POHYB SOUSTAVY TĚLES SPOJENÝCH VLÁKNEM

Studijní text pro řešitele FO, kat. C

Radmila Horáková

Úvod

Studium pohybu soustavy těles spojených vláknem rozdělíme v následujícím textu na 3 části:

1. Tělesa konají posuvný pohyb, hmotnost kladek a vláken zanedbáme.
2. Některá nebo všechna tělesa soustavy konají rotační pohyb, zanedbáme hmotnost kladek a vláken.
3. Tělesa konají rotační nebo posuvný pohyb, ale hmotnost kladek nelze zanedbat.

Ve všech případech se jedná pouze o pečlivý zápis pohybových rovnic pro jednotlivá tělesa soustavy. Nejčastější chybou, které se studenti při řešení těchto úloh dopouštějí, je snaha sestavit jednu pohybovou rovnici pro všechna tělesa. Výpočet zrychlení soustavy pomocí jedné rovnice může být v některých případech správný, ale jedna rovnice neumožňuje určit např. tahové síly ve vláknech.

Problematiku úloh všech tří výše uvedených částí předvedeme přímo na úlohách.

1. Posuvný pohyb soustavy těles spojených vláknem

Příklad 1

Tři kostky jsou taženy po hladkém vodorovném stole silou 60 N. Najděte tahové síly T_1 a T_2 ve vláknech za předpokladu, že $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 20$ kg, $m_3 = 30$ kg (obr. 1).

Řešení:

Napíšeme pohybové rovnice pro všechna tři tělesa:

$$am_3 = F - T_2\,, \tag{1}$$
$$am_2 = T_2 - T_1\,, \tag{2}$$
$$am_1 = T_1\,. \tag{3}$$

Sečtením rovnic (1), (2) a (3) vyloučíme síly T_1 a T_2 a určíme obecně zrychlení soustavy:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Pro výpočet síly T_1 dosadíme za zrychlení do rovnice (3):

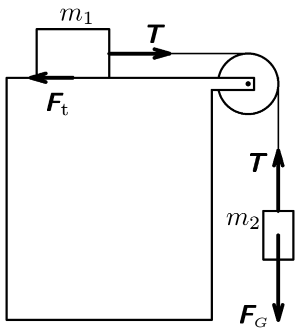
$$T_1 = F \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} = 10 \text{ N}.$$

Pro určení síly T_2 dosadíme za zrychlení do rovnice (1):

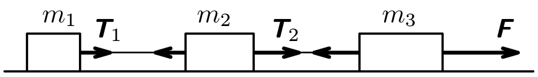
$$T_2 = F \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} = 30 \text{ N}.$$

Tahové síly ve vláknech mají velikost 10 N a 30 N.

Obr. 2



Obr. 1



Příklad 2
Těleso o hmotnosti $m_1 = 0{,}50$ kg je uváděno do pohybu po vodorovné rovině tělesem o hmotnosti $m_2 = 1{,}0$ kg, které je k němu připojeno vláknem vedeným přes kladku (obr. 2). Součinitel smykového tření mezi tělesem a vodorovnou rovinou je $f = 0,2$. Určete zrychlení soustavy a sílu napínající vlákno. Hmotnost kladky a vlákna zanedbáme.

Řešení
Napíšeme pohybové rovnice pro obě tělesa:

$$\begin{aligned} m_1 a &= T - F_\mathrm{t}\,, && (4) \\ \text{kde} \quad F_\mathrm{t} &= m_1 g f, && \\ m_2 a &= m_2 g - T\,. && (5) \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic (4) a (5) určíme zrychlení a tahovou sílu vlákna:

$$a = g \frac{m_2 - m_1 f}{m_1 + m_2} = 5{,}9 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}\,,$$

$$T = m_1 m_2 g \frac{1+f}{m_1+m_2} = 3{,}9\ \mathrm{N}.$$

Zrychlení soustavy je 5,9 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, tahová síla ve vlákně je 3,9 N.

2. Rotační pohyb v soustavě těles spojených vláknem

Problematiku objasníme opět přímo na řešení úloh.

Příklad 3

Soustava těles spojených vláknem je tvořena kvádrem o hmotnosti m_1, který klouže po vodorovné rovině, a válcem o hmotnosti m_2 a poloměru r, na němž je navinuto vlákno vedené přes pevnou kladku a připevněné ke kvádru (obr. 3). Když je válec vypuštěn, padá a vlákno se odvíjí. Určete velikost zrychlení kvádru, zrychlení válce a tahovou sílu vlákna, jestliže součinitel smykového tření mezi kvádrem a vodorovnou rovinou je f a jestliže hmotnost pevné kladky a vlákna zanedbáme.

Řešení

Těžiště válce koná rovnoměrně zrychlený pohyb a válec současně rotuje kolem osy souměrnosti procházející těžištěm. Za předpokladu, že by kvádr byl v klidu, označme zrychlení válce a_2. V důsledku pohybu válce se bude pohybovat i kvádr se zrychlením a_1. Při pohybu obou těles se bude válec pohybovat se zrychlením o velikosti $a = a_1 + a_2$. Napíšeme pohybové rovnice pro obě tělesa:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= T - f m_1 g\,, && (6)\\ m_2(a_1+a_2) &= m_2 g - T\,. && (7) \end{aligned}$$

Platí rovněž pohybová rovnice pro rotační pohyb:

$$J\varepsilon = Tr\,, \qquad (8)$$

$$\text{kde} \quad J = \frac{mr^2}{2},\ \varepsilon = \frac{a_2}{r}\,.$$

Dosazením do rovnice (8) dostaneme:

$$m_2 a_2 = 2T\,. \qquad (8a)$$

Řešením rovnic (6), (7) a (8a) dostaneme hledané vztahy:

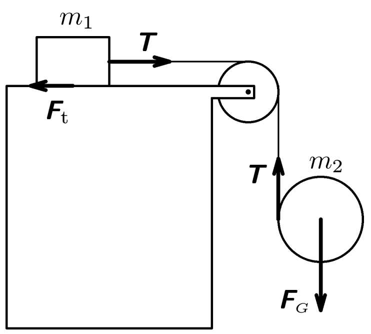
$$T = g\frac{m_1 m_2(1+f)}{3m_1+m_2}\,,$$

$$a_1 = g\frac{m_2 - 3f m_1}{3m_1+m_2}\,,$$

$$a_2 = 2g\frac{m_1(1+f)}{3m_1 + m_2}\,.$$

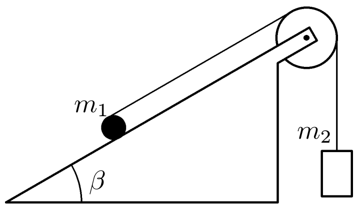
Zrychlení válce je tedy:

$$a = a_1 + a_2 = g\frac{m_1(2-f) + m_2}{3m_1 + m_2}\,.$$



Obr. 3

Obr. 4



Příklad 4

Kolem tuhého válce o hmotnosti $m_1 = 5{,}0$ kg a poloměru $r = 0,075$ m je omotána tenká páska (obr. 4). Páska je vedena přes lehkou pevnou kladku. Na konci kladky je zavěšeno těleso o hmotnosti $m_2 = 1{,}0$ kg. Určete sílu napínající pásku a zrychlení těžiště válce. Předpokládejte, že se válec pohybuje bez klouzání a že úhel nakloněné roviny je $\beta = 30^\circ$. Hmotnost kladky i pásky zanedbejte.

Řešení

Napíšeme pohybové rovnice pro válec i těleso:

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin\beta - T - F_\mathrm{t}\,, \tag{9}$$

$$m_2 a_2 = 2m_2 a_1 T - m_2 g\,. \tag{10}$$

Zrychlení a_1 hmotného středu válce je poloviční vzhledem ke zrychlení a_2 bodu na obvodu válce. (Se zrychlením a_2 se pohybuje také těleso o hmotnosti m_2.) $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ je síla tření mezi válcem a nakloněnou rovinou.

Napíšeme pohybovou rovnici pro rotující těleso vzhledem k ose jdoucí středem válce:

$$J\varepsilon = F_\mathrm{t} r - Tr\,, \quad \text{kde} \quad \varepsilon = \frac{a_1}{r}\,. \tag{11}$$

Do rovnice (11) dosadíme za moment setrvačnosti a úhlové zrychlení, po úpravě obdržíme rovnici:

$$\frac{1}{2}m_1 a_1 = F_\mathrm{t} - T\,. \tag{11a}$$

Řešením soustavy rovnic (9), (10) a (11a) obdržíme hledané vztahy:

$$a_1 = 2g\frac{m_1 \sin\beta - 2m_2}{3m_1 + 8m_2} = 0{,}43\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,,$$

$$T = gm_1m_2\frac{4\sin\beta + 3}{3m_1 + 8m_2} = 11\ \mathrm{N}\,.$$

Zrychlení hmotného středu válce je 0,43 $\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, tahová síla má velikost 11 N.

3. Pohyb soustavy těles včetně rotace kladek

Budeme-li uvažovat rotační pohyb kladky, použijeme pohybovou rovnici pro rotační pohyb:

$$J\varepsilon = M.$$

Kladku považujeme většinou za homogenní válec, který má moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí středem podstav $\dfrac{mr^2}{2}$.

Příklad 5

Určete zrychlení soustavy a tahové síly ve vláknu soustavy těles spojených vláknem podle obr. 5. Součinitel smykového tření mezi tělesem a podložkou je $f = 0{,}2$, kladku považujeme za homogenní válec o poloměru $r = 0{,}10$ m a hmotnosti $m_2 = 0{,}50$ kg. Těleso na podložce má hmotnost $m_1 = 1{,}0$ kg, těleso zavěšené na druhém konci vlákna má hmotnost $m_3 = 2{,}0$ kg.

Řešení

Napíšeme pohybové rovnice pro všechna tři tělesa:

$$m_1 a = T_1 - fm_1 g\,, \tag{12}$$
$$m_3 a = m_3 g - T_2\,. \tag{13}$$

Pohybová rovnice kladky je:

$$J\varepsilon = M\,, \tag{14}$$

kde $J = \dfrac{m_2 r^2}{2}$, $\varepsilon = \dfrac{a}{r}$. Otáčení kladky se projeví změnou tahu ve vlákně. Výsledný moment sil působících na kladku vzhledem ke směru její rotace je

$$M = T_2 r - T_1 r\,.$$

Dosadíme do rovnice (14) a po úpravě dostaneme vztah:

$$\frac{1}{2}m_2a = T_2 - T_1. \tag{14a}$$

Řešením rovnic (12), (13) a (14a) vyjádříme hledané veličiny:

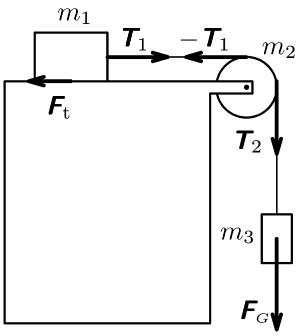
$$a = 2g\frac{m_3 - fm_1}{2m_1 + m_2 + 2m_3} = 5{,}4\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\,,$$

$$T_1 = m_1g\frac{2m_3(1+f) + fm_2}{2m_1 + m_2 + 2m_3} = 7{,}4\ \mathrm{N}\,,$$

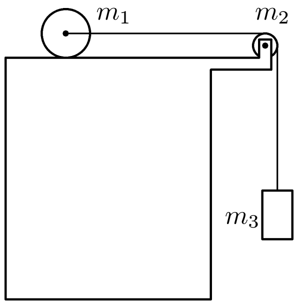
$$T_2 = m_3g\frac{2m_1(1+f) + m_2}{2m_1 + m_2 + 2m_3} = 8{,}7\ \mathrm{N}\,.$$

Soustava se pohybuje se zrychlením 5,4 m·s^{-2}, tahové síly jsou 7,4 N a 8,7 N.

Obr. 5



Obr. 6



Příklad 6

Plný homogenní válec o poloměru r_1 a o hmotnosti m_1 je tažen po vodorovné rovině vláknem jdoucím přes kladku o hmotnosti m_2. Na druhém konci vlákna je zavěšeno závaží o hmotnosti m_3 (obr. 6). Rameno valivého odporu mezi vláknem a podložkou je ξ. Kladku o poloměru $r_2 = r_1/2$ považujte za homogenní válec, tření v ložisku kladky zanedbejte. Určete zrychlení pohybu dané soustavy, tahové síly ve vlákně a velikost síly tření.

Řešení:

Napíšeme pohybové rovnice pro jednotlivá tělesa:

$$m_3a = m_3g - T_2\,,$$

$$J_2\varepsilon_2 = T_2r_2 - T_1r_2\,, \quad \text{kde} \quad J_2 = \frac{m_2r_2^2}{2}\,, \quad \varepsilon_2 = \frac{a}{r_2}\,,$$

$$m_1 a = T_1 - F_\mathrm{t}\,.$$

Pro rotační pohyb válce platí:

$$J_1\varepsilon_1 = F_\mathrm{t} r_1 - \xi m_1 g\,, \quad \text{kde} \quad J_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}\,, \quad \varepsilon_1 = \frac{a}{r_1}\,.$$

Po dosazení a úpravě dostaneme čtyři rovnice pro čtyři neznámé veličiny:

$$\begin{aligned} m_1 a &= 2(F_\mathrm{t} - \frac{\xi}{r_1} m_1 g)\,, && (15)\\ m_1 a &= T_1 - F_\mathrm{t}\,, && (16)\\ m_2 a &= 2(T_2 - T_1)\,, && (17)\\ m_3 a &= m_3 g - T_2\,. && (18) \end{aligned}$$

Řešením soustavy rovnic (15), (16), (17) a (18) určíme vztahy pro hledané veličiny:

$$\begin{aligned} a &= 2g\frac{m_3 - \frac{\xi}{r_1} m_1}{3m_1 + m_2 + 2m_3}\,,\\ T_2 &= m_3 g\frac{m_1(3 + \frac{2\xi}{r_1}) + m_2}{3m_1 + m_2 + 2m_3}\,,\\ T_1 &= m_1 g\frac{m_3(3 + \frac{2\xi}{r_1}) + \frac{\xi}{r_1} m_2}{3m_1 + m_2 + 2m_3}\,,\\ F_\mathrm{t} &= m_1 g\frac{m_3 + \frac{\xi}{r_1}(2m_1 + m_2 + 2m_3)}{3m_1 + m_2 + 2m_3}\,. \end{aligned}$$

Úlohy pro samostatné řešení

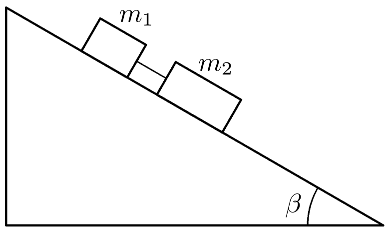
1. Dvě tělesa o hmotnostech $m_1 = 1{,}65$ kg a $m_2 = 3{,}30$ kg spojená tyčí o zanedbatelné hmotnosti spočívají na nakloněné rovině o úhlu sklonu $\beta = 30°$. Tělesa kloužou po nakloněné rovině tak, že těleso o hmotnosti m_2 vleče těleso o hmotnosti m_1 (obr. 7). Součinitel smykového tření mezi podložkou a tělesem o menší hmotnosti je $f_1 = 0{,}226$, mezi podložkou a tělesem o větší hmotnosti $f_2 = 0,113$. Vypočtěte sílu napínající spojovací tyč a zrychlení soustavy. Jak se změní výsledky, zaměníme-li pořadí těles?

(3,62 m$\cdot$s^{-2}; 1,06 N, tyč je namáhána tahem; po změně pořadí opět 3,62 m$\cdot$s^{-2}; 1,06 N, tyč je namáhána tlakem)

2. Válec délky 1,0 m o poloměru 0,025 m má hmotnost 6,0 kg . Blízko podstav válce jsou namotány šňůry, jejichž konce jsou připojeny k háčkům na stropě. Válec nejprve držíme ve vodorovné poloze tak, aby šňůry byly přesně svislé, a potom jej uvolníme. Určete sílu napínající šňůry při roztáčení a vypočtěte zrychlení těžiště válce (obr. 8).

(každá šňůra 10 N; 6,5 m$\cdot$s^{-2})

Obr. 7



Obr. 8