno tím, že ve skutečnosti je většina energie spotřebována na schopnost působit silou, než působit silou po určité dráze (nemusíme tašku zvedat, stačí ji držet, abychom se namáhali).

Tabulky

Tab 1. Součinitele a úhly tření

kombinace materiálů	klidové tření		smykové tření	
	f_0	α_0	f	α
ocel na ledu	0,027	1,5°	0,014	0,80°
ocel na oceli	0,11 – 0,30	6,3° – 17°	0,07 – 0,25	4,0° – 14°
ocel na litině	0,19	11°	0,18	10°
dřevo na dřevu	0,43 – 0,62	23° – 32°	0,19 – 0,48	11° – 26°
kov na dřevu	0,20 – 0,55	11° – 29°	0,20 – 0,50	11° – 27°
kůže na kovu	0,25 – 0,60	14° – 31°	0,12 – 0,36	6,8° – 20°
pryž na asfaltu	0,7 – 0,8	35° – 39°	0,5 – 0,6	27° – 31°

Tab. 2. Hodnoty ρ, η a ν některých tekutin při atmosferickém tlaku

	hustota $\varrho/\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$	**dyn. viskozita** $\eta/\mathrm{Pa\cdot s}$	**kin. viskozita** $\nu/\,\mathrm{m^{-2}\cdot s^{-1}}$
kapaliny (18 °C)			
aceton	$0{,}791 \cdot 10^{3}$	$0{,}337 \cdot 10^{-3}$	$4{,}26 \cdot 10^{-7}$
methylalkohol	$0{,}792 \cdot 10^{3}$	$0{,}616 \cdot 10^{-3}$	$7{,}78 \cdot 10^{-7}$
olej ricinový	$0{,}961 \cdot 10^{3}$	1,278	$1{,}33 \cdot 10^{-3}$
rtuť	$13{,}551 \cdot 10^{3}$	$1{,}566 \cdot 10^{-3}$	$1{,}156 \cdot 10^{-7}$
voda	$0{,}9986 \cdot 10^{3}$	$1{,}065 \cdot 10^{-3}$	$1{,}066 \cdot 10^{-6}$
plyny (0 °C)			
helium	0,1785	$18{,}6 \cdot 10^{-6}$	$104 \cdot 10^{-6}$
oxid uhličitý	1,9766	$13{,}8 \cdot 10^{-6}$	$6{,}98 \cdot 10^{-6}$
vodík	0,08987	$8{,}4 \cdot 10^{-6}$	$93{,}5 \cdot 10^{-6}$
vzduch	1,2928	$17{,}1 \cdot 10^{-6}$	$13{,}2 \cdot 10^{-6}$

Tab. 3. Součinitel odporu C

těleso	C
kruhová deska (kolmá k $\boldsymbol{v}$)	1,11
čtvercová deska (kolmá k $\boldsymbol{v}$)	1,05 – 1,27
koule	0,48
dutá polokoule (pohyb dutou částí vpřed)	1,35 – 1,40
dutá polokoule (pohyb vypuklou částí vpřed)	0,30 – 0,40
kruhový válec (podélná osa kolmá na $\boldsymbol{v}$)	1,2
profily minimálního odporu	0,003 – 0,01
trup letadla	0,045 – 0,055
osobní automobil	0,28 – 0,35

Literatura

[1] Adamča, L., Marton, P., Pavlík, M., Trávniček, F.: *Teoretická mechanika.* ALFA, Bratislava 1992.

[2] Barger, V., Olsson, M.: *Classical Mechanics: A Modern Perspektive.* McGraw-Hill, Inc., New York 1995.

[3] Bartsch, H.-J.: *Matematické vzorce.* Mladá fronta, Praha 1996.

[4] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B.: *Mechanika kontinua.* Academia, Praha 2000.

[5] Bauer, F., Brůha, O., Jaňour, Z: *Základy proudění.* Technický průvodce, svazek 18. Vědecko-technické nakladatelství, Praha 1950.

[6] Hajko, V., et. al.: *Fyzika v príkladoch.* SVTL, Bratislava 1960.

[7] Horák, Z., Krupka, F.: *Fyzika.* SNTL, Praha 1976 a 1981.

[8] Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V.: *Technická fyzika.* SNTL, Praha 1960 a 1961.

[9] Molitz, H., Strobel, R.: *Äussere Ballistik.* Springer-Verlag, Berlin 1963.

[10] Noskievič, J., et. al.: *Mechanika tekutin.* SNTL, Praha 1987.

[11] *Ročenky fyzikálního korespondenčního semináře Fykos z let 1994–1999.* Vyd. MFF UK, Praha 1994-1999.

[12] Szabó, I.: *Mechanika tuhých těles a kapalin.* SNTL, Praha 1967.

[13] Šapiro, J. M.: *Vnější balistika, I. – III. díl.* SNTL, Praha 1953.

[14] Štoll, I.: *Svět očima fyziky.* Prometheus, Praha 1996.

[15] Trkal, V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa.* ČSAV, Praha 1956.

[16] Vybíral, B.: *Kinematika a dynamika tuhého tělesa.* Knihovnička FO č. 31. MAFY, Hradec Králové 1997.

[17] Vybíral, B.: *Základní úloha vnější balistiky.* Fyzika ve škole VI. (1967/68), str. 54–62.

[18] Vybíral, B.: *Základy teoretické mechaniky, 1. až 3. díl.* Gaudeamus, Hradec Králové 1992, 1999.