PRÁCE – VÝKON – ENERGIE

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Přemysl Šedivý a Ivo Volf – ÚVFO Hradec Králové

Obsah

Předmluva

Vážení čtenáři,

již od 1. ročníku fyzikální olympiády je součástí práce účastníka soutěže nejen vyřešení předložených úloh, ale také studium tzv. studijního textu. V něm poněkud jiným způsobem než v učebnicích fyziky autoři zpracovávají určité fyzikální téma. Zpravidla vycházejí ze znalostí středoškolské fyziky, doplňují je však o další poznatky, ukazují jiná, zatím nevzpomínaná využití, řeší další fyzikální problémy s vybraným tématem spojené.

Čtenář – řešitel olympiády by měl přečíst vždy danou kapitolu. Ta přináší buď přehled faktů již známých, třeba v jiném uspořádání, nebo nové informace, V každé kapitole jsou pak uvedeny *příklady*, u kterých je různě podrobné řešení. Čtenář by se měl s tužkou v ruce po prostudování každého příkladu pokusit o rekonstrukci jeho řešení – provést algebraické operace, ověřit, zda mu je řešení zcela srozumitelné, zkusit si konstruovat grafy .... Na závěr každé kapitoly jsou uvedeny *úlohy* určené k samostatnému řešení. Výsledky úloh uvedené na posledních stránkách slouží k tomu, aby se čtenář přesvědčil, zda úlohu dovedl ke správnému konci.

Tato brožurka se nedá číst jako román; spíše byste měli text „luštit“ jako detektivku a snažit se sami zjistit, zda problémy vyřešíte. A hlavně nezapomeňte: ve vaší kategorii jsou vám předkládány i takové úlohy, k jejichž řešení vám studijní text podává pomocnou ruku.

A teď už vzhůru do práce.

Autoři

Úvod

Pohyby těles a jejich soustav se řídí Newtonovými zákony. Z nich můžeme pro každý konkrétní případ pohybu, u kterého známe vlastnosti působících sil, odvodit pohybové rovnice a jejich řešením zjistit přesné průběhy pohybů v závislosti na čase. Řešení pohybových rovnic však může být v praxi dosti obtížné a nás často ani nezajímá detailní průběh pohybu jednotlivých těles, ale potřebujeme spíše porovnat jejich počáteční a konečný pohybový stav. V takových případech dojdeme k výsledku jednodušeji úvahami o mechanické práci a energii.

V tomto studijním textu si zopakujeme a doplníme poznatky o výpočtu mechanické práce a o změnách mechanické energie a vnitřní energie v soustavách těles při konání mechanické práce. Především se však při řešení pohybových úloh zaměříme na využití jednoho ze základních fyzikálních zákonů – zákona zachování energie.

Při všech úvahách budeme předpokládat použití inerciální vztažné soustavy a rychlosti mnohem menší než rychlost světla ve vakuu. Pro tíhové zrychlení volíme hodnotu $g = 9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1 Výpočet mechanické práce

1.1 Práce vykonaná stálou silou při přímočarém pohybu

Působí-li na těleso, které se pohybuje *přímočarým posuvným pohybem*, stálá síla $\boldsymbol{F}$, svírající s vektorem posunutí $\Delta\boldsymbol{r}$ úhel α (obr. 1.1), pak síla $\boldsymbol{F}$ vykoná **mechanickou práci**

$$W = F|\Delta\boldsymbol{r}|\cos\alpha = Fs\cos\alpha\,. \tag{1}$$

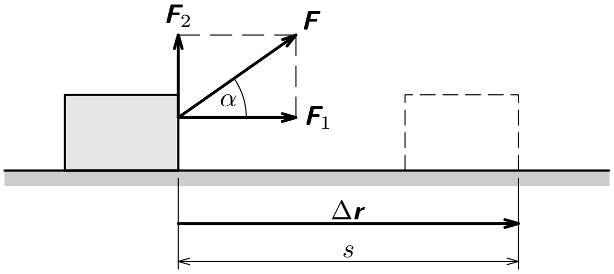
Velikost vektoru posunutí $|\Delta\boldsymbol{r}|$ je rovna dráze s, kterou těleso urazí. Jednotka práce v soustavě SI je

$$[W] = \mathrm{N}\cdot\mathrm{m} = \mathrm{J}\ (\text{joule})\,.$$

Podle velikosti úhlu α může být

$$\begin{array}{ll} W > 0 & \text{pro } 0 \le \alpha < 90^\circ \\ W = 0 & \text{pro } \alpha = 90^\circ \\ W < 0 & \text{pro } 90^\circ < \alpha \le 180^\circ \end{array}$$

Ze vztahu (1) a obr. 1.1 je zřejmé, že práci koná jen složka $\boldsymbol{F}_1$ síly $\boldsymbol{F}$, která je rovnoběžná s vektorem posunutí a její velikost je $F|\cos\alpha|$. Složka $\boldsymbol{F}_2$ kolmá k vektoru posunutí práci nekoná.

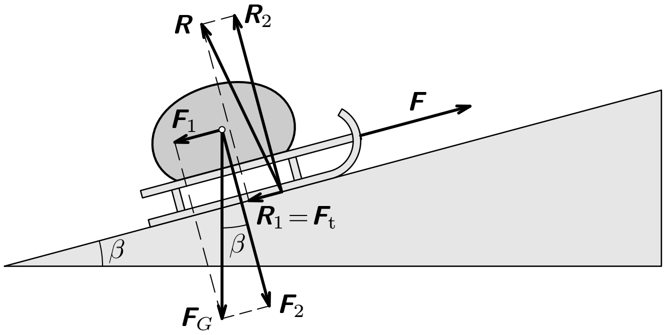


Obr. 1.1

Jestliže $W < 0$, tj. $\alpha > 90^\circ$, říkáme také, že síla $\boldsymbol{F}$ práci spotřebovává a $|W|$ definujeme jako **práci spotřebovanou**.

Příklad 1. Práce různých sil

Sáně, které i s nákladem mají hmotnost 15 kg a nacházejí se v klidu na úpatí svahu se sklonem $\beta = 15^\circ$, vytáhneme silou $\boldsymbol{F}$ o velikosti 70 N vzhůru do vzdálenosti $s = 8$ m pomocí provazu rovnoběžného se svahem (obr. 1.2). Součinitel smykového tření mezi sáněmi a svahem je $f = 0{,}12$. Určete práce které vykonají jednotlivé síly působící na sáně: a) síla provazu, b) tíhová síla, c) reakce svahu.



Obr. 1.2

Řešení

Síla provazu působí ve směru pohybu a vykoná práci $W = Fs = 560$ J.

Tíhová síla působí šikmo proti směru pohybu. Od vektoru posunutí je odchýlena o úhel $90° + \beta$. Vykoná tedy práci

$$W_G = F_G s \cos(90° + \beta) = -F_G s \sin\beta = -F_1 s = -mgs \sin\beta = -304\ \mathrm{J}\,.$$

(Spotřebuje práci 304 J.) Uplatní se jen pohybová složka $\boldsymbol{F}_1$ tíhové síly. Práce tlakové složky $\boldsymbol{F}_2$ kolmé ke směru pohybu je nulová.

Reakce svahu $\boldsymbol{R}$ má složku $\boldsymbol{R}_2$, která je kolmá ke svahu a ruší pohybový účinek síly $\boldsymbol{F}_2$, a složku $\boldsymbol{R}_1$ namířenou proti pohybu. Složka $\boldsymbol{R}_1$ je třecí síla, kterým svah sáně brzdí. Platí

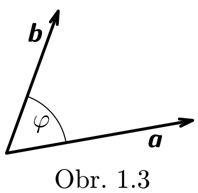
$$R_1 = F_\mathrm{t} = fR_2 = fF_2 = fmg\cos\beta\,.$$

Síla $\boldsymbol{R}$ tedy vykoná práci $W_R = -R_1 s = -fmgs\cos\beta = -136\ \mathrm{J}\,.$ (Spotřebuje práci 136 J.)

Vraťme se ještě ke vztahu (1). Někdy je účelné zapsat jej jednodušeji užitím **skalárního součinu** vektoru síly $\boldsymbol{F}$ a vektoru posunutí $\Delta\boldsymbol{r}$ jako

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\Delta\boldsymbol{r}\,. \tag{2}$$

1.2 Skalární součin dvou vektorů



Obr. 1.3

V trojrozměrném prostoru je skalární součin $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ dvou vektorů

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k} = (a_x, a_y, a_z),$$
$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k} = (b_x, b_y, b_z)$$

definován vztahem

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,. \tag{3}$$

Pro vektory *báze* $\boldsymbol{i} = (1; 0; 0)$, $\boldsymbol{j} = (0; 1; 0)$ a $\boldsymbol{k} = (0; 0; 1)$ platí

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1\,, \qquad \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{i} = 0\,.$$

Skalární součin dvou stejných vektorů $\boldsymbol{a}$ zapisujeme výrazem $\boldsymbol{a}^2$. Platí

$$|\boldsymbol{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,, \qquad \boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2\,. \tag{4}$$

Pro skalární součin vektorů platí zákon komutativní $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ a zákon distributivní $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$. Platí také $\boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$, kde k je skalár.

Jestliže dva nenulové vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ svírají úhel φ, můžeme určit velikost jejich vektorového součtu podle obr. 1.4:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 &= (a + b\cos\varphi)^2 + (b\sin\varphi)^2 = \\ &= a^2 + b^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + 2ab\cos\varphi = a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi\,.\end{aligned}$$

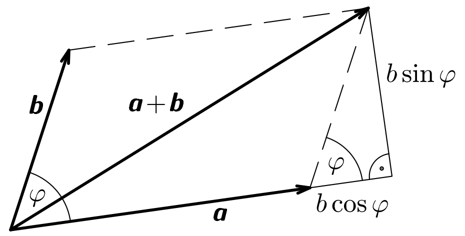
Současně platí

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}^2 = a^2 + 2(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + b^2\,.$$

Srovnáním obou vztahů dostaneme

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\varphi\,. \tag{5}$$

Skalární součin dvou nenulových vektorů je tedy roven součinu jejich velikostí a kosinu jimi sevřeného úhlu. Je roven nule právě tehdy, když $\varphi = 90°$. Pro $\varphi < 90°$ je kladný a pro $\varphi > 90°$ je záporný.



Obr. 1.4

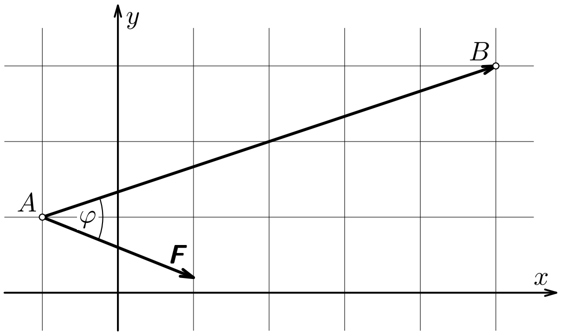
Úhel φ můžeme určit užitím vztahu

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}\,. \tag{6}$$

Užitím skalárního součinu můžeme řešit i úlohy o pohybech v rovině. V ní zvolíme počátek a osy x, y vztažné soustavy. Osa z je pak kolmá k rovině, všechny z-ové souřadnice vektorů jsou nulové a předcházející vzorce se zjednoduší.

Příklad 2

Vypočtěte práci, kterou vykoná síla $\boldsymbol{F} = (20\ \mathrm{N}; -8\ \mathrm{N})$, jejíž působiště se přímočaře posune z bodu $A = [-1\ \mathrm{m}; 1\ \mathrm{m}]$ do bodu $B = [5\ \mathrm{m}; 3\ \mathrm{m}]$ (obr. 1.5). Jaký úhel svírá vektor síly s vektorem posunutí?



Obr. 1.5

Řešení

Určíme nejprve vektor posunutí $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = (6\ \mathrm{m}; 2\ \mathrm{m})$.

Hledaná práce je

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y = (20 \cdot 6 + (-8) \cdot 2)\ \mathrm{J} = 104\ \mathrm{J}\,.$$

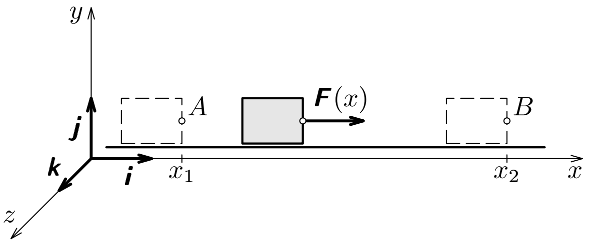
Pro odchylku vektoru síly od vektoru posunutí platí:

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r}}{F \cdot |\Delta\boldsymbol{r}|} = \frac{104}{\sqrt{464} \cdot \sqrt{40}} = 0{,}7634\,, \qquad \varphi = 40{,}2^\circ\,.$$

1.3 Výpočet práce vykonané měnící se silou

1.3.1 Jednorozměrný případ

Budeme uvažovat o tělese pohybujícím se ve směru osy x vztažné soustavy, na které působí ve směru této osy síla $\boldsymbol{F}(x)$ (obr. 1.6). Použitím výrazu $\boldsymbol{F}(x)$ vyjadřujeme závislost síly na souřadnici x jejího působiště. Takováto síla je určena její souřadnicí F_x a můžeme ji zapsat jako $\boldsymbol{F}(x) = F_x(x)\boldsymbol{i}$ a charakterizovat grafem, jaký vidíme na obr. 1.7.

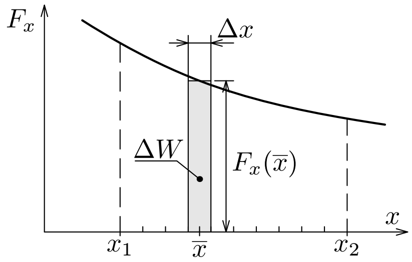


Obr. 1.6

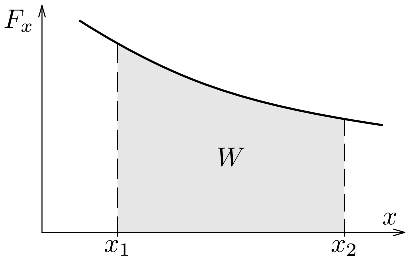
Pohyb mezi počátečním bodem A o souřadnici x_1 a konečným bodem B o souřadnici x_2 můžeme rozdělit na velký počet elementárních posunutí o délce Δx, tak malých, aby v každém z nich byla změna souřadnice F_x mnohem menší než její hodnota $F_x(\overline{x})$ ve středu $\overline{x}$ daného elementárního posunutí. Elementární práci ΔW, kterou vykoná síla $\boldsymbol{F}(x)$ během tohoto elementárního posunutí, můžeme s dostatečnou přesností určit jako

$$\Delta W \approx \boldsymbol{F}(\overline{x}) \cdot \Delta \boldsymbol{r} = [F_x(\overline{x})\boldsymbol{i}] \cdot (\Delta x \boldsymbol{i}) = F_x(\overline{x})\Delta x \boldsymbol{i}^2 = F_x(\overline{x})\Delta x\,. \tag{7}$$

Na obr. 1.7 jí číselně odpovídá plošný obsah zvýrazněného obdélníčku.



Obr. 1.7



Obr. 1.8

Celkovou práci W_{AB} vykonanou silou $\boldsymbol{F}(x)$ mezi body A a B určíme přibližně jako součet všech elementárních příspěvků

$$W_{AB} \approx \sum F_x(\overline{x})\Delta x\,.$$

Výpočet můžeme libovolně zpřesnit zvětšováním počtu elementárních posunutí N, čímž se zmenší jejich velikost $\Delta x = (x_2 - x_1)/N$. To můžeme vyjádřit zápisem

$$W_{AB} = \lim_{N\to\infty} \sum F_x(\overline{x})\Delta x\,. \tag{8}$$

Výraz na pravé straně nazýváme určitý integrál. Abychom ho nemuseli zapisovat tak složitě, píšeme krátce

$$W_{AB} = \int_{x1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Hodnota veličiny W_{AB}, tj. určitý integrál, má jednoduchý grafický význam. Číselně dává součet plošných obsahů všech elementárních obdélníčků podle obr. 1.7 při velmi jemném dělení intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$, což je plošný obsah obrazce omezeného grafem síly podle obr. 1.8. To umožňuje v jednodušších případech výpočítat určitý integrál i bez znalosti integrálního počtu.

Příklad 3

Kvádr o hmotnosti m, výšce v a hustotě ϱ je ponořen v kapalině o hustotě $\varrho_1 < \varrho$ tak, že jeho horní podstava je v hloubce h_1 pod hladinou (obr. 1.9). Jakou práci musíme vykonat, chceme-li jej zvednout tak, že dolní podstava bude ve výšce h_2 nad hladinou? Nádoba je tak velká, že se výška hladiny vytažením kvádru z vody nezmění.

Řešení

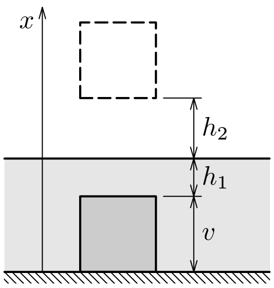
Zvolme osu x vztažné soustavy podle obr. 1.9. Pod hladinou bude kvádr nadlehčovat hydrostatická vztlaková síla. Budeme tedy muset působit silou o velikosti

$$F_G - F_{\mathrm{vz}} = mg - V\varrho_1 g = mg\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho}\right) .$$

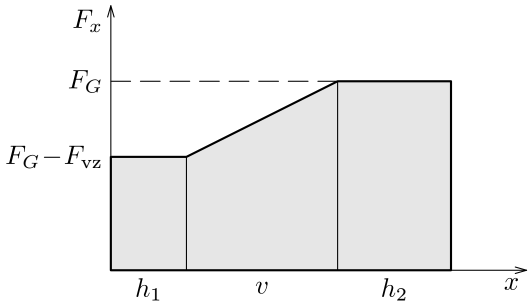
Během vynořování kvádru se bude síla rovnoměrně zvyšovat až v okamžiku úplného vynoření dosáhne velikosti $F_G = mg$. Závislost svislé souřadnice síly na souřadnici x dna podstavy znázorňuje graf na obr. 1.10. Obrazec omezený grafem se skládá z lichoběžníku a dvou obdélníků a celkovou práci vykonanou při zvednutí kvádru z něj určíme jako

$$W = (F_G - F_{\mathrm{vz}})h_1 + \frac{(F_G - F_{\mathrm{vz}}) + F_G}{2} v + F_G h_2 =$$

$$= mg\left[\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho}\right) h_1 + \left(1 - \frac{\varrho_1}{2\varrho}\right) v + h_2\right] .$$



Obr. 1.9



Obr. 1.10

1.3.2 Obecný vztah pro výpočet práce

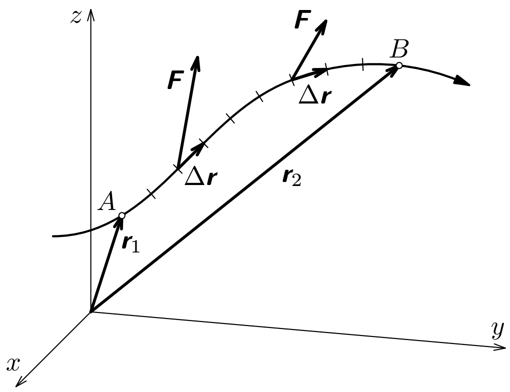
Pohybuje-li se působiště síly působící na nějaké těleso po křivočaré trajektorii mezi body A a B o polohových vektorech $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$, rozdělíme ji na velký počet velmi malých úseků. V každém z nich můžeme považovat sílu za konstantní a pohyb nahradit přímočarým posunutím $\Delta\boldsymbol{r}$ (obr. 1.11). Elementární práce vykonaná silou $\boldsymbol{F}$ na takovémto úseku je $\Delta W \approx \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r}$ a celou práci mezi body A a B můžeme přibližně určit jako

$$W_{AB} \approx \sum \boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r}\,.$$

Výpočet můžeme libovolně zpřesnit zvětšováním počtu úseků a zmenšováním jejich délky. Tak dostaneme *dráhový integrál* síly $\boldsymbol{F}$, pro který používáme zápis

$$W_{AB} = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,. \tag{9}$$

Ve složitějších případech se tedy při výpočtu práce neobejdeme bez znalosti integrálního počtu, což ale překračuje rámec tohoto studijního textu.



Obr. 1.11

Úlohy

1. Bedna byla posunuta po podlaze do vzdálenosti 2 m. Jedna ze sil , které na ni působily, měla velikost 12 N a stálý směr. Jaký úhel svírala se směrem posunutí, jestliže vykonala práci a) 24 J, b) 12 J, c) 0 J, d) −12 J, e) −20 J?

2. Vypočtěte práci, kterou vykoná stálá síla $\boldsymbol{F} = (5\ \mathrm{N}; 4\ \mathrm{N}; 3\ \mathrm{N})$ při přímočarém posunutí z bodu $A = [-1\ \mathrm{m}; 3\ \mathrm{m}; 5\ \mathrm{m}]$ do bodu $B = [3\ \mathrm{m}; 7\ \mathrm{m}, 9\ \mathrm{m}]$. Jaký úhel svírá síla s vektorem posunutí?

3. Lano o délce 24 m a hmotnosti 12 kg, které visí volně dolů z lešení, chceme vytáhnout k místu upevnění. Nakreslete graf závislosti síly $F(x)$ na délce x vytaženého lana a určete práci, kterou musíme při vytažení vykonat.

2 Mechanická energie

Každé těleso, jehož pohyb chceme studovat, je součástí nějaké **soustavy těles**. Do ní zahrnujeme *všechna tělesa*, která na uvažované těleso působí silami a pohyb nějak ovlivňují. Tak například vržené těleso se nachází v tíhovém poli Země a je brzděno okolním vzduchem. Kmitavý pohyb závaží zavěšeného na pružině popisujeme v soustavě, do které ještě patří Země, stojan, pružina a okolní vzduch. Takovou soustavu těles považujeme za **izolovanou**, můžeme-li působení ostatních těles na tělesa soustavy zanedbat.

Soustavám těles přiřazujeme důležitou, ale dosti abstraktní veličinu, která se nazývá **celková energie** soustavy a má důležitou vlastnost:

Celková energie izolované soustavy těles je konstantní.

Tento **zákon zachování energie** patří mezi nejdůležitější fyzikální zákony a uplatňuje se v celém vesmíru a každé jeho části.

Není-li soustava těles izolovaná, pak práce vykonaná působením vnějších sil na tělesa soustavy je rovna změně celkové energie soustavy. Jednotka energie v soustavě SI je proto stejná jako jednotka práce – J (joule).

Energie může mít různé formy. **Energie potenciální** (polohová) je určena vzájemnou polohou těles soustavy. **Energie kinetická** (pohybová) jednotlivých těles soustavy je určena rychlostí jejich pohybu. **Celková mechanická energie** soustavy je součtem všech potenciálních a kinetických energií všech jejich částí. Souvisí tedy s uspořádáním těles a jejich pohyby, jak je můžeme přímo pozorovat v makroskopickém měřítku. Kromě mechanické energie mají tělesa **vnitřní energii** která je dána uspořádáním a chaotickým pohybem jejich molekul. Nositelem energie jsou i silová pole (gravitační, elektromagnetické).

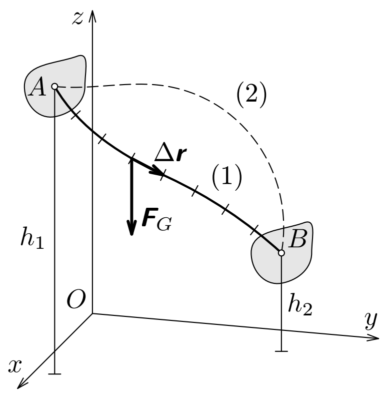
2.1 Práce vykonaná tíhovou silou v homogenním tíhovém poli Země. Potenciální energie tíhová

V homogenním tíhovém poli Země zvolme vztažnou soustavu tak, že rovina Oxy je vodorovná a kladná poloosa z směřuje vzhůru. Uvažujme o tělese o hmotnosti m, jehož těžiště se pohybuje z bodu A, který je ve výšce $h_1 = z_A$ do bodu B, který je ve výšce $h_2 = z_B$ (obr. 2.1), přičemž $h_1 > h_2$. Takový pohyb můžeme opět nahradit řadou velmi malých posunutí $\Delta\boldsymbol{r}$. Elementární práce, kterou během jednoho takového posunutí vykoná tíhová síla, určíme jako

$$\Delta W = \boldsymbol{F}_G \cdot \Delta\boldsymbol{r} = (0, 0, -mg) \cdot (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = -mg\Delta z\,.$$

Celková práce tíhové síly je pak

$$W_{AB} = \sum \Delta W = -mg \sum \Delta z = -mg(h_2 - h_1) = mgh_1 - mgh_2\,. \qquad (10)$$



Obr. 2.1

Veličinu

$$E_\mathrm{p} = mgh \qquad (11)$$

nazýváme **potenciální energie tíhová** tělesa. (Přesnější by bylo, kdybychom mluvili o potenciální energii soustavy Země – těleso). Je rovna práci, kterou by tíhová síla vykonala, kdyby se těžiště tělesa přemístilo z bodu ve výšce h do bodu v rovině os Oxy, kde je výška nulová.

Práce vykonaná tíhovou silou je rovna úbytku tíhové potenciální energie tělesa:

$$W_{AB} = E_{\mathrm{p}1} - E_{\mathrm{p}2}\,. \qquad (12)$$

Z toho je zřejmé, že nezávisí na trajektorii, po které se těžiště přemístí z výchozího bodu A do konečného bodu B.

Pokud se těžiště vrátí z bodu B zpět do bodu A, vykoná tíhová síla práci

$$W_{BA} = E_{\mathrm{p}2} - E_{\mathrm{p}1} = mgh_2 - mgh_1 = -W_{AB}\,. \qquad (13)$$

Můžeme také říci, že práce spotřebovaná tíhovou silou je rovna přírůstku tíhové potenciální energie tělesa: $-W_{BA} = E_{\mathrm{p}1} - E_{\mathrm{p}2}$.

Celková práce tíhové síly po uzavřené cestě z bodu A do bodu B po trajektorii (1) a zpět po trajektorii (2) je $W_{AB} + W_{BA} = 0$.

V naší úvaze jsme měřili výšku těžiště od roviny Oxy, kterou jsme tím zvolili jako **hladinu nulové potenciální energie**. Nad ní je potenciální energie kladná, pod ní záporná. Pokud bychom zvolili jinou vodorovnou rovinu za hladinu nulové potenciální energie a měřili výšky od ní, změnily by se E_{p1}, E_{p2} ve vztahu (12) o tutéž hodnotu a platnost vztahu by zůstala zachována.

Příklad 4

Určete, jakou práci musí vykonat lodník při vytažení lana na palubu. Lano má délku $l = 45$ m, visí volně z paluby ve výšce $h = 15$ m a zbytek je stočen na molu. Hmotnost lana je $m = 36$ kg.

Řešení

Visící část lana má délku $l_1 = 15$ m, hmotnost $m_1 = 12$ kg a vzhledem k molu má potenciální energii $E_{\mathrm{p1}} = m_1 gh/2$. Zbytek lana má vzhledem k molu potenciální energii $E_{\mathrm{p2}} = 0$. Po vytažení má celé lano vzhledem k molu potenciální energii $E_{\mathrm{p3}} = mgh$. Práce vykonaná lodníkem je rovna přírůstku potenciální energie lana:

$$W = E_{\mathrm{p3}} - E_{\mathrm{p1}} - E_{\mathrm{p2}} = mgh - m_1 g\frac{h}{2} \approx 4400 \text{ J}\,.$$

2.2 Práce vykonaná pružinou při pružné deformaci. Potenciální energie elastická

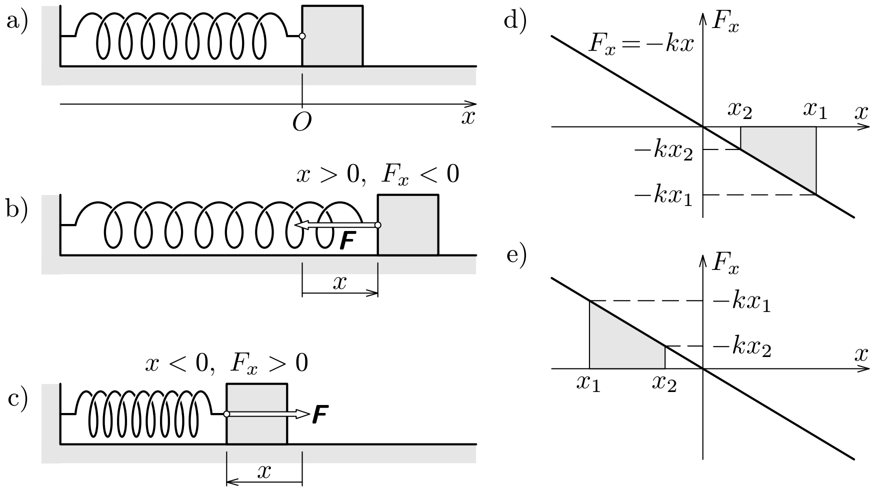
Nezatížená vodorovná pružina je jedním koncem připevněna ke svislé stěně a druhým ke kvádru, který leží na vodorovné podložce (obr. 2.2a). Osu x vztažné soustavy zvolíme rovnoběžnou s osou pružiny, počátek O je v místě upevnění pružiny ke kvádru. Vychýlíme-li kvádr ve směru osy x, působí na něj pružina silou $\boldsymbol{F}$, která má opačný směr než výchylka. Velikost síly je přímo úměrná velikosti výchylky. Při natažení pružiny (obr. 2.2b) i při jejím stlačení (obr. 2.2c) platí

$$F_x = -kx\,, \tag{14}$$

kde k je tuhost pružiny, která se udává v jednotkách $\mathrm{N \cdot m^{-1}}$.

Předpokládejme nejprve, že pružina je natažena, a výchylku kvádru zmenšíme z x_1 na x_2. V takovém případě je práce W vykonaná pružinou kladná, neboť síla pružiny má stejný směr jako vektor posunutí. Práci určíme z grafu na obr. 2.2d jako plošný obsah zvýrazněného lichoběžníku. Platí tedy

$$W_{12} = \frac{kx_1 + kx_2}{2}(x_1 - x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2\,. \tag{15}$$



Obr. 2.2

Veličinu

$$E_\mathrm{p} = \frac{1}{2}kx^2 \tag{16}$$

nazýváme **potenciální energie elastická** pružiny. Je rovna práci, kterou by pružina vykonala při přechodu ze zatíženého stavu ($x_1 = x$) do nezatíženého stavu ($x_2 = 0$). Obecně je práce vykonaná pružinou rovna úbytku její potenciální energie:

$$W_{12} = E_{\mathrm{p}1} - E_{\mathrm{p}2}\,. \tag{17}$$

Ke stejnému výsledku dojdeme z grafu na obr. 2.2e i v případě, že pružina bude stlačena a výchylku kvádru zmenšíme z $|x_1|$ na $|x_2|$. Také v tomto případě bude mít síla pružiny stejný směr jako vektor posunutí a práce vykonaná silou pružiny bude kladná.

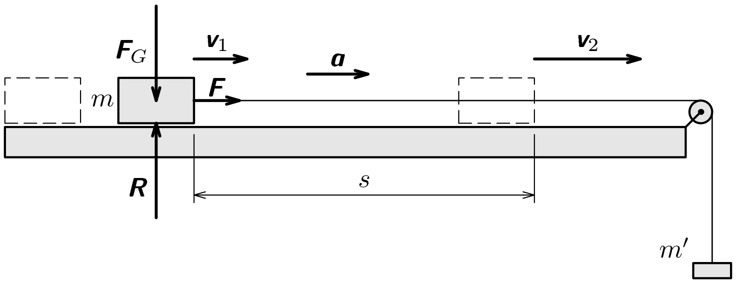
Budeme-li deformaci pružiny zvětšovat a její výchylku zvětšíme z x_2 na x_1 v případě podle obr. 2.2d nebo z $|x_2|$ na $|x_1|$ v případě podle obr. 2.2e, bude síla pružiny působit proti pohybu a práce vykonaná pružinou bude záporná. Pružina spotřebuje práci rovnou přírůstku její potenciální energie:

$$W_{21} = E_{\mathrm{p}2} - E_{\mathrm{p}1} = -W_{12}\,.$$

Celková práce vykonaná při změně výchylky z x_1 na x_2 a zpět z x_2 na x_1 bude nulová.

2.3 Práce vykonaná výslednicí sil působících na hmotný bod. Kinetická energie posuvného pohybu

Sledujme pohyb vozíku o hmotnosti m, který je tažen bez tření po vodorovné vzduchové dráze vláknem, na kterém je zavěšeno závažíčko o hmotnosti o hmotnosti m' (obr. 2.3). Na vozík působí tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$, reakce vzduchového polštáře $\boldsymbol{R}$ a síla vlákna $\boldsymbol{F}$. Ta je výslednicí všech uvedených sil, neboť síly $\boldsymbol{F}_G$ a $\boldsymbol{R}$ se vzájemně ruší. Z druhého pohybového zákona plyne, že vozík koná rovnoměrně zrychlený posuvný pohyb.



Obr. 2.3

Na dráze s vykoná síla $\boldsymbol{F}$ práci

$$W = Fs = mas = m\frac{v_2 - v_1}{t} \cdot \frac{v_1 + v_2}{2}t = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2\,, \tag{18}$$

kde v_1, v_2 jsou velikosti rychlosti vozíku na začátku a na konci sledovaného úseku. Veličina

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{19}$$

se nazývá **kinetická energie posuvného pohybu** tělesa. Při našem pokusu platí, že práce vykonaná výslednicí sil působících na vozík je rovna změně jeho kinetické energie:

$$W = \Delta E_\mathrm{k} = E_\mathrm{k2} - E_\mathrm{k1}\,. \tag{20}$$

Bude-li počáteční rychlost vozíku nulová ($v_1 = 0$), pak

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0 = E_\mathrm{k2}\,.$$

Kinetická energie vozíku je tedy rovna práci potřebné k jeho uvedení z klidu do pohybu s danou okamžitou rychlostí.

V naší úvaze jsme se zabývali rovnoměrně zrychleným posuvným pohybem tělesa, při kterém se neuplatňují jeho rozměry a tvar. Můžeme se na něj dívat jako na rovnoměrně zrychlený pohyb hmotného bodu. Vztah (20), který jsme odvodili, platí pro pohyby hmotných bodů obecně.

Práce vykonaná výslednicí sil působících na hmotný bod je rovna změně jeho kinetické energie.

Důkaz je však poněkud obtížnější a vyžaduje použití infinitezimálního počtu. Uvedeme jej pro matematicky zdatnější čtenáře.

Vyjdeme z obr. 2.4. Působí-li na hmotný bod o hmotnosti m výsledná síla $\boldsymbol{F}$, která svírá s vektorem okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$ úhel α, platí

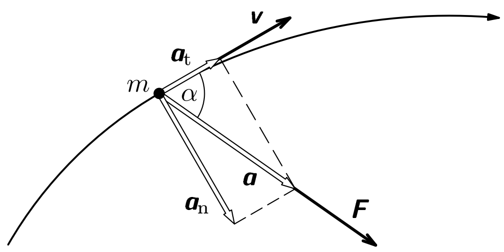
$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}\,, \qquad F\cos\alpha = ma\cos\alpha = ma_\mathrm{t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,,$$

kde a_t je tečné zrychlení. Na úseku dráhy $\mathrm{d}s$ vykoná síla $\boldsymbol{F}$ elementární práci

$$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = F\cos\alpha\,\mathrm{d}s = ma_\mathrm{t}\mathrm{d}s = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot v\mathrm{d}t = mv\,\mathrm{d}v\,.$$

Na celé trajektorii s výchozím bodem A o polohovém vektoru $\boldsymbol{r}_1$ a koncovým bodem B o polohovém vektoru $\boldsymbol{r}_2$ dostaneme integrací:

$$W = \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = m\int_{v_1}^{v_2} v\,\mathrm{d}v = m\left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right) = E_\mathrm{k2} - E_\mathrm{k1}\,. \qquad (21)$$



Obr. 2.4

Příklad 5

Určete rychlost, kterou udělíme saním v příkladu 1 na str. 5.

Řešení

Na saně působí síla provazu $\boldsymbol{F}$, tíhová síla $\boldsymbol{F}_G$ a reakce svahu $\boldsymbol{R}$. Výslednice těchto sil působí ve směru pohybu a má velikost

$$F_\mathrm{výs} = F - F_1 - R_1 = F - mg\sin\beta - fmg\cos\beta = 15\ \mathrm{N}\,.$$

Saně získají kinetickou energii, která je rovna práci výsledné síly na dráze s

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = F_\mathrm{výs} \cdot s = 120\ \mathrm{J}$$

a budou se pohybovat rychlostí

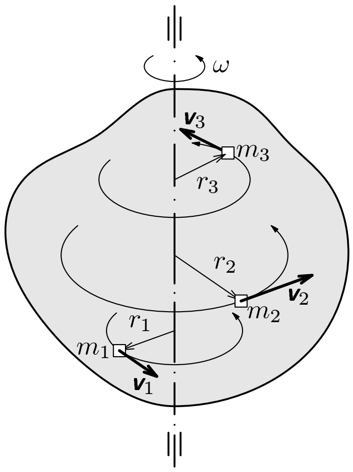
$$v = \sqrt{\frac{2E_\mathrm{k}}{m}} = 4{,}0\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Poznámka: Práci výsledné síly jsme mohli také určit jako součet

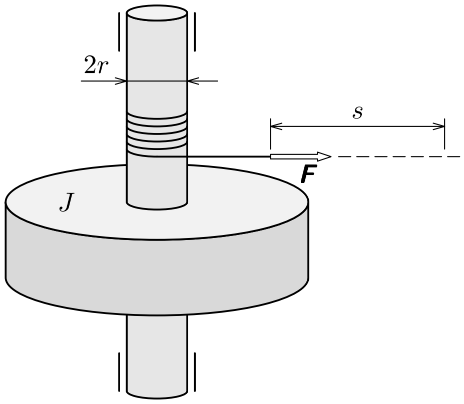
$$W_\mathrm{výs} = W + W_G + W_R = (560 - 304 - 136)\ \mathrm{J} = 120\ \mathrm{J}\,.$$

2.4 Kinetická energie tuhého tělesa otáčejícího se kolem pevné osy. Moment setrvačnosti

Tuhé těleso o hmotnosti m, které se otáčí kolem pevné osy, si můžeme představit složené z velkého počtu hmotných bodů o hmotnostech m_1, m_2 … m_N, obíhajících se stejnou úhlovou rychlostí ω po kružnicích o poloměrech r_1, r_2 … r_N v rovinách kolmých k ose (obr. 2.5).



Obr. 2.5



Obr. 2.6

Kinetická energie tělesa je součtem kinetických energií všech těchto hmotných bodů:

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J\omega^2 \,. \qquad (22)$$

Veličina

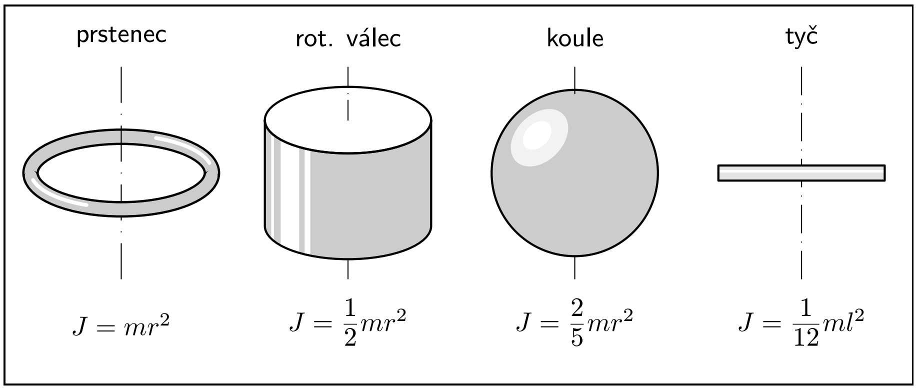
$$J = \sum m_i r_i^2$$

se nazývá **moment setrvačnosti** tělesa vzhledem k dané ose a závisí nejen na hmotnosti tělesa, ale i na rozložení látky vzhledem k ose. Na obr. 2.7 jsou přehledně uvedeny momenty setrvačnosti některých homogenních těles vzhledem k vyznačené ose. Vzorce se odvozují užitím integrálního počtu, např. ve studijním textu [4].

Roztáčíme-li setrvačník motouzem (obr. 2.6), je to obdobný děj jako rozjíždění vozíku na vzduchové dráze a platí vztahy analogické k (18, 20). Práce vykonaná silou motouzu je rovna přírůstku kinetické energie setrvačníku:

$$W = Fs = Fr\,\varphi = M\varphi = E_{\mathrm{k2}} - E_{\mathrm{k1}} = \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2 \,, \qquad (23)$$

kde φ je úhlová dráha setrvačníku a M je velikost momentu síly $\boldsymbol{F}$ vzhledem k ose otáčení.

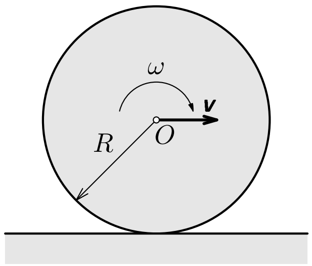


Obr. 2.7

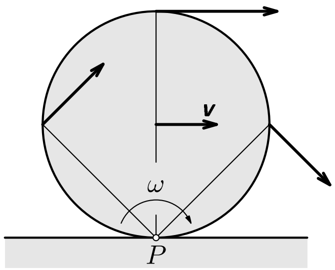
2.5 Kinetická energie tuhého tělesa konajícího valivý pohyb. Steinerova věta

Valivý pohyb rotačního tuhého tělesa můžeme popsat buď jako pohyb složený z otáčivého pohybu kolem osy procházející těžištěm a z posuvného pohybu této osy v kolmém směru (obr. 2.8) nebo jako sled malých pootočení kolem okamžitých os rotace, které vznikají v místě dotyku tělesa s podložkou (obr. 2.9). Mezi velikostí v okamžité rychlosti $\boldsymbol{v}$ osy tělesa, úhlovou rychlostí tělesa ω a poloměrem tělesa R je vztah

$$v = \omega R\,.$$



Obr. 2.8



Obr. 2.9

V prvním případě určíme kinetickou energii tělesa jako součet energie posuvného pohybu a pohybu otáčivého:

$$E_\mathrm{k} = E_{\mathrm{k_{pos}}} + E_{\mathrm{k_{rot}}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J_0}{R^2}\right)v^2 = \frac{1}{2}(mR^2 + J_0)\omega^2\,, \tag{24}$$

kde J_0 je moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm. V druhém případě určíme kinetickou energii otáčivého pohybu kolem okamžité osy rotace:

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2\,, \tag{25}$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k okamžité ose rotace. Porovnáním obou vztahů dostaneme *Steinerovu větu*: Jestliže J_0 je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose procházející jeho těžištěm, pak vzhledem k rovnoběžné ose procházející ve vzdálenosti R od těžiště má těleso moment setrvačnosti

$$J = J_0 + mR^2\,. \tag{26}$$

2.6 Obecný vzorec pro výpočet kinetické energie tuhého tělesa

Pokud pohyb tuhého tělesa není posuvný nebo otáčivý kolem pevné osy, můžeme ho v krátkém časovém intervalu považovat za složený z posuvného pohybu určeného pohybem těžiště a otáčivého kolem okamžité osy jdoucí těžištěm. Je-li $\boldsymbol{v}_T$ okamžitá rychlost těžiště a ω okamžitá úhlová rychlost tělesa, má těleso kinetickou energii

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv_T^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2\,. \tag{27}$$

Příklad 6

Země obíhá kolem Slunce po přibližně kružnicové trajektorii o poloměru $r = 1{,}5\cdot 10^{11}$ m s periodou $T_1 = 3{,}156\cdot 10^7$ s a současně se otáčí kolem osy procházející jejím středem s periodou $T_2 = 86\,164$ s. Porovnejte kinetickou energii posuvného a otáčivého pohybu za předpokladu, že se jedná o homogenní kouli o hmotnosti $m = 6{,}0\cdot 10^{24}$ kg a poloměru $R = 6{,}37\cdot 10^6$ m.

Řešení

$$E_{\mathrm{k_{pos}}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi r}{T_1}\right)^2 = 2{,}7\cdot 10^{33}\ \mathrm{J}\,,$$

$$E_{\mathrm{k_{rot}}} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 = 2{,}6\cdot 10^{29}\ \mathrm{J}\,,\qquad E_{\mathrm{k_{pos}}} \approx 10^4 E_{\mathrm{k_{rot}}}\,.$$

Úlohy

4. Těleso o hmotnosti $m = 3$ kg se pohybovalo přímočaře podél osy x a výslednice $\boldsymbol{F}(x)$ sil, které na něj působily, se měnila s polohou tělesa podle následující tabulky:

x/m	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,0	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
F_x/N	130	110	92	76	62	50	40	32	26	22	20

a) Sestrojte graf závislosti F_x na x a určete práci, kterou síla $\boldsymbol{F}(x)$ vykonala mezi body o souřadnicích $x_1 = 0{,}00$ m a $x_2 = 2{,}00$ m.

b) Jakou rychlostí se těleso pohybovalo v bodě o souřadnici x_2, jestliže v bodě o souřadnici x_1 mělo rychlost $4{,}0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$?

5. Pružina má tuhost $k = 250\ \mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Porovnejte práci, kterou musíme vykonat a) abychom ji natáhli o 15 cm, b) abychom prodloužení zvětšili z 15 cm na 30 cm.

6. S jakou frekvencí musíme roztočit ocelovou kuličku o poloměru 16 mm kolem osy jdoucí jejím středem, aby měla kinetickou energii 1 J? Hustota oceli je $\varrho = 7\,800\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

7. Moment setrvačnosti homogenní tyče o hmotnosti m a délce l vzhledem k ose procházející kolmo k tyči jejím středem je $J_0 = ml^2/12$. Pomocí Steinerovy věty odvoďte, že moment setrvačnosti téže tyče vzhledem k ose procházející koncem tyče kolmo k tyči je $J = ml^2/3$.

3 Přeměny mechanické energie

3.1 Konzervativní síly. Zákon zachování mechanické energie

Jako **konzervativní síly** označujeme takové, u nichž celková práce vykonaná po uzavřené trajektorii je nulová. V článcích 2.1 a 2.2 jsme poznali, že tuto vlastnost má síla tíhová a síla pružnosti (elastická). Mezi konzervativní síly nepatří síla smykového tření nebo síla odporu prostředí, které působí proti pohybu tělesa a jimi vykonaná práce je vždy záporná.

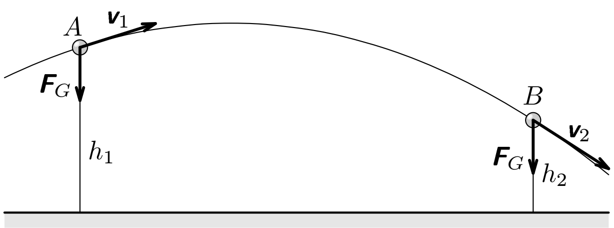
Uvažujme o tělese vrženém ve vakuu v tíhovém poli Země (obr. 3.1), na které působí jen tíhová síla. V bodě A ve výšce h_1 má rychlost $\boldsymbol{v}_1$, potenciální energii tíhovou E_{p1} a kinetickou energii E_{k1}, V bodě B ve výšce h_2 má rychlost $\boldsymbol{v}_2$, potenciální energii tíhovou E_{p2} a kinetickou energii E_{k2}. Podle (12) je práce tíhové síly rovna úbytku tíhové potenciální energie tělesa a podle (21) je práce tíhové síly rovna změně kinetické energie tělesa:

$$W_{AB} = E_{\mathrm{p1}} - E_{\mathrm{p2}} = E_{\mathrm{k2}} - E_{\mathrm{k1}}\,. \tag{28}$$

Z toho plyne pro celkovou mechanickou energii $E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{k}}$ tělesa:

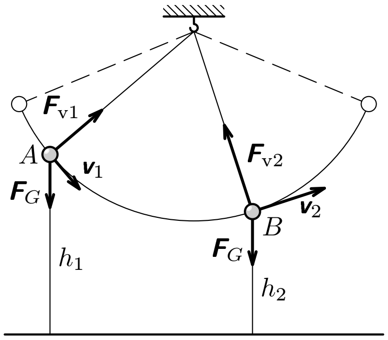
$$E_{\mathrm{m1}} = E_{\mathrm{p1}} + E_{\mathrm{k1}} = E_{\mathrm{p2}} + E_{\mathrm{k2}} = E_{\mathrm{m2}}\,. \tag{29}$$

Přitom nezáleží na volbě bodů A a B trajektorie. Celková mechanická energie tělesa je během celého vrhu konstantní.

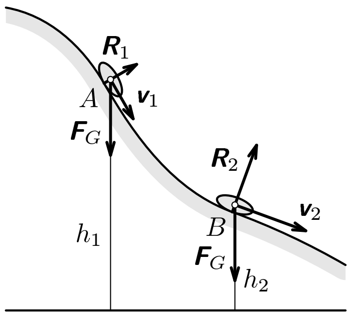


Obr. 3.1

Ke stejnému výsledku dojdeme i u kuličky, která kývá zavěšena na pevném vlákně (obr. 3.2), nebo u kusu ledu, který klouže po zledovatělém svahu (obr. 3.3), ovšem za předpokladu, že odpor vzduchu a tření ledu o svah jsou zanedbatelné. Na kuličku sice působí kromě tíhové síly vazebná síla vlákna, která ji udržuje na kruhové trajektorii, ale ta je stále kolmá ke směru pohybu a práci nekoná. Také reakce svahu působící na klouzající kus ledu je stále kolmá ke směru pohybu a práci nekoná. Výsledná práce je v obou případech rovna práci tíhové síly a proto opět platí vztahy (28) a (29).



Obr. 3.2



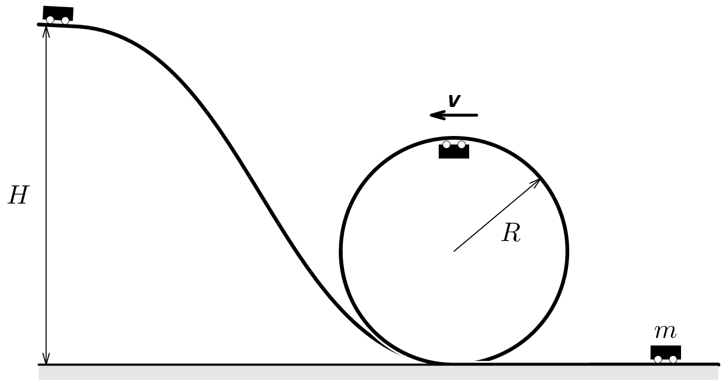
Obr. 3.3

Zobecněním těchto poznatků dostáváme **zákon zachování celkové mechanické energie**:

> **Celková mechanická energie izolované soustavy těles, ve které konají práci jen konzervativní síly, je konstantní.**

Příklad 7

Jaká musí být počáteční výška H horské dráhy na obr, 3.4, má-li vozík bezpečně projet vertikálním kruhovým obloukem o poloměru R? Valivý odpor kol, tření v ložiskách a odpor vzduchu zanedbejte. Vozík považujte za hmotný bod.



Obr. 3.4

Řešení

Dostředivá síla působící na vozík v nejvyšším bodě kruhového oblouku, tedy ve výšce $2R$, je výslednicí síly tíhové a síly, kterou na vozík působí kolejnice horské dráhy. Má-li síla kolejnic směřovat dolů, musí být rychlost vozíku tak velká, aby dostředivá síla byla větší než síla tíhová:

$$\frac{mv^2}{R} > mg\,, \quad \text{z toho} \quad \frac{1}{2}mv^2 > \frac{mgR}{2}\,.$$

Hladinu nulové potenciální energie proložíme dolním bodem kruhového oblouku. Podle zákona zachování mechanické energie musí být počáteční potenciální energie vozíku rovna součtu potenciální a kinetické energie v nejvyšším bodě oblouku: $E_{\mathrm{p1}} = E_{\mathrm{p2}} + E_{\mathrm{k2}}$,

$$mgH = mg \cdot 2R + \frac{1}{2}mv^2 > mg \cdot 2R + \frac{mgR}{2} = \frac{5}{2}mgR\,, \qquad H > 2{,}5R\,.$$

Počáteční výška vozíku musí být větší než $2{,}5R$.

3.2 Přeměny energie při působení nekonzervativních sil. Disipace mechanické energie

Vraťme se k situacím na obr. 3.1 až 3.3. Není-li při vrhu tělesa ve vzduchu nebo při kývání kuličky zavěšené na vlákně odporová síla vzduchu zanedbatelná a vznikne-li při klouzání kousku ledu po svahu navíc nezanedbatelné smykové tření, je výsledná práce dána součtem práce konzervativní tíhové síly W_{k}, která je rovna úbytku potenciální energie tíhové, a práce nekonzervativních odporových sil W_{nk}, která je záporná. Vztah (28) musíme přepsat na tvar:

$$W_{AB} = W_{\mathrm{k}} + W_{\mathrm{nk}} = E_{\mathrm{p1}} - E_{\mathrm{p2}} + W_{\mathrm{nk}} = E_{\mathrm{k2}} - E_{\mathrm{k1}}\,. \tag{30}$$

Z toho plyne

$$E_{\mathrm{m1}} + W_{\mathrm{nk}} = E_{\mathrm{p1}} + E_{\mathrm{k1}} + W_{\mathrm{nk}} = E_{\mathrm{p2}} + E_{\mathrm{k2}} = E_{\mathrm{m2}}\,. \tag{31}$$

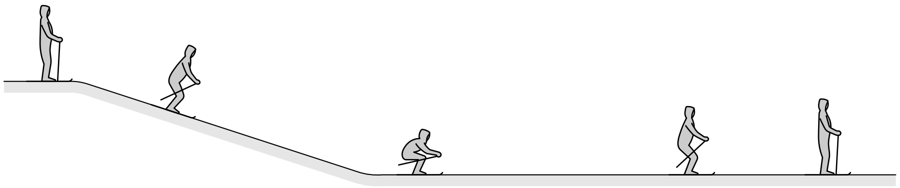
Protože $W_{\mathrm{nk}} < 0$, je $E_{\mathrm{m1}} < E_{\mathrm{m2}}$. Celková mechanická energie soustavy se působením odporových sil zmenšuje. Vzájemným působením povrchů pohybujících se těles s okolním prostředím nebo s povrchy jiných těles v místech, kde po sobě klouzají nebo na sebe narážejí, dochází k rozkmitání jejich molekul. Tělesa i prostředí se zahřívají a může docházet i k deformacím těles. Energie uspořádaného pohybu těles jako celku se tak rozptyluje na jejich částice. Tento proces se nazývá **disipace energie** a síly, které jej způsobují označujeme jako

síly disipativní. Vnitřní energie soustavy se zvětší o stejnou hodnotu, o jakou se zmenší její energie mechanická, v souladu s obecným zákonem zachování energie.

Děje, při kterých dochází k disipaci energie jsou **nevratné**. Míček, který poskakuje po podlaze, ztrácí postupně svou mechanickou energii, přičemž se on i ostatní tělesa soustavy nepatrně zahřejí. Nikdy se nestane, že by tentýž míček, ležící klidně na podlaze, začal po nepatrném zahřátí sám od sebe poskakovat, přičemž by se jeho mechanická energie zvětšovala působením disipativních sil na úkor vnitřní energie soustavy.

Příklad 8

Lyžař sjel po svahu délky $l = 20$ m se sklonem $\alpha = 18°$ na vodorovnou louku a zastavil se ve vzdálenosti $d = 30$ m od úpatí svahu (obr. 3.5). Součinitel f smykového tření mezi lyžemi a svahem byl po celou dobu jízdy konstantní – určete jeho velikost. Jak velkou rychlostí se lyžař pohyboval na konci svahu? Odpor vzduchu zanedbejte.



Obr. 3.5

Řešení

Louku zvolíme za hladinu nulové potenciální energie. Na začátku pohybu se lyžař nachází ve výšce $h = l \sin\alpha$ a má potenciální energii tíhovou. Na konci pohybu je jeho mechanická energie nulová. Práce spotřebovaná třecí silou během celé jízdy je tedy rovna počáteční potenciální energii. Třecí síla na vodorovné rovině má velikost $F_\mathrm{t} = fmg$, na svahu jen $F'_\mathrm{t} = fmg\cos\alpha$. Platí

$$mgh = F'_\mathrm{t} l + F_\mathrm{t} d\,, \qquad mgl\sin\alpha = fmgl\cos\alpha + fmgd\,,$$

$$f = \frac{l\sin\alpha}{l\cos\alpha + d} = 0{,}13\,.$$

Kinetická energie lyžaře při vjezdu na louku je rovna práci spotřebované třecí silou během jízdy po louce. Jestliže rychlost lyžaře na začátku louky měla velikost v, platí

$$\frac{1}{2}mv^2 = fmgd\,, \qquad v = \sqrt{2fgd} = 8{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

3.3 Stabilní rovnovážná poloha tělesa v poli konzervativních sil

V rovnovážné poloze je výslednice všech sil působících na těleso nulová a také výsledný moment těchto sil je nulový. Rovnovážná poloha je stabilní, jestliže při malém vychýlení tělesa na kteroukoliv stranu vznikne výsledná síla namířená proti výchylce – zpět do rovnovážné polohy. Práce vykonaná touto výslednicí během vychýlení tělesa je tedy záporná. V soustavě, kde konají práci jen konzervativní síly, to znamená, že se potenciální energie soustavy se vychýlením tělesa z rovnovážné polohy zvětšuje.

Stabilní rovnovážná poloha je stavem s minimální potenciální energií.

Příklad 9

Závaží o hmotnosti m zvedneme do výše H a zavěsíme je na pružinu o tuhosti k (obr. 3.6). Vyjádřete potenciální energii soustavy jako funkci prodloužení Δl pružiny a ověřte, že je minimální v rovnovážné poloze.

Řešení Celková potenciální energie soustavy je součtem potenciální energie tíhové a potenciální energie elastické. Její závislost na prodloužení pružiny Δl je popsáno kvadratickou funkcí, jejímž grafem je parabola (obr. 3.7):

$$E_\mathrm{p} = mgh + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = mg(H - \Delta l) + \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 =$$

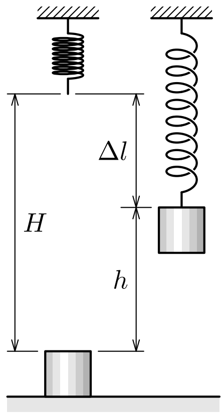
$$= mgH - \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\Delta l - \frac{mg}{k}\right)^2 .$$

Funkce dosáhne minima pro $\Delta l = mg/k$. To je splněno v rovnovážné poloze, kde tíhová síla je stejná jako síla pružiny:

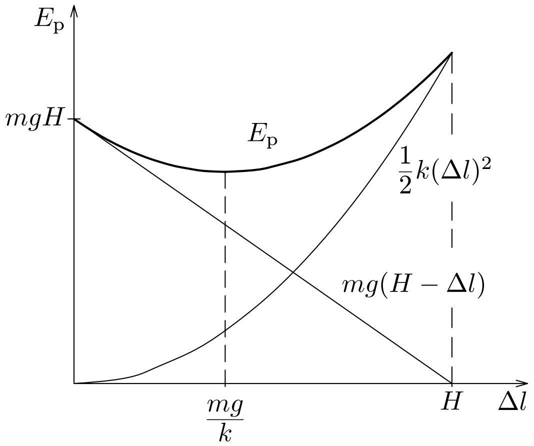
$$mg = k\Delta l\,.$$

Nad rovnovážnou polohou převládne síla tíhová, pod rovnovážnou polohou síla elastická. Výsledná síla v obou případech směřuje do rovnovážné polohy.

Rozkmitáme-li závaží vychýlením z rovnovážné polohy, bude soustava působením odporu vzduchu ztrácet mechanickou energii, až se kinetická energie zmenší na nulu a potenciální energie klesne na minimum. Závaží se zastaví v rovnovážné poloze.



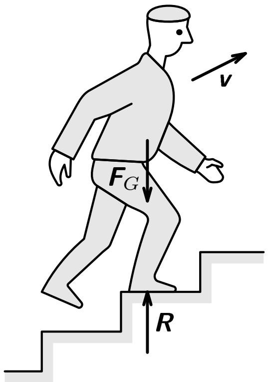
Obr. 3.6



Obr. 3.7

3.4 Vnitřní práce

Dosud jsme se zabývali pouze změnami energie v soustavách těles způsobenými silami, kterými na sebe vzájemně působila různá tělesa soustavy. Pro každý jednotlivý objekt to byly síly vnější, které měnily jen jeho pohybový stav a polohu, případně vyvolaly jeho zahřátí, ale vlastní struktura objektu se neměnila.



Obr. 3.8

Uvažujme nyní o člověku, který stoupá po schodišti stálou rychlostí (obr. 3.8). Celková mechanická energie soustavy se zvětšuje, neboť kinetická energie člověka se nemění a potenciální roste s každým nový krokem. Zanedbáme-li odpor vzduchu, působí na člověka pouze konzervativní tíhová síla Země $\boldsymbol{F}_G$ a reakce $\boldsymbol{R}$ schodu, na kterém se právě nachází. Reakce schodu práci nekoná, protože po celou dobu jednoho kroku je její působiště na místě. Co tedy zvětšuje celkovou mechanickou energii soustavy? Jsou to **vnitřní síly** svalů které pohybují kostrou člověka a konají **vnitřní práci** potřebnou k vystoupení na jednotlivé schody. Přitom spotřebovávají vnitřní energii získanou z potravy.

Podobně je při pohybu motorového vozidla k zachování nebo zvětšení jeho mechanické energie nutná vnitřní práce motoru konaná na úkor vnitřní energie obsažené v palivu. Mezi oběma příklady je však určitý rozdíl. Příčně pruhované svalstvo, které využíváme k pohybu, potřebuje k udržení svého napětí přijímat vnitřní energii i když stojíme a svaly mechanickou práci nekonají, nebo když jdeme z kopce a svaly mechanickou práci spotřebovávají. „Fyziologická práce“ a s ní související pocit únavy odpovídá spíše spotřebované vnitřní energii než vykonané mechanické práci.

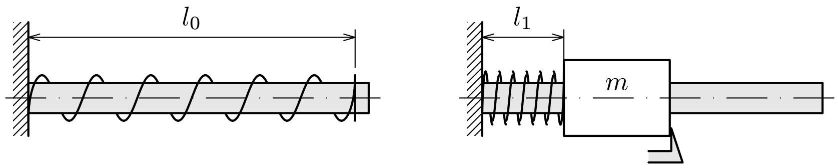
Úlohy

8. Míček hozený svisle vzhůru z balkonu ve výši $h_0 = 12$ m vystoupil do výše $h = 20$ m a spadl na zem. Určete jeho počáteční rychlost, rychlost ve výšce $h_1 = 10$ m a rychlost dopadu na zem. Odpor vzduchu zanedbejte; h a h_1 je měřeno od země.

9. Cyklista jedoucí do kopce se sklonem 5° rychlostí 22 km/h přestane šlapat. Jak daleko ještě dojede? Odporové síly zanedbejte.

10. Kámen byl vržen z výšky $h_0 = 5$ m pod elevačním úhlem $\varepsilon = 40°$ rychlostí $v_0 = 15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Do jaké výšky vystoupí? Odpor vzduchu zanedbejte. (*Návod:* V nejvyšším bodě trajektorie je velikost rychlosti kamene $v = v_0 \cos\varepsilon$.)

11. Na vodorovném válcovém trnu je navléknuta pružina délky $l_0 = 10{,}0$ cm. Pružinu stlačíme na délku $l_1 = 2{,}5$ cm pomocí dutého válečku o hmotnosti $m = 50$ g, který zachytíme zarážkou (obr. 3.9). Jakou rychlost získá váleček po uvolnění, působí-li na něj pružina před uvolněním silou $F = 35$ N? Hmotnost pružiny a tření válečku o trn zanedbejte.

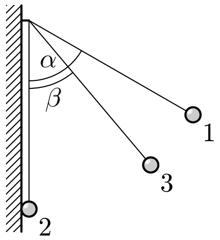


Obr. 3.9

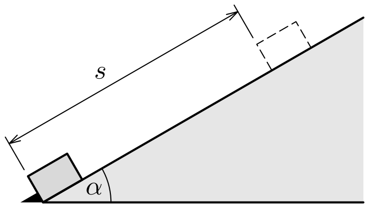
12. Automobil jedoucí rychlostí 90 km/h začal brzdit a působením stálé síly se zastavil na dráze 150 m. Jakou rychlost měl ve vzdálenosti 10 m před místem zastavení?

13. Kuličku zavěšenou na vlákně těsně u stěny vychýlíme o úhel $\alpha = 60°$ a uvolníme. Po odrazu od stěny se vychýlí o úhel $\beta = 40°$ (obr. 3.10). V jakém poměru jsou velikosti rychlostí těsně před dopadem na stěnu a těsně po odrazu od stěny?

14. Špalík ležící na dolním konci nakloněné roviny se sklonem $\alpha = 30°$ byl nárazem uveden do pohybu a zastavil se na dráze $s = 1{,}2$ m (obr. 3.11). Jaká byla jeho počáteční rychlost a jakou rychlost měl při návratu do počáteční polohy, je-li součinitel smykového tření mezi špalíkem a nakloněnou rovinou $f = 0{,}34$?



Obr. 3.10



Obr. 3.11

4 Výkon, příkon a účinnost

Veličina **výkon** P vyjadřuje, jak rychle nějaký stroj nebo jiný objekt koná práci. Určíme jej jako podíl práce ΔW vykonané ve velmi malém časovém intervalu a doby Δt, za kterou byla vykonána:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\,. \tag{32}$$

Takto definovanou veličinu někdy také nazýváme **okamžitý výkon**.

Jednotkou výkonu v soustavě SI je $[P] = \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{W}$ (watt).

Jestliže práci koná síla $\boldsymbol{F}$, jejíž působiště se pohybuje rychlostí $\boldsymbol{v}$, můžeme psát

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{F} \cdot \Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \boldsymbol{F} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = Fv \cos \alpha\,, \tag{33}$$

kde α je úhel který svírá síla $\boldsymbol{F}$ se směrem pohybu. Působí-li síla ve směru pohybu, platí

$$P = Fv\,. \tag{34}$$

Někdy vystačíme s veličinou **průměrný výkon**. Jestliže se za dobu t vykoná práce W, je průměrný výkon

$$\overline{P} = \frac{W}{t}\,. \tag{35}$$

Vodní, tepelné a elektrické motory přijímají z různých zdrojů energii a konají mechanickou práci. Přitom se část energie spotřebuje na zvýšení vnitřní energie zařízení a je tepelnou výměnou odvedena do okolí a práce W vykonaná motorem je menší než přijatá energie E_0. Podíl

$$\eta = \frac{W}{E_0} \tag{36}$$

se nazývá **účinnost** motoru. Můžeme ji také určit jako podíl výkonu motoru a **příkonu** P_0 definovaného jako podíl energie ΔE_0 přijaté za velmi krátkou dobu a této doby Δt:

$$P_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E_0}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}E_0}{\mathrm{d}t}\,, \qquad \eta = \frac{P}{P_0}\,. \tag{37}$$

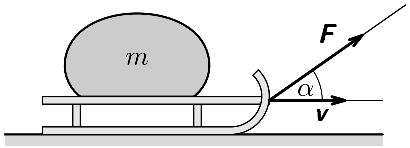
Různá zařízení v energetice posuzujeme právě podle jejich příkonu. Spotřebovanou energii pak nejčastěji vyjadřujeme v *kilowatthodinách*, kde

$$1\ \mathrm{kWh} = 1\,000\ \mathrm{W} \cdot 3\,600\ \mathrm{s} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \mathrm{J}\,.$$

Úlohy

15. Jaký příkon musí mít elektromotor jeřábu, který zvedne panel o hmotnosti 2 400 kg za 1,5 minuty do výšky 36 m, pracuje-li jeřáb s účinností 75 %?

16. Saně, které mají i s nákladem hmotnost $m = 55$ kg udržujeme v rovnoměrném pohybu po vodorovné cestě stálou rychlostí o velikosti $v = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ působením síly $\boldsymbol{F}$, která má velikost 75 N a svírá s vodorovným směrem úhel $\alpha = 35°$ (obr. 4.1). Určete součinitele f smykového tření mezi saněmi a vozovkou a výkon síly $\boldsymbol{F}$.



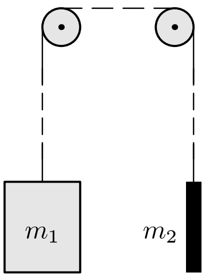
Obr. 4.1

17. V zahraniční technické literatuře se často můžete setkat s vedlejší jednotkou výkonu *koňská síla* (horsepower) 1 HP = 745,7 W. Jakou energii spotřebuje motor o příkonu 13 HP za 24 hodin?

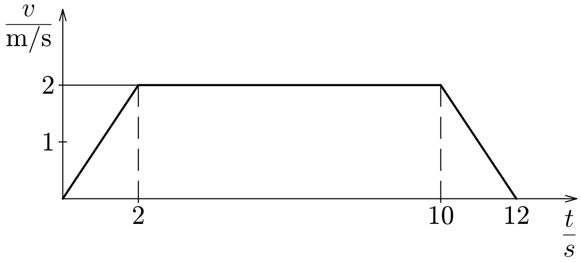
18. Kabina výtahu o hmotnosti $m_1 = 450$ kg je částečně vyvážena protizávažím o hmotnosti $m_2 = 350$ kg (obr. 4.2). Během jízdy vzhůru, která trvala celkem 12 s, závisela rychlost kabiny na čase podle grafu na obr. 4.3.

a) Určete dráhu kabiny a práci, kterou musel vykonat motor výtahu.

b) Znázorněte graficky, jak závisely na čase: síla, kterou musel motor působit na lano, a okamžitý výkon motoru.



Obr. 4.2



Obr. 4.3

Literatura

[1] Šedivý, P., Volf, I: *Rovnoměrně zrychlené a zpomalené pohyby*. Studijní text 36. ročníku FO.

[2] Šantavý, I.: *Mechanika*. Škola mladých fyziků. 1. vyd., Praha: SPN, 1993.

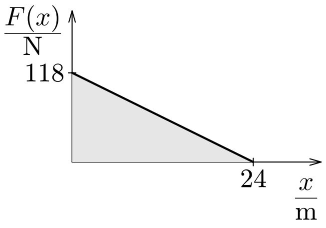
[3] Keller, F. J., Gettys, W, E., Skove, M. J.: *Physics*. 2nd ed., New York: McGraw–Hill, Inc, 1993.

[4] Vybíral, B.: *Kinematika dynamika tuhého tělesa*. Knihovnička fyzikální olympiády č. 31, 1. vyd., Hradec Králové: Vydavatelství MAFY, 1997.

Výsledky úloh

1. $0°,\ 60°,\ 90°.\ 120°,\ 146°.$ **2.** $\Delta\boldsymbol{r} = (4\mathrm{m}, 4\mathrm{m}, 4\mathrm{m});\ W = 48\ \mathrm{J};\ \varphi = 11{,}5°.$

3. Obr. V.1; $W = 1400$ J.



Obr. V.1

4. $W \approx (120{+}101{+}84{+}69{+}56{+}45{+}36{+}29{+}24{+}21)0{,}2\ \mathrm{J} = 117\ \mathrm{J};$
$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2W/m} = 9{,}7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$

5. $W_1 = 2{,}8\ \mathrm{J};\ W_2 = 8{,}4\ \mathrm{J} = 3W_1.$ **6.** $f = \sqrt{\dfrac{15E_\mathrm{k}}{16\pi^3\varrho r^5}} = 61\ \mathrm{s^{-1}}.$

7. $J = \dfrac{ml^2}{12} + m\left(\dfrac{l}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{3}ml^2.$

8. $v_0 = \sqrt{2g(h-h_0)} = 12{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}};\quad v_1 = \sqrt{2g(h-h_1)} = 14\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}};$
$v = \sqrt{2gh} = 19{,}8\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$ **9.** $s = \dfrac{v^2}{2g\sin\alpha} = 22\ \mathrm{m}.$

10. $\dfrac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \dfrac{1}{2}m(v_0\cos\varepsilon)^2 + mgH;$

$$H = \frac{v_0^2}{2g}(1-\cos^2\varepsilon) + h_0 = \frac{v_0^2\sin^2\varepsilon}{2g} + h_0 = 9{,}7\ \mathrm{m}.$$

11. $v = \sqrt{\dfrac{F(l_0-l_1)}{m}} = 7{,}2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$ **12.** $v_1 = v\sqrt{\dfrac{s_1}{s}} = 6{,}5\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$

13. $\dfrac{v_1}{v_2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1-\cos\beta}} = 1{,}46.$

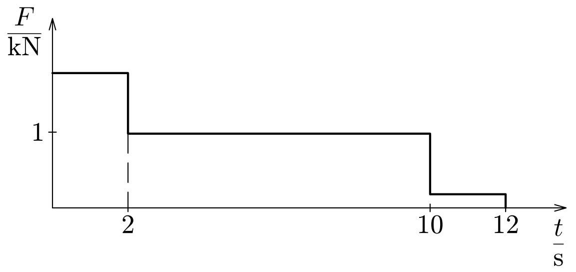
14. $v_0 = \sqrt{2sg(\sin\alpha + f\cos\alpha)} = 4{,}3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}};$
$v_1 = \sqrt{2sg(\sin\alpha - f\cos\alpha)} = 2{,}2\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}.$

15. $P = \dfrac{mgh}{\eta t} = 12{,}5\ \mathrm{kW}.$

16. $P = F\cos\alpha\cdot v = 123\ \mathrm{W};\ f = \dfrac{F\cos\alpha}{mg - F\sin\alpha} = 0{,}12.$

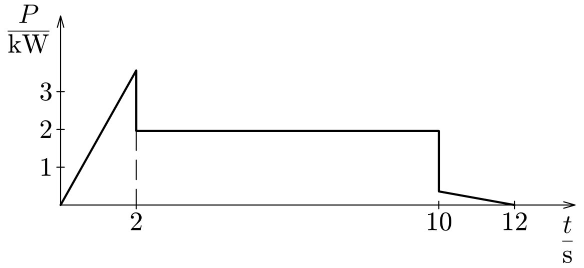
17. $W = 840\ \mathrm{MJ} = 233\ \mathrm{kW\cdot h}.$

18. $s = 20\ \mathrm{m};\ W = \Delta E_\mathrm{p1} - \Delta E_\mathrm{p2} = (m_1-m_2)sg = 19{,}6\ \mathrm{kJ};$ Obr. V.2, V.3;
1. úsek: $F = (m_1-m_2)g + (m_1+m_2)a = 1\,780\ \mathrm{N};$
výkon roste od 0 do 3 560 W.
2. úsek: $F = (m_1-m_2)g = 980\ \mathrm{N},\quad P = 1960\ \mathrm{W}.$
3. úsek: $F = (m_1-m_2)g - (m_1+m_2)a = 180\ \mathrm{N};$
výkon klesá od 360 W do 0.



$\frac{F}{\mathrm{kN}}$
1
2
10
12
$\frac{t}{\mathrm{s}}$

Obr. V.2



$\frac{P}{\mathrm{kW}}$
3
2
1
2
10
12
$\frac{t}{\mathrm{s}}$

Obr. V.3