MECHANIKA PRUŽNÉHO TĚLESA

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Bohumil Vybíral

Obsah

Předmluva

Předložený studijní text se zabývá mechanikou pevného deformovatelného tělesa – oborem, který studuje mechanická napětí a deformace vyvolané působením vnějších sil. Jde tedy o otázky související s pružností a pevností reálného tělesa a proto se tento obor v aplikované technické formě nazývá **pružnost a pevnost**, i když ani toto označení plně nevystihuje obsah tohoto technického předmětu. Zabývá se jevy, které vysvětlují pevnost např. ptačího křídla, kymácejícího se stébla trávy ve větru anebo rotující neutronové hvězdy. Konstruktérovi poskytuje metody potřebné pro návrh různých staveb a strojů. Jejich nedostatečné respektování vede ke katastrofám, se kterými se stále setkáváme (zřícené budovy, mosty, havarovaná letadla atd.).

Otázkami pružnosti a pevnosti se zabývaly nejvýznamnější osobnosti fyziky, jakými byli *G. Galilei, Jacob Bernoulli, E. Mariotte, R. Hooke, L. Euler, Ch. A. Coulomb, A. L. Cauchy, G.G. Stokes, G. Green, J. C. Maxwell* aj. Souběžně s rozvojem tohoto oboru se rozvíjely i významné matematické obory, jako teorie diferenciálních rovnic a tenzorový počet.

I přes uvedený význam je tento obor mechaniky jen okrajovou součástí současné středoškolské fyziky. Nicméně ve vysokoškolské fyzice má pevné místo v teoretické mechanice jako **mechanika pružného kontinua**. Zde jde o náročnou partii vyžadující dobrou znalost vyšší matematiky, zejména tenzorového počtu. Pro budoucí techniky na středních a vysokých školách je **pružnost a pevnost** obávaným profilujícím předmětem. Inženýr dokáže *metodou konečných prvků* (numerická diferenční metoda řešení diferenciálních rovnic, které popisují napětí a deformace) provést pevnostní výpočet tělesa (součástky, konstrukce) libovolného tvaru.

Předložená publikace může poskytnout jen stručný fyzikální úvod do mechaniky deformovatelných těles. Omezuje se jen na pružné deformace těles jednoduchého tvaru. Popisuje základní deformace: **tah**, **tlak**, **smyk**, **torzi** a **ohyb**. Při fyzikálním popisu vystačíme se základy diferenciálního a integrálního počtu. Stručný fyzikální výklad je ilustrován 10 řešenými příklady a čtenáři je předloženo 26 úloh s řešením uvedeným v závěru publikace.

Při řešení příkladů a úloh se čtenář setká s matematikou, která se běžně na střední škole neprobírá. Vhodné doplnění matematiky pro fyziku lze najít v souboru publikací *Kapitoly z matematiky pro řešitele fyzikální olympiády* [13].

1 ZÁKLADNÍ POZNATKY O PRUŽNOSTI TĚLES

1.1 Pevné pružné těleso

V mechanice se setkáváme s idealizovanými modely pevných těles. Jde-li nám o pohyb tělesa jako celku, používáme model tuhého tělesa. Síly a momenty sil působící na těleso vyvolávají u reálného tělesa stav napjatosti provázený jeho deformací. V našem textu se soustředíme na zjednodušený model pevného tělesa, u něhož vznikají jen pružné deformace, tj. po vymizení vnějších sil vymizí i deformace a těleso nabývá původního tvaru. U reálného tvárného tělesa přejdou při překročení určitého napětí pružné deformace na plastické – základ změny tvaru tělesa kováním a lisováním. U křehkého tělesa tento stav nenastává – dochází přímo k lomu.

Deformace reálných pružných těles působením sil je podmíněna jejich mikrostrukturou. Jejím základem jsou zpravidla ionty, které jsou u krystalických látek rozloženy v krystalových mřížkách. Látka ve formě monokrystalu je **anizotropní**, tj. její vlastnosti závisí na směru sil vzhledem ke stavbě krystalu. Většina technicky významných látek se vyskytuje jako **polykrystaly**. Skládají se z velkého počtu krystalků (zrn), jejichž vzájemná poloha je nahodilá a proto výsledné fyzikální vlastnosti těchto látek již nejsou závislé na směru; tyto látky jsou **izotropní**. Izotropií se vyznačuje i druhá skupina pevných látek – amorfní látky, které nemají krystalovou strukturu, protože jsou tvořeny částicemi s krátkým dosahem. Patří mezi ně např. plasty, sklo, vosk, pryskyřice, asfalt a polymery (např. kaučuk, bavlna, termoplasty aj.). V našem textu se budeme zabývat deformacemi pevných těles vytvořených z izotropních látek.

Mikrostruktura pevných látek výrazně ovlivňuje jejich mechanické vlastnosti – jejich pružnost a pevnost. Pro zkoumání makroskopických deformačních dějů však není nutné přihlížet k mikrostruktuře látky, nýbrž pevné těleso lze vyšetřovat jako pružné spojité prostředí – **pružné kontinuum**. Tento model umožňuje využít matematickou teorii spojitých funkcí jedné nebo více proměnných, přičemž rozpor s nespojitou fyzikální realitou, projevující se ve velmi malých objemech, překleneme tak, že jednotlivým bodům kontinua připíšeme veličiny, které jsou středními hodnotami z dostatečně velkého okolí bodu kontinua. Uplatňuje se zde fenomenologická („jevová“) metoda, přičemž fyzikální vlastnosti látky, podmíněné jejich mikrostrukturou, jsou popsány obecně spojitými funkcemi místa v tělese. Některé z nich lze považovat za konstanty; nazývají se **materiálové konstanty**.

U izotropních látek jsou tyto konstanty dvě a nazývají se **moduly pružnosti**: E – Youngův modul pružnosti a G – modul pružnosti ve smyku. U anizotropních látek se nazývají **elastické koeficienty** a jejich počet závisí na složitosti krystalu (u nejsložitějšího krystalu trojklonné soustavy je jich 21).

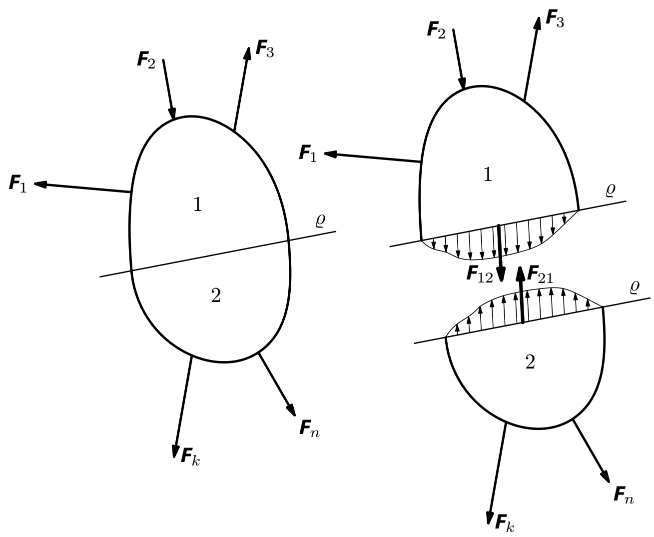
1.2 Napětí a deformace

Nechť na pružné těleso působí soustava **vnějších** sil $\boldsymbol{F}_1 \ldots \boldsymbol{F}_i \ldots \boldsymbol{F}_n$ (obr. 1), přičemž jejich výslednice je nulová: $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{0}$, tj. těleso je ve statické rovnováze. Mezi vnější síly patří:

1. objemové síly rozložené v celém tělese, tedy především tíhová síla a setrvačné síly – vznikají v neinerciální soustavě spojené s tělesem, např. síla odstředivá,

2. plošné síly, působící na povrch tělesa – především tlakové síly vyvolané tlakem kapalin a plynů,

3. vazbové síly (reakce) – síly a případně momenty sil, kterými působí na pružné těleso okolní tělesa v místech **vazeb** (např. ložiska, podpěry, vetknutí). Určují se z podmínek statické rovnováhy tělesa (viz např. [10]).



Obr. 1 Soustava vnějších sil a vnitřních sil

Působení vnějších sil uvnitř tělesa zprostředkovávají **vnitřní síly**. Jsou to síly, které působí jako reakce proti tendenci vnějších sil porušit prvek pružného tělesa, měnit jeho tvar, oddělit jednu jeho část od druhé. Určují se **metodou**

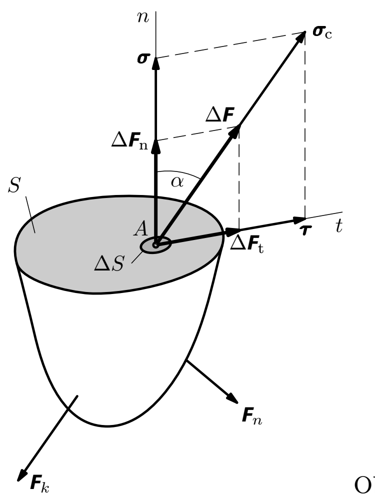
myšleného řezu. [1]) Tělesem vedeme v místě, kde máme síly určit, myšlený řez rovinou ϱ (obr. 1), kterým těleso rozdělíme na dvě části 1, 2. Označíme-li $\boldsymbol{F}_{21}$ výslednici vnitřních sil spojitě rozložených po ploše řezu, kterými působí část 2 na část 1 a analogicky $\boldsymbol{F}_{12}$, kterými působí část 1 na část 2, musí z hlediska rovnováhy být $\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = \boldsymbol{0}$. Vnitřní síly určujeme metodou myšleného řezu tak, že určíme rovnováhu její určité části (1 nebo 2).

V mechanice tuhého tělesa jsme pracovali se silou jako vektorem, který je vázán na přímku – nositelku síly – po níž ji bylo možno libovolně posunout. V mechanice pružných těles to neplatí, protože posunutím síly po přímce (změnou jejího působiště) by došlo ke změně rozložení vnitřních sil a tím ke změně napjatosti tělesa.

Rozložení vnitřních sil na ploše myšleného řezu tělesa charakterizujeme veličinou (mechanické) **napětí**. Nechť na elementární ploše ΔS v okolí bodu A plochy řezu (obr. 2) působí vnitřní síla $\Delta\boldsymbol{F}$. Pak celkové napětí v tomto bodě je

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{c}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}S}\,. \tag{1}$$

Jednotkou napětí v soustavě SI je $\mathrm{N{\cdot}m^{-2}} = \mathrm{m^{-1}{\cdot}kg{\cdot}s^{-2}} = \mathrm{Pa}$ (pascal). Protože napětí 1 Pa je velmi malé, používá se jednotka $\mathrm{MPa} = 10^6\ \mathrm{Pa} = \mathrm{N \cdot mm^{-2}}$.



Obr. 2 K pojmu napětí

[1]) Geniální metodu myšleného řezu, hojně používanou v mechanice pružného tělesa, zavedl *Leonard Euler* (1707-1783). Řezem se vnitřní síla stává silou vnější a můžeme ji určit z podmínky rovnováhy oddělené části.

Vektor napětí $\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{c}$ má dvě významné složky. Složka napětí ve směru normály n k rovině myšleného řezu se nazývá **normálové napětí $\boldsymbol{\sigma}$**, v technické praxi se značí σ. Je-li směr tohoto napětí souhlasný se směrem vnější normály, hovoříme o **tahovém napětí** (tento případ je znázorněn na obr. 2). Je-li směr napětí $\boldsymbol{\sigma}$ opačný než vnější normála, hovoříme o **tlakovém napětí**. Druhá významná složkou vektoru napětí $\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{c}$ leží v tečné rovině myšleného řezu (tedy přímo v rovině řezu, který je rovinný). Nazývá se **tečné napětí $\boldsymbol{\tau}$** a v technické praxi se značí τ. Protože toto napětí vyvolává smykovou deformaci, nazývá se rovněž **smykové napětí**.

Rozklad vektoru napětí $\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{c}$ v určitém bodě rovinného řezu zatíženého tělesa do složek můžeme vyjádřit těmito skalárními výrazy:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F_\mathrm{n}}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}F_\mathrm{n}}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} \cos\alpha = \sigma_\mathrm{c} \cos\alpha\,, \tag{2}$$

$$\tau = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F_\mathrm{t}}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}F_\mathrm{t}}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} \sin\alpha = \sigma_\mathrm{c} \sin\alpha\,, \tag{3}$$

kde ΔF_n, ΔF_t jsou velikosti průmětu síly $\Delta\boldsymbol{F}$ do n a t. Úhel α v těchto výrazech je odchylka síly $\Delta\boldsymbol{F}$ od směru vnější normály n a leží v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Z výrazu (2) tedy vyplývá $\sigma > 0$ pro tahové napětí, kdy $\alpha \in \langle 0, \pi/2)$ a $\sigma < 0$ pro tlakové napětí, kdy $\alpha \in (\pi/2, \pi\rangle$. Tečné (smykové) napětí je $\tau > 0$, neboť vzniká pro $\alpha \in (0, \pi)$.

Celkové napětí (1) je závislé na dvou vektorových veličinách – na vektoru $\Delta\boldsymbol{F}$ vnitřních sil v místě elementu plochy ΔS a na směru vnější normály plochy myšleného řezu v místě, v němž element ΔS leží. Napětí $\boldsymbol{\sigma}_\mathrm{c}$ je tedy veličina, která je charakterizována dvěma směry, což se v jeho složkách obecně vyjadřuje připojením dvou indexů. Takové veličiny se vyskytují jak ve fyzice, tak v geometrii, nazývají se **tenzory** a zabývá se jimi matematická disciplína **tenzorový počet**. [2])

---

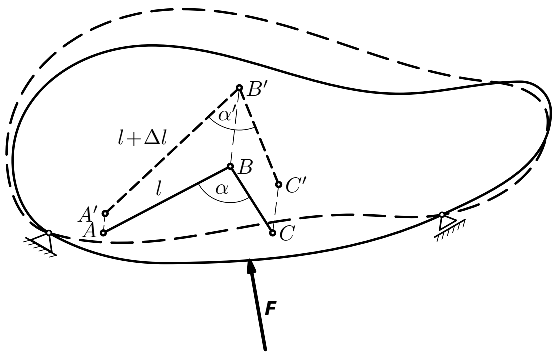
[2]) V daném případě jde o **tenzor druhého řádu**. V trojrozměrném prostoru má $3^2 = 9$ kartézských složek, které lze uspořádat do matice

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}, & \sigma_{xy}, & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx}, & \sigma_{yy}, & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx}, & \sigma_{zy}, & \sigma_{zz} \end{pmatrix}.$$

Tři složky v hlavní diagonále matice mají dva stejné indexy a popisují normálová napětí ve směru příslušných os x, y, z. Šest zbývajících složek popisuje tečná napětí v rovinách yz, xz a xy. Jsou v indexech symetrické (např. $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$) a tedy nezávislé jsou jen tři. V mechanice tuhého tělesa se setkáváme s podobným tenzorem – tenzorem setrvačnosti (viz např. [11]). Vektory lze považovat za tenzory prvního řádu (v trojrozměrném prostoru mají $3^1 = 3$ složky) a skaláry za tenzory nultého řádu ($3^0 = 1$ složka). O vektorech a tenzorech ve fyzice systematicky pojednává [12].

S tenzorovým vyjádřením napětí souvisí i tenzorové vyjádření deformace, kterou napětí vyvolává. Tedy úplný a obecný popis napjatosti tělesa vyžaduje popis pomocí tenzorové algebry a analýzy. V našem výkladu se tomuto obecnému popisu vyhneme, aniž bychom omezovali správnost řešení, neboť se budeme zabývat jen jednoduchými (i když fundamentálními) případy pružnosti tělesa. Budeme tedy nadále pracovat se složkami napětí σ a τ jako se skalárními veličinami.

Účinkem vnitřních sil vzniká v tělese jeho **deformace**. Budeme uvažovat jen **pružnou deformaci**, tj. takové změny tvaru a rozměrů, které vymizí, přestanou-li působit vnější síly. Nyní zavedeme veličiny, kterými budeme popisovat deformaci. Představme si body A, B, C nedeformovaného tělesa (obr. 3). Vzdálenost bodů A, B označíme l; úsečky AB, BC spolu svírají úhel α. Působením síly $\boldsymbol{F}$ se těleso deformuje a body přejdou do poloh A', B', C'. Orientované úsečky AA', BB', CC' se nazývají **vektory přemístění**, přičemž je lze rozložit na přemístění lineární – **posunutí** a přemístění úhlové – **pootočení**. U ohybu nosníku (viz kap. 4) se posunutí nazývá **průhyb** v určitém bodě. S pootočením se setkáme u torze (viz kap. 3), které se zde označuje **úhel zkroucení**.



Obr. 3 K pojmu deformace

Současně s přemístěním vzniká u tělesa na obr. 3 **přetvoření** charakterizované změnou délek úseček a změnou úhlu mezi nimi. Nechť úsečka AB změní délku l po přemístění do $A'B'$ na $l+\Delta l$. Tuto změnu charakterizujeme **relativním (poměrným) prodloužením**

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}}. \tag{4}$$

Je to bezrozměrná veličina, která udává prodloužení úsečky jednotkové délky. Vyjde-li ε záporné, jde o zkrácení úsečky délky l o Δl.

Vedle lineárního přetvoření vzniká úhlové přetvoření, které se v našem případě projeví změnou úhlu α na α'. Zvolíme-li body$A$, B, C tak, že $\alpha = \pi/2$, nazývá se příslušná změna úhlu **zkos**

$$\boxed{\gamma = \pi/2 - \alpha'}. \tag{5}$$

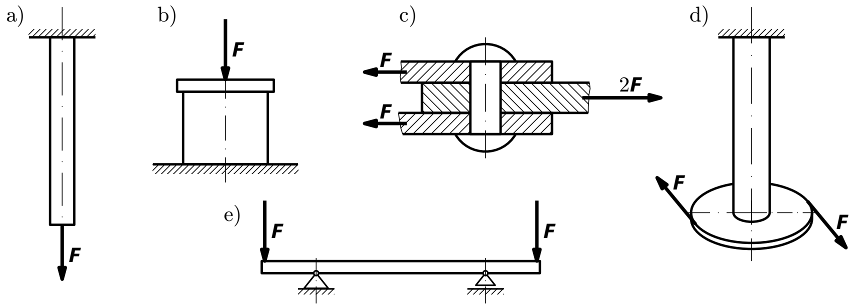
Obecně síly a momenty sil způsobují složité deformace těles. Ve zvláštních případech dochází k základním deformacím těles, jak je vyznačeno na obr. 4. Jsou to:

1. tah (*tahová deformace*) a **tlak** (*tlaková deformace*) – projevuje se u namáhání lan, prutů v příhradových konstrukcích, sloupů, řetězů,

2. smyk (*smyková deformace*) – projevuje se u namáhání šroubů, nýtů, svárů, čepů,

3. torze (*krut*) – projevuje se u namáhání hřídelů, pružin, torzních vláken,

4. ohyb – projevuje se u namáhání všech druhů nosníků, např. hřídelů, překladů, mostovek, balkonových nosníků (krakorců).



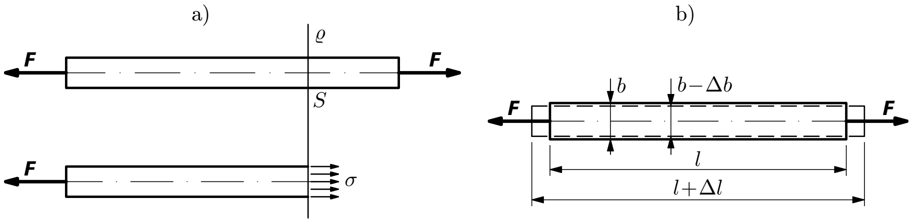
Obr. 4 Základní druhy deformací: a) tah, b) tlak, c) smyk, d) torze, e) ohyb

2 TAHOVÁ A TLAKOVÁ DEFORMACE

2.1 Tahová deformace tyče, Hookův zákon

Na přímou tyč konstantního průřezu o plošném obsahu S nechť působí v ose stálá síla $\boldsymbol{F}$ (obr. 5). Normálové napětí v libovolném místě kolmého průřezu nosníku určíme metodou myšleného řezu rovinou ϱ vedenou kolmo k jeho ose (obr. 5a). Z podmínky rovnováhy oddělené části $\sigma S - F = 0$ plyne

$$\sigma = \frac{F}{S}. \tag{6}$$



Obr. 5 Tahová deformace: a) určení napětí metodou myšleného řezu, b) změna rozměrů tyče při tahu

Působením vnější síly $\boldsymbol{F}$ se tyč prodlouží o Δl. Výsledky experimentů, které r. 1678 publikoval *Robert Hooke*, vedou k jednoduchému závěru, že prodloužení Δl je přímo úměrné velikosti působící síly $\boldsymbol{F}$, pokud její velikost nepřekročí jistou mez. Prodloužení tyče je dále přímo úměrné její délce l a nepřímo úměrné plošnému obsahu S příčného řezu podle vztahu

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES} = \frac{\sigma}{E} l, \tag{7}$$

kde E je koeficient úměrnosti, který je pro určitý materiál tyče a jeho teplotu konstanta. Veličinu E zavedl teprve r. 1807, tedy až 129 let po zveřejnění Hookova poznatku, *Thomas Young*. Na jeho počest se nazývá **Youngův modul** (anebo také modul pružnosti v tahu).

Zavedením relativního prodloužení (4) a normálového napětí (6) můžeme vztah (7) psát v obecnějším tvaru

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon}, \tag{8}$$

který se nazývá **Hookův zákon pro jednoosou napjatost (tah/tlak)**. Z tohoto vztahu je zřejmý fyzikální význam Youngova modulu. Je to napětí, které by v tyči vzniklo při $\varepsilon = 1$ (tj. $\Delta l = l$), když bychom přijali platnost zákona (8) bez omezení. Ve skutečnosti u většiny technických materiálů vzniká již při $\varepsilon < 0{,}01$ plastická deformace. Výjimku tvoří jen pryž. V tab. I v příloze jsou uvedeny hodnoty Youngova modulu pro běžné technické materiály.

Protože $F/\Delta l = ES/l$, nazývá se veličina ES/l **tuhost tyče v tahu** jako síla, která by způsobila prodloužení tyče o jednotkovou délku.

S prodloužením tyče se současně zmenšují její příčné rozměry. Např. šířka tyče b se zmenší na $b - \Delta b$ (obr. 5b). **Relativní zúžení příčných rozměrů** $\eta = \Delta b/b$ je přímo úměrné relativnímu prodloužení ε podle vztahu

$$\eta = \frac{\Delta b}{b} = \mu\varepsilon = \mu\frac{\sigma}{E}\,, \tag{9}$$

kde konstanta úměrnosti μ se nazývá **Poissonovo číslo**. U běžných technických materiálů je $\mu \in (0{,}25 \div 0{,}5)$ – viz tab. I.

2.2 Tlaková deformace tyče

Poznatky, které jsme uvedli pro pružnou tahovou deformaci, platí do jisté míry i pro tlakovou deformaci, přičemž $\sigma < 0$ $\varepsilon < 0$ (záporné relativní prodloužení = zkrácení), $\eta < 0$ (záporné relativní zúžení = rozšíření). U tlakové deformace však přistupují i otázky stability a tak relativně štíhlé přímé tyče namáhané na tlak je nutné kontrolovat na **vzpěr** (viz čl. 4.7).

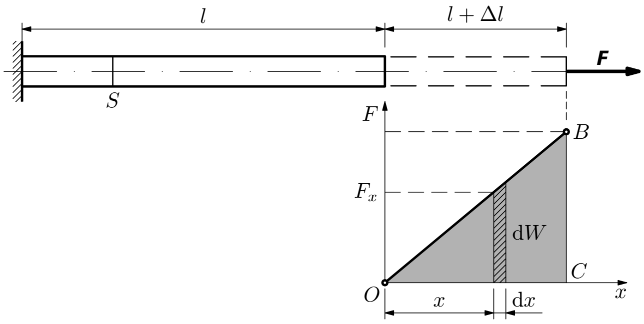
2.3 Deformační energie při tahu

Protože se tyč nachází ve statické rovnováze, projeví se práce vykonaná vnějšími silami při její deformaci přírůstkem její potenciální energie; v tomto případě **deformační energie** při tahu. Vypočtěme tedy deformační práci ze stavu bez deformace ($x = 0$) do stavu s deformací $x = \Delta l$ (obr. 6). V obecné poloze (při protažení x) má vnější sila velikost $F_x = ESx/l$ a při protažení o délku $\mathrm{d}x$ vykoná elementární práci

$$\mathrm{d}W = F_x \mathrm{d}x = \frac{ES}{l} x\,\mathrm{d}x\,.$$

Celková deformační práce při protažení o Δl je

$$W = \frac{ES}{l}\int\limits_0^{\Delta l} x\,\mathrm{d}x = \frac{ES}{l}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\Delta l} = \frac{ES}{2l}(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}F\Delta l = \frac{F^2 l}{2ES}\,. \tag{10}$$



Obr. 6 K výpočtu deformační energie při tahu

Zde jsme práci vyjádřili ještě užitím koncové velikosti síly F a prodloužení podle vztahu (7). Z obr. 6 je zřejmé, že práce (10) je úměrná ploše trojúhelníka OBC. Zavedeme-li do (10) relativní prodloužení ε a napětí σ, dostaneme pro deformační práci a tudíž i pro deformační energii U výraz

$$W = U = \frac{\varepsilon^2 E}{2} lS = \frac{\sigma^2}{2E} lS \,. \tag{11}$$

Protože $lS = V$ je objem tyče, můžeme snadno vypočítat **hustotu deformační energie při tahu**

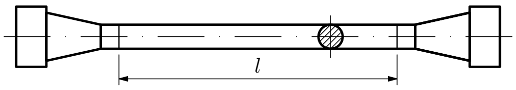
$$\boxed{u_{\mathrm{t}} = \frac{U}{V} = \frac{\varepsilon^2 E}{2} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}} \,. \tag{12}$$

Při znalosti deformační energie U_x při obecném protažení o x můžeme naopak určit velikost F_x vnější síly při tomto prodloužení. Ze vztahu (10) pro obecnou polohu x nahradíme Δl veličinou x a dostaneme

$$U_x = W_x = \frac{ES}{2l} x^2 \quad \Rightarrow \quad F_x = \frac{\mathrm{d}U_x}{\mathrm{d}x} = \frac{ES}{l} x \,. \tag{13}$$

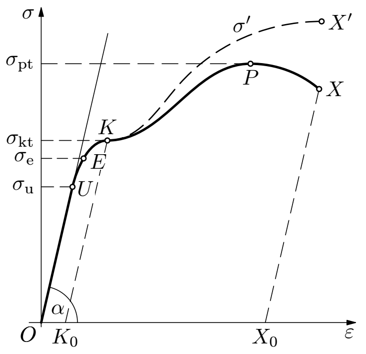
2.4 Experimentální zkoumání materiálu tahem a tlakem

Mechanické vlastnosti materiálu lze spolehlivě určit jen experimentálně, přičemž základní **statickou zkouškou** je zkouška tahem. Tyč se napíná v hydraulickém trhacím stroji pozvolně rostoucí silou, až dojde k jejímu přetržení. Přitom se měří velikost síly a odpovídající prodloužení. Zkouška musí probíhat za přesně stanovených podmínek (daných závaznou normou). Zkušební tyče jsou normalizovány; mívají zpravidla kruhový průřez (obr. 7). Pracovní délka tyče l, vyznačená ryskami, je kratší než její válcová část.



Obr. 7 Zkušební tyč pro statickou zkoušku tahem

Graf závislosti velikosti F zatěžující síly na prodloužení Δl, resp. závislosti napětí σ na relativním prodloužení ε se nazývá **pracovní diagram**, jehož příklad je na obr. 8.



Obr. 8 Pracovní diagram pro houževnatou ocel. Napětí σ je definováno podílem zatěžující síly a plošného obsahu původního (nedeformovaného) průřezu; jde o **smluvní napětí**, skutečné napětí σ' je větší, protože se plocha průřezu deformací zmenšuje.
Poznámka: Pro napětí v pracovním diagramu se nově podle ČSN přijala tato označení: $\sigma_{\mathrm{k}} = R_{\mathrm{e}}$, $\sigma_{\mathrm{pt}} = R_{\mathrm{m}}$

Pracovní diagram má několik význačných bodů:

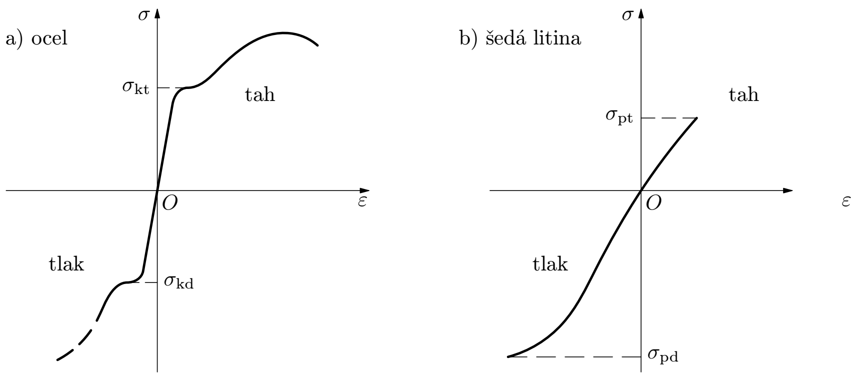
• σ_{u} – **napětí na mezi úměrnosti** (U – mez úměrnosti) vymezuje oblast (přibližné) linearity, tedy oblast, v níž je splněn Hookův zákon $\sigma = E\varepsilon$. Je zřejmé, že směrnice úsečky OU ($\mathrm{tg}\,\alpha$) je rovna Yougovu modulu E.

• σ_{e} – **napětí na mezi úměrnosti** (E – mez pružnosti) vymezuje bod, při jehož překročení vznikají trvalé deformace. (Norma vymezuje, že trvalé prodloužení musí být větší než 0,005 %.)

• σ_{k} – **napětí na mezi kluzu** (K – mez kluzu) je napětí , při němž se částečně poruší strukturální vazba v krystalické mřížce. Vzniká výrazná plastická deformace (materiál „teče“). Tento bod se nevyskytuje u křehkých materiálů.

• σ_{pt} – **napětí na mezi pevnosti v tahu**, (P – mez pevnosti), při jehož dosažení dojde k trvalému porušení materiálu (bod P). Materiál dále „teče“ a přetržení nastane v bodě X při menším smluvním napětí. (Skutečné napětí je větší – bod X'.) Bod X_0 popisuje délku přetržené tyče.

Při statické zkoušce na **tlak** se použije zkušební tělísko tvaru krychle nebo nízkého válce. Jde-li o houževnatý materiál (většina ocelí), chová se do meze úměrnosti stejně jako při tahu. Při překročení meze kluzu nabude zkušební tělísko tvaru soudku. U křehkých materiálů (litina, beton, kámen) je pevnost v tlaku výrazně větší, přičemž některé z nich (např. čistý beton, tj. bez ocelové armatury) nelze vůbec namáhat na tah. Na mezi pevnosti v tlaku nastává rozdrcení zkušebního tělíska. Porovnání úplných pracovních diagramů houževnatých a křehkých materiálů je na obr. 9. Pracovní diagramy pro křehké materiály nemají zpravidla lineární úseky, proto Hookův zákon pro ně platí jen přibližně. Mechanické pevnostní charakteristiky některých konstrukčních ocelí a křehkých materiálů jsou uvedeny v příloze v tabulkách II a III. U křehkých materiálů se uvádí i experimentální hodnota pevnosti v ohybu.



Obr. 9 Úplné pracovní diagramy: a) houževnaté materiály (ocel), b) křehké materiály (šedá litina)

2.5 Míra bezpečnosti a dovolené napětí

Tvar a velikost namáhaných těles (např. součástí strojů) se odchyluje od tvaru zkušebních tyčí. Jde zejména o změny průřezu (otvory, osazení, zápichy, závity – tvoří skupinu tzv. „vrupů“). Rovněž síly nebývají statické, naopak často velmi dynamické, např. u spalovacích motorů. Provozní teploty také ovlivňují pevnost, jsou-li vysoké anebo naopak velmi nízké. Zejména dynamické namáhání může způsobit tzv. únavové lomy v místě vrupů, z nichž se šíří mikroskopické trhliny.

Konstruktér se musí při návrhu také pojistit proti nenadálému nestandardnímu zatížení, které se může při provozu ojediněle vyskytnout a ohrozit celistvost součásti a tím činnost celého zařízení. Zavádí se proto koeficient $k > 1$

zvaný **míra bezpečnosti**, pomocí něhož se počítá **dovolené napětí** σ_{dt} pro namáhání tahem podle vztahu

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{dt}} = \frac{\sigma_{\mathrm{kt}}}{k}}, \tag{14}$$

kde σ_{kt} je napětí na mezi kluzu určené statickou zkouškou.

Z materiálů, které nemají mez kluzu, se dovolené napětí určí z napětí na mezi pevnosti podle vztahu

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{dt}} = \frac{\sigma_{\mathrm{pt}}}{k'}}, \tag{15}$$

kde $k' > k$. Volba míry bezpečnosti k, k' je především otázkou empirie získané provozem a zkušenosti konstruktéra. Při jeho volbě rozhodují současně otázky spolehlivosti a ekonomiky, které jsou vzájemně protichůdné. Často přistupují i otázky hmotnosti celého zařízení, např. u letadel.

Materiál	k, k'
Ocel	$k = 1{,}2 \div 2$
Ocel kalená	$k' = 2{,}5 \div 4$
Šedá litina	$k' = 4 \div 5$
Hliník litý	$k' = 8 \div 10$
Dřevo	$k' = 6 \div 12$
Beton	$k' = 4 \div 8$

Tab. IV – Míra bezpečnosti

Pevnostní podmínka, kterou je vázán konstruktér při návrhu, určuje, že pro vypočtené napětí musí platit

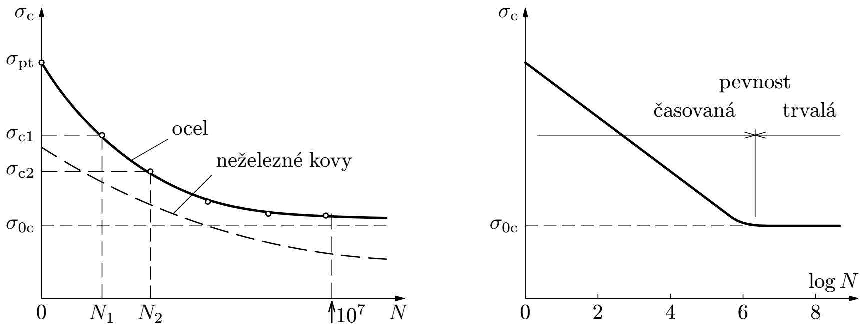
$$\boxed{\sigma \leqq \frac{\sigma_{\mathrm{dt}}}{k} \qquad \text{nebo} \qquad \sigma \leqq \frac{\sigma_{\mathrm{pt}}}{k'}}. \tag{16}$$

Zaokrouhlení vypočteného rozměru součásti, které nakonec konstruktér provede, je dáno např. celým číslem, které vyplývá z normované řady pro řešený případ (např. normované řady šroubů, nýtů, ložisek).

Zvláštní pozornost je třeba věnovat cyklicky namáhaným součástkám, u kterých může při provozu dojít k **únavovým lomům**. Je to dáno např. jejich kmitáním (u lopatek turbín, anebo listů vrtule), nebo rotací (u hřídelů, čepů kol automobilů) a jejichž lom může způsobit katastrofu. Zde je proto nutné statickou zkoušku doplnit **zkouškou meze únavy** při střídavém tahu – tlaku anebo při souměrně střídavém ohybu, kdy jsou krajní vlákna střídavě namáhána na tah a tlak. Zjišťuje se závislost **cyklického napětí** σ_c na počtu N cyklů, které zkušební tyč vydrží do vzniku únavového lomu. S rostoucím N se σ_c u oceli asymptoticky zmenšuje k hodnotě σ_{0c}, která je **napětím na mezi únavy**. Při zkoušce se vychází z poznatku, že nerozruší-li se vzorek do $1 \cdot 10^7$ cyklů, vydrží prakticky neomezený počet cyklů. Příslušný graf $\sigma_c(N)$ se nazývá *Wöhlerův diagram* (obr. 10). Pro oceli platí přibližný poznatek $\sigma_{0c} = (0{,}4 \div 0{,}6)\sigma_{pt}$. U neželezných kovů, zejména u lehkých slitin, se neobjevuje zřetelná mez únavy. Wöhlerova křivka má stále sestupný průběh, a proto je nutné součásti z těchto kovů navrhovat pro časovou mez únavy σ_N pro očekávaný počet N cyklů do konce životnosti zařízení.

Při návrhu cyklicky namáhaných součástí se dovolené napětí σ_{dt} v pevnostní podmínce (16) určí analogicky vztahu (14), tedy

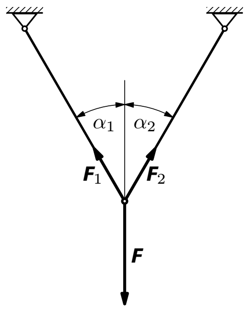
$$\sigma_{dt} = \frac{\sigma_{0c}}{k} \quad \text{resp.} \quad \sigma_{dt} = \frac{\sigma_N}{k}\,.$$



Obr. 10 Závislost cyklického napětí σ_c na počtu cyklů N (Wöhlerův diagram) v grafu lineárním (a) a semilogaritmickém (b) pro ocel

Příklad 1 – návrh prutové soustavy

Navrhněte průměry tyčí staticky namáhané prutové soustavy podle obr. 11 pro $F = 10{,}0$ kN, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 30°$. Volte ocel 10 370 ($\sigma_{kt} = 200$ MPa) a míru bezpečnosti $k = 2{,}0$.



Obr. 11 Prutová soustava

Řešení
Z podmínky statické rovnováhy plyne

$$F_1 = F_2 = \frac{F}{2\cos\alpha} = \frac{F}{\sqrt{3}}\,.$$

Pevnostní podmínka (16):

$$\sigma = \frac{F_1}{S} = \frac{2F}{\pi d^2 \cos\alpha} \leqq \sigma_{\mathrm{dt}} = \frac{\sigma_{\mathrm{kt}}}{k}\,. \tag{17}$$

Odtud $\qquad d \geqq \sqrt{\dfrac{2kF}{\pi\sigma_{\mathrm{kt}}\cos\alpha}} = 8{,}6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}\,.$

Volíme $d = 10$ mm. Ze vztahu (17) pak dostaneme skutečné napětí v tyči $\sigma = 73{,}5$ MPa < 100 MPa.

2.6 Složitější úlohy vedoucí na tah nebo tlak

K nejvýznamnějším úlohám, které vedou k Hookovu zákonu pro tah/tlak patří namáhání v ohybu. Tento případ je tak významný a složitý, že mu věnujeme samostatnou kapitolu 4. K úlohám na tah/tlak vede i řada **staticky neurčitých** úloh, tj. úloh, kdy k určení sil a momentů sil nestačí podmínky statické rovnováhy $\sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, $\sum \boldsymbol{M} = \boldsymbol{0}$ a k řešení musí přistoupit ještě **deformační rovnice**, vyjadřující podle dané situace deformační podmínku soustavy, její rozměrovou kompatibilitu. Těchto rovnic je někdy nutno sestavit více; pak hovoříme o tom, kolikrát je soustava staticky neurčitá.

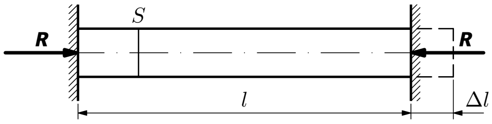
Důležitým případem je **tepelné pnutí**. Uvažujme jedenkrát staticky neurčitou soustavu, kterou je tyč vložená při teplotě t_1 do nehybných opor (např. mezi čelisti svěráku) bez předpětí (obr. 12). Po zahřátí z teploty t_1 na t_2 se tyč bude snažit prodloužit a bude rozpínat opory. Protože jsou nehybné, budou působit na tyč reakcemi $\boldsymbol{R}$, které vyvolají v tyči napětí σ. To vypočteme z rovnice $\Delta l_t + \Delta l_R = 0$, kde

$$\Delta l_t = \alpha l(t_2 - t_1)\,, \qquad \Delta l_R = \frac{Rl}{ES} = \frac{\sigma l}{E}\,,$$

kde α je teplotní součinitel délkové roztažnosti. Odtud

$$\sigma = -\alpha E(t_2 - t_1)\,. \tag{18}$$

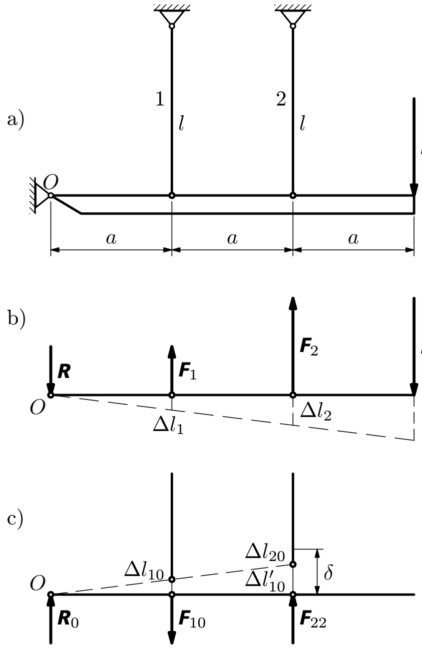
Např. u ocelové tyče ($\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$) vzniká při zvýšení teploty o 10 °C tlakové napětí $\sigma = -30$ MPa, $E = 2{,}0 \cdot 10^{11}$ Pa.



Obr. 12 Tepelné pnutí v tyči

Jiný příklad jedenkrát staticky neurčité soustavy je na obr. 13. Předpokládáme, že nosník je dokonale tuhý a pruty 1, 2 jsou pružné. Soustava by byla staticky určitá, kdyby neobsahovala prut 2. Pak bychom mohli jednoduše určit sílu působící v prutu 1 i reakci $\boldsymbol{R}$ závěsu. V daném případě obou prutů bude řešení poměrně jednoduché, budou-li pruty přesně stejně dlouhé a jejich montáž bude provedena s nulovým předpětím (obr. 13b). Jiná situace nastane, když např. prut 2 bude v důsledku výrobní nepřesnosti o δ kratší (obr. 13c). Pak při montáži bude nutné prut 1 stlačit o délku Δl_{10} a prut 2 o délku Δl_{20} natáhnout. Musí tedy být splněna deformační rovnice $\delta = -\Delta l'_{10} + \Delta l_{20}$, kde $\Delta l'_{10} < 0$ je tlaková deformace prutu 1 převedená do prutu 2. Při montáži tedy vzniknou v prutech počáteční síly $F_{10} < 0$, $F_{20} > 0$, i když $F = 0$. Po připojení vnější síly dostaneme výsledné zatížení superpozicí sil z řešení situací na obr. 13b a 13c.

Přerozdělení sil v naší soustavě by nastalo i v případě montáže bez předpětí (obr. 13b), jestliže bychom poté změnili teploty t_1, t_2 prutů 1, 2 (předpokládejme rovnoměrně po celé jejich délce), např. $t_2 < t_1$. V soustavě opět vznikne teplotní pnutí i pro $F = 0$. Podobné pnutí vzniká také např. při ochlazování litinového nebo skleněného odlitku a může vést k jeho popraskání. K aplikaci Hookova zákona pro tah vedou i některé další složitější úlohy, jak je uvedeno v příkladech 2 a 3 a v úlohách v čl. 2.7.



Obr. 13 Staticky neurčitá prutová soustava

Příklad 2 – rotující tyč

Uvažujte pružnou tyč o délce l, hustotě ϱ a konstantním obsahu S příčného průřezu, která rotuje konstantní úhlovou rychlostí ω kolem osy kolmé k podélné ose tyče (obr. 14). Vypočtěte
a) napětí σ_x v obecně vedeném kolmém řezu X tyče,
b) prodloužení Δx úseku tyče o délce x a prodloužení Δl celé tyče.
Při řešení pro jednoduchost předpokládejte, že změna rozměrů tyče je malá, což dobře splňují technické materiály s výjimkou pryže.

Řešení

a) Ve vzdálenosti x od konce tyče provedeme myšlený řez X (obr. 14). Vnitřní síly v tomto řezu musí být v rovnováze s výslednicí $\boldsymbol{F}_x$ odstředivých sil myšlené oddělené části. Na element $\mathrm{d}\xi$ působí element odstředivé síly o velikosti

$$\mathrm{d}F_x = \varrho S\omega^2(l-\xi)\mathrm{d}\xi\,.$$

Pro napětí v řezu X pak platí

$$\sigma_x = \frac{F_x}{S} = \varrho\,\omega^2 \int\limits_0^x (l-\xi)\mathrm{d}\xi = \varrho\,\omega^2 x\left(l - \frac{x}{2}\right).$$

b) K výpočtu prodloužení úseku tyče o délce x určíme nejprve prodloužení jejího elementu $\mathrm{d}\xi$, které označíme $\Delta(d\xi)$ a tato prodloužení sečteme pro všechna ξ. Vyjdeme z Hookova zákona, přičemž napětí σ_ξ v místě elementu určíme z výše uvedeného vztahu, nahradíme-li ξ za x. Pro prodloužení elementu $\mathrm{d}\xi$ tedy aplikací vztahu (7) dostaneme

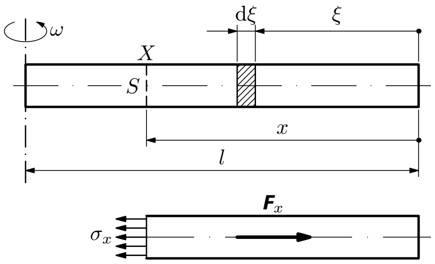
$$\Delta(\mathrm{d}\xi) = \frac{\sigma_\xi}{E}\mathrm{d}\xi = \frac{\varrho\,\omega^2}{E}\left(l\xi - \frac{\xi^2}{2}\right)\mathrm{d}\xi\,.$$

Prodloužení úseku tyče délky x dostaneme integrací od 0 do x:

$$\Delta x = \frac{\varrho\,\omega^2}{E}\int\limits_0^x \left(l\xi - \frac{\xi^2}{2}\right)\mathrm{d}\xi = \frac{\varrho\,\omega^2 x^2}{2E}\left(l - \frac{x}{3}\right).$$

Prodloužení celé rotující tyče dostaneme dosazením $x = l$:

$$\Delta l = \frac{\varrho\,\omega^2 l^3}{3E} \qquad (\text{platí pro } \Delta l \ll l)\,.$$



Obr. 14 Rotující tyč

Příklad 3 – rotující prstenec

Prstenec o vnitřním poloměru r, tloušťce $h \ll r$, šířce b a hustotě ϱ rotuje úhlovou rychlostí ω okolo rotační osy souměrnosti. Vypočtěte

a) napětí v prstenci,

b) zvětšení poloměru v důsledku rotace,

c) deformační energii a porovnejte ji s kinetickou energií.

Řešení

a) Úloha vede na prostý tah. Z prstence vyjmeme element (obr. 15), na který působí elementární odstředivá síla o velikosti

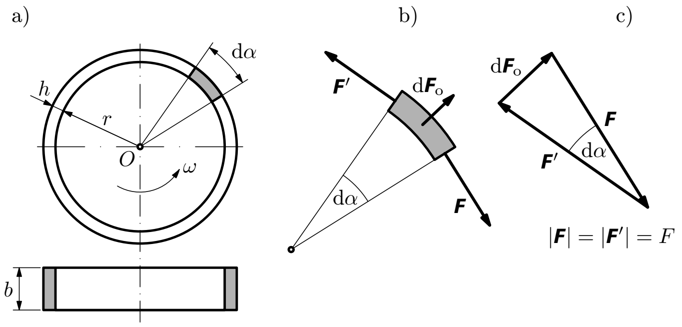
$$\mathrm{d}F_{\mathrm{o}} = \omega^2 \left(r + \frac{h}{2}\right) \mathrm{d}m \approx \omega^2 r^2 \varrho bh \, \mathrm{d}\alpha \, .$$

Aby myšleně vyjmutý element byl v rovnováze, musí účinek odstředivé síly $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{o}}$ vyrovnávat dvě vnitřní obvodové síly $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}'$ stejné velikosti podle obr. 15b. Protože tyto tři síly jsou v rovnováze, je silový trojúhelník uzavřený (obr. 15c). Pro velikost elementární síly $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_{\mathrm{o}}$ musí tedy současně platit

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{o}} = F \, \mathrm{d}\alpha \, .$$

Porovnáním obou výrazů pro $\mathrm{d}F_{\mathrm{o}}$ dostaneme velikost F vnitřní síly a tahové napětí, které síla v prstenci vyvolá:

$$F = \omega^2 r^2 \varrho bh \, , \qquad \sigma = \frac{F}{bh} = \omega^2 r^2 \varrho \, . \tag{19}$$



Obr. 15 K výpočtu napětí v rotujícím prstenci

b) Působením odstředivých sil se obvod prstence zvětší, přičemž podle Hookova zákona pro jeho relativní prodloužení platí

$$\varepsilon = \frac{2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r} = \frac{\sigma}{E} = \frac{\omega^2 \varrho}{E} r^2 \, .$$

Odtud dostaneme zvětšení poloměru prstence

$$\Delta r = \frac{\omega^2 \varrho}{E} r^3 \, .$$

Vzhledem k tomu, že hodnota E je velmi veliká ve srovnání s napětím σ, je Δr velmi malé ve srovnání s poloměrem r.

c) Podle (12) je hustota deformační energie prstence

$$u_{\mathrm{t}} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\omega^4 r^4 \varrho^2}{2E}\,.$$

Deformační energii celého prstence dostaneme vynásobením objemem V:

$$U = u_{\mathrm{t}} V = u_{\mathrm{t}} \frac{m}{\varrho} = \frac{m\omega^4 r^4 \varrho}{2E}\,.$$

Kinetická energie T prstence [3]) o momentu setrvačnosti $J = mr^2$ je

$$T = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2\,.$$

Podíl obou energií je

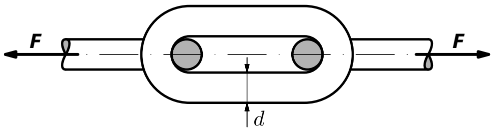
$$\frac{U}{T} = \frac{\omega^2 r^2 \varrho}{E} = \frac{\sigma}{E}\,,$$

kde σ je napětí (19), které v prstenci při rotaci vzniká. Protože z pevnostních důvodů může být pro ocel $\sigma_{\max} \approx 200$ MPa a $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ Pa, je potenciální deformační energie prstence nejméně 1000krát menší než jeho energie kinetická. Lze ji tedy zanedbat.

2.7 Úlohy ke kapitole 2

1. Řetěz

Řetěz ke zvedání břemen do hmotnosti 2 500 kg má být zhotoven z oceli 11 370 ($\sigma_{\mathrm{kt}} = 200$ MPa). Navrhněte potřebný průměr d článku. Míru bezpečnosti volte $k = 2{,}0$. Omezte se jen na namáhání tahovými silami ve větvích článku.



Obr. 16 Článek řetězu

[3]) Pro kinetickou energii užijeme místo symbolu E_{k} symbol T běžný v teoretické mechanice, abychom odstranili kolizi se značkou E pro Youngův modul.

2. Ladění houslové struny

Uvažujme ocelovou houslovou e-strunu o délce $l = 325$ mm (úsek od kobylky na konec hmatníku) a průměru $2r = 0{,}250$ mm, která má být naladěna na tón e^1 o frekvenci $f = 654$ Hz. Je dán teplotní součinitel délkové roztažnosti $\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$, $E = 2{,}05 \cdot 10^{11}$ Pa, $\varrho = 7{,}86 \cdot 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Je znám vztah mezi rychlostí zvuku ve struně c a napínající silou: $c^2 \varrho S = F$. Vypočtěte
a) velikost F napínající síly a napětí σ ve struně,
b) prodloužení struny při ladění z nenapjatého stavu.

3. Vychýlení houslové struny

Strunu z úlohy 2 v jejím středu příčně vychýlíme o $\delta = 4$ mm. Jaké bude přídavné napětí σ_p a jaké celkové napětí $\sigma_\mathrm{c} = \sigma + \sigma_\mathrm{p}$, kde σ je napětí struny po jejím naladění?

4. Ocelový drát při změně teploty

Mezi dvěma pevnými body, např. mezi dvěma domy, byl za teploty $t = 35$ °C napnut ocelový drát o průměru $2r = 2{,}00$ mm silou o velikosti $F = 30{,}0$ N. Vypočtěte
a) napětí σ v drátu,
b) napětí σ' a velikost F' napínající síly, klesne-li teplota na $t' = -5$ °C.

Teplotní součinitel délkové roztažnosti $\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$,
$E = 2{,}05 \cdot 10^{11}$ Pa.

5. Tahová zkouška

Při tahové zkoušce ocelové tyče o průměru $d = 20{,}0$ mm a délce $l = 200$ mm bylo při zatížení $F = 5{,}55 \cdot 10^4$ N změřeno prodloužení $\Delta l = 0{,}172$ mm a příčné zúžení $\Delta d = 4{,}9 \cdot 10^{-3}$ mm. Tyto hodnoty byly určeny za stavu pod mezí pružnosti. Určete napětí, Youngův modul a Poissonovo číslo zkoumané oceli.

6. Podpěrný sloup

Ve stavební konstrukci je třeba navrhnout relativně krátký sloup z šedé litiny, jehož průřez má tvar mezikruží o vnějším průměru $d = 100$ mm. Na sloup připadá tíhová síla velikosti $2{,}5 \cdot 10^5$ N. Vypočtěte minimální tloušťku stěny sloupu, jestliže $\sigma_\mathrm{pd} = 500$ MPa. Volte $k' = 5{,}0$.

7. Důlní lano

Důlní lano o délce $l = 1\,000$ m, plošném obsahu příčného řezu všech drátů $S = 500\ \mathrm{mm}^2$, délkové hustotě $\mu = 3{,}95\ \mathrm{kg \cdot m^{-1}}$ a Youngově modulu $E =$

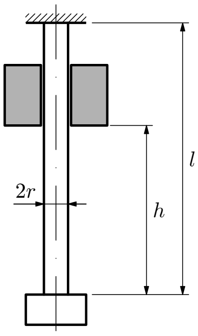
$= 8{,}80 \cdot 10^{10}$ Pa [4]) je svisle zavěšeno. Vypočtěte
a) prodloužení Δl_0 v důsledku vlastní tíhy lana,
b) prodloužení Δl a největší napětí v laně po zavěšení těžní klece o hmotnosti $m = 3\,000$ kg.

8. Nalisovaný kroužek

Navrhněte stavěcí kroužek, který po nalisování na hřídel o poloměru $r = 25{,}0$ mm má zachytit osovou sílu o velikosti $F_a = 2\,000$ N. Kroužek o šířce $b = 6{,}00$ mm bude vyroben z oceli 12 050 ($\sigma_{pt} = 650$ MPa), míru bezpečnosti volte $k' = 3{,}0$, koeficient tření ve stykové ploše $f = 0{,}10$. Vypočtěte tloušťku h kroužku, potřebný minimální přesah poloměru Δr_{min} a ohřátí kroužku pro snadnou montáž na hřídel o teplotě 25 °C. teplotní součinitel délkové roztažnosti $\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, $E = 2{,}0 \cdot 10^{11}$ Pa.

9. Padající závaží (princip bucharu)

Vypočtěte poloměr svislé ocelové tyče o délce $l = 2{,}00$ m (obr. 17) namáhané rázem závaží o hmotnosti $m = 20{,}0$ kg při pádu z výšky $h = 1{,}60$ m na zarážku. Volte $\sigma_d = 200$ MPa. Porovnejte napětí při tomto dynamickém účinku závaží s jeho statickým účinkem (a pochopíte princip kladiva resp. bucharu při kování). $E = 2{,}0 \cdot 10^{11}$ Pa.



Obr. 17 Padající závaží

10. Drát jako staticky neurčitá soustava

Na ocelový drát vodorovně napnutý mezi pevnými body vzdálenými $2l = 5{,}00$ m silou $F = 30{,}0$ N zavěsíme do jeho středu závaží o hmotnosti $m = 4{,}00$ kg. Je dán poloměr drátu $r = 1{,}00$ mm, $E = 2{,}05 \cdot 10^{11}$ Pa. Vypočtěte

[4]) Hodnota Youngova modulu je výrazně menší než u ocelové tyče, protože lano je spleteno z velkého množství jednotlivých drátů.

a) sílu F_0, o kterou vzroste napínající síla v drátu,
b) celkové napětí σ_c v drátu,
c) délku, o kterou se posune střed drátu po zavěšení závaží.

Návod: Řešení úkolu a) vede na rovnici třetího stupně, kterou však lze zjednodušit předpokladem, že $F \ll F_0$.

11. Rozladění piana

a) Ocelová struna piana naladěná na základní tón a^1 o frekvenci $f = 440$ Hz má délku 40 cm. Určete normálové napětí struny. Víme, že fázová rychlost příčného vlnění na struně je určena vztahem

$$v = \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}},$$

kde σ je normálové napětí struny a $\varrho = 7\,900\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ je hustota materiálu, ze kterého je struna vyrobena.

b) Struny piana jsou napnuty na masivním litinovém rámu. Přeneseme-li piano ze studeného prostředí do vyhřáté místnosti, dojde k jeho rozladění, protože tenké struny se rychle zahřejí na teplotu místnosti, zatímco rám se bude ohřívat jen zvolna. Jak se změní frekvence základního tónu struny z úlohy a), zvýší-li se její teplota o 10 K a teplota rámu se nezmění? Teplotní součinitel délkové roztažnosti oceli $\alpha = 1{,}5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K^{-1}}$, Youngův modul pružnosti $E = 2{,}2 \cdot 10^{11}$ Pa.

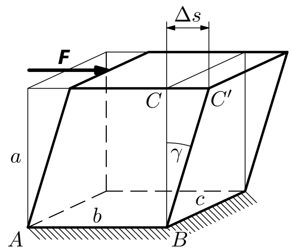
3 SMYKOVÁ DEFORMACE A TORZE

3.1 Hookův zákon pro deformaci smykem

Nechť na kvádr o rozměrech a, b, c působí ve stěně bc ve směru hrany b síla $\boldsymbol{F}$. Protilehlá stěna bc nechť je upevněna (obr. 18). Pak nastane zkosení hranolu, přičemž posunutí horní stěny označíme Δs. Toto posunutí je přímo úměrné působící síle, délce hrany a a nepřímo úměrné plošnému obsahu $S = bc$:

$$\Delta s = \frac{Fa}{GS} \tag{20}$$

Zde G je **modul pružnosti ve smyku**. Vztah (20) je analogický vztahu (7) pro výpočet prodloužení při tahu a nazývá se **Hookův zákon pro smyk**.



Obr. 18 Kvádr deformovaný smykem

Vztah (20) dále upravíme. Z obr. 18 je zřejmé, že pro malé deformace můžeme psát

$$\frac{\Delta s}{a} = \operatorname{tg}\gamma \approx \gamma\,, \tag{21}$$

kde γ je **zkos**. Tuto veličinu jsme zavedli v článku 1.2 jako úhlové přetvoření – v případě podle obr. 18 vyjadřuje úhel, o který při deformaci vzroste úhel $\pi/2$ mezi úsečkami BA, BC. Dále je zřejmé, že ve výrazu (20) je $F/S = \tau$ **tečné napětí**. Pak můžeme Hookův zákon pro smyk psát v jednoduchém tvaru

$$\boxed{\tau = G\gamma\,,} \tag{22}$$

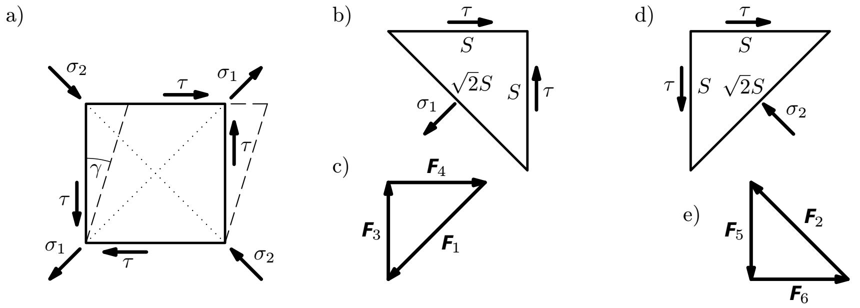
který je analogický vztahu $\sigma = E\varepsilon$ (Hookův zákon pro tah/tlak).

Ke dvěma materiálovým konstantám E, μ, které pružnou látku charakterizují při tahové/tlakové deformaci, přistupuje u smykové deformace konstanta G – modul pružnosti ve smyku. Mechanika pružného kontinua (viz např. [1], [3], [7]) ukazuje, že mezi těmito konstantami existuje jednoznačný vztah

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}\,, \tag{23}$$

takže nezávislé jsou jen dvě konstanty. Experimentálně se snadněji určují E a G. Poissonovo číslo se vypočte z (23).

Mechanika pružného kontinua rovněž ukazuje (viz např. [3], [7]), že napjatost vznikající v určitém elementu tělesa namáhaného prostým smykem je dvojosá (rovinná). Jestliže při jednoosé napjatosti byl stav popsán jedním (hlavním) napětím σ, pak u dvojosé napjatosti jsou tato napětí dvě (σ_1, σ_2). Užitím podmínky statické rovnováhy pro element tělesa ve tvaru krychle o stěnách plošného obsahu S určíme vztah mezi σ_1, σ_2 a tečným napětím τ působícím ve stěnách tohoto elementu (obr. 19a).



Obr. 19 Napjatost při smyku

Krychli nejprve rozdělíme myšleným úhlopříčným řezem o plošném obsahu $S\sqrt{2}$, jehož normála má směr hlavního napětí σ_1 (obr. 19b). Aby vnitřní síly o velikostech $F_1 = \sigma_1 S\sqrt{2}$, $F_3 = F_4 = \tau S$ působící ve stěnách této „půlkrychle“ byly v rovnováze, musí tvořit uzavřený pravoúhlý silový trojúhelník (obr. 19c). Musí tedy platit

$$F_1^2 = F_3^2 + F_4^2\,, \quad \text{neboli} \quad (\sigma_1 S\sqrt{2})^2 = 2(\tau S)^2\,, \quad \text{resp. } \sigma_1^2 = \tau^2.$$

Rovnice má dva kořeny stejné velikosti a opačného znaménka, z nichž fyzikální význam má kořen $\sigma_1 = \tau$, neboť $\sigma_1 > 0$ je tahové napětí.

Provedeme nyní myšlený úhlopříčný řez elementární krychle rovinou kolmou k rovině v předcházejícím případě (obr. 19d). Na stěnách působí vnitřní síly o velikostech $F_2 = \sigma_1 S\sqrt{2}$, $F_5 = F_6 = \tau S$. Pro statickou rovnováhu musí analogicky platit $F_2^2 = F_5^2 + F_6^2$; po dosazení dostaneme $\sigma_2^2 = \tau^2$. Fyzikální význam má kořen $\sigma_2 = -\tau$, neboť napětí $\sigma_2 < 0$ je tlakové.

Shrnuto: prostý smyk představuje dvojosou napjatost charakterizovanou hlavními napětími $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_2 = -\tau$.

3.2 Deformační energie při smyku

Analogicky výpočtu deformační energie při tahu (čl. 2.3, výraz(10)) určíme deformační energii při smyku:

$$U = W = \frac{1}{2}F\Delta s = \frac{F^2 a}{2GS} = \frac{\tau^2}{2G}aS\,,$$

kde jsme využili vztahu (20), přičemž $aS = V$ je objem kvádru. Pro hustotu deformační energie při smyku dostaneme

$$\boxed{u_\mathrm{s} = \frac{U}{V} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{\gamma\tau}{2} = \frac{\gamma^2 G}{2}\,,} \tag{24}$$

který je zcela analogický vztahu (12).

3.3 Dovolené napětí při smyku

Při namáhání ve smyku jde o zvláštní případ dvojosé napjatosti, kdežto pevnostní zkouška se provádí pro jednoosou napjatost. Existuje několik pevnostních hypotéz (viz např. [3], [4], [7]), které (s omezenou spolehlivostí – v závislosti na tom, zda jde o materiál houževnatý či křehký) stanoví jisté jednoosé napětí k posouzení víceosé napjatosti. My se zde na velmi omezené ploše textu nemůžeme tímto problémem podrobněji zabývat; jen uvedeme tyto typické případy pevnostních podmínek:

- Pro houževnaté (tvárné) materiály musí podle *hypotézy deformační energie změny tvaru* pro skutečné tečné napětí platit

$$\tau \leqq \tau_\mathrm{d} = \frac{\sigma_\mathrm{dt}}{\sqrt{3}} \approx 0{,}57\sigma_\mathrm{dt}\,, \tag{25}$$

  kde σ_dt je dovolené napětí (14) pro jednoosou napjatost.
- Pro křehké materiály (např. pro litinu) musí podle *hypotézy maximálního normálového napětí* platit

$$\tau \leqq \tau_\mathrm{d} = \sigma_\mathrm{dt}\,, \tag{26}$$

  kde σ_dt je dáno vztahem (15).

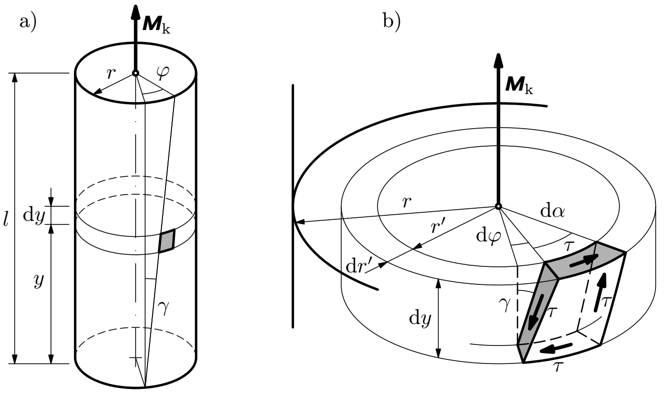
3.4 Torze rotačního válce

Teorii krutu rotačního válce vypracoval *Ch. A. Coulomb* (1736-1806) a uvedl ji v první souborné práci o mechanice pružných těles, která byla publikována

r. 1776. Práce obsahuje všechny základní případy deformace těles včetně elementární teorie ohybu nosníku. Coulomb využil svých poznatků o torzi k sestrojení prvních torzních vah r. 1784, které mu umožnily r. 1785 objevit zákon o silovém působení elektrických nábojů, dnes známý jako *Coulombův zákon*.

Při krutu (torzi) válce s kruhovým průřezem na jednom konci upevněném a na druhém konci namáhaném vnější silovou dvojicí dochází ke vzájemnému stáčení průřezů kolmých k podélné ose válce. Experimentálně lze ověřit, že u rotačního válce zůstávají kruhové průřezy i po deformaci rovinné a radiální úsečky přímé. Průřezy se tedy otáčejí kolem osy válce, aniž se deformují. Celkové otočení horního kruhového průřezu válce oproti spodnímu vetknutému průřezu označíme φ. Nazývá se **úhel zkroucení**. Moment dvojice vnějších sil se nazývá **kroutící moment**; jeho velikost označíme M_k. Je zřejmé, že při krutu válce vzniká smykové napětí τ. Nyní si odvodíme vztahy mezi veličinami M_k, τ, φ.

U pravoúhlého elementu vymezeného na povrchu válce dvěma soumeznými površkami a dvěma soumeznými kružnicemi (obr. 20a) se po deformaci krutem změní jen úhly, délky jeho stran zůstanou prakticky nezměněny. Element je namáhán prostým smykem.



Obr. 20 K popisu deformace při torzi

Pro výpočet napětí vytkneme z válce o délce l elementární trubici o výšce $\mathrm{d}y$, poloměru r' a tloušťce $\mathrm{d}r'$ podle obr. 20b. Z této trubice vyjmeme hranolek, který se při deformaci zkosí. Pro jeho zkos zřejmě platí

$$\gamma = \frac{r'\,\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} = r'\vartheta\,, \tag{27}$$

kde

$$\vartheta = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}y} = \frac{\varphi}{l} \tag{28}$$

je poměrné zkroucení neboli **zkrut** válce. Je to úhel zkroucení připadající na jednotkovou délku válce (tyče). Po dosazení (27) do Hookova zákona (22) dostaneme

$$\tau = \frac{G\varphi}{l} r' \,. \tag{29}$$

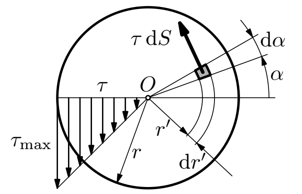
Tečné napětí podle (29) je úměrné vzdálenosti r' elementu od osy válce. Element ležící v ose válce není tedy namáhán, kdežto element ležící u povrchu válce je namáhán nejvíce (obr. 21).

Vnější kroutící moment $\boldsymbol{M}_\mathrm{k}$ musí být v rovnováze s celkovým momentem vnitřních tečných sil v rovině řezu:

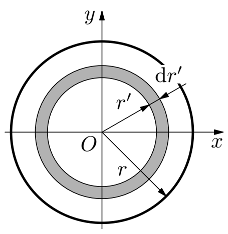
$$M_k = \int_S r' \tau \,\mathrm{d}S = \frac{G\varphi}{l} \int_S r'^2 \,\mathrm{d}S = \frac{G\varphi}{l} J_\mathrm{p} \,, \tag{30}$$

kde J_p je **polární kvadratický moment plochy průřezu** k ose válce:

$$\boxed{J_\mathrm{p} = \int_S r'^2 \mathrm{d}S} \,. \tag{31}$$



Obr. 21 Napětí při torzi



Obr. 22 K výpočtu polárního kvadratického momentu kruhu

Polární kvadratický moment je jednou z důležitých geometrických charakteristik (s dalšími se setkáme u ohybu v následující kapitole). Nyní vypočítáme polární kvadratický moment **kruhu** o poloměru r k bodu O (obr. 22). Z kruhu si vytkneme element plochy ve tvaru mezikruží o obsahu $\mathrm{d}S = 2\pi r' \,\mathrm{d}r'$ a dostaneme

$$J_\mathrm{p} = 2\pi \int_0^r r'^3 \mathrm{d}r' = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \,, \tag{32}$$

kde $d = 2r$ je průměr kruhu. Často se můžeme setkat s krutem trubky, která má průřez tvaru mezikruží. Pak se změní jen meze na r_1, r_2 a dostaneme

$$J_\mathrm{p} = \frac{\pi}{2}\left(r_2^4 - r_1^4\right) = \frac{\pi}{32}\left(d_2^4 - d_1^4\right) . \tag{33}$$

Pro **úhel zkroucení** φ válce na jeho volném konci dostaneme z (30) výraz

$$\varphi = \frac{M_\mathrm{k} l}{G J_\mathrm{p}} . \tag{34}$$

S přihlédnutím k (32) bude pro úhel zkroucení rotačního válce platit

$$\boxed{\varphi = \frac{2M_\mathrm{k} l}{G\pi r^4}} . \tag{35}$$

Je zřejmé, že tento úhel je velmi citlivý na velikost poloměru r. Je-li velmi malý (řádově 10^{-5} m), dosáhneme velkých úhlů φ pro malé M_k, což se využívá např. pro měření gravitačních sil na torzních vahách (viz úlohu 17). Je-li naopak relativně velký (řádově 10^{-2} m), projevuje se výrazně větší tuhost, což se využívá např. pro odpružení automobilů a tanků (viz úlohu 15).

Vraťme se nyní k výpočtu **tečného napětí**. Dosadíme-li z výrazu (30) do (29), dostaneme

$$\tau = \frac{M_\mathrm{k}}{J_\mathrm{p}} r' . \tag{36}$$

Maximální velikost tečného napětí bude na obvodu průřezu ($r'_\mathrm{max} = r$):

$$\boxed{\tau_\mathrm{max} = \frac{M_\mathrm{k}}{J_\mathrm{p}} r = \frac{M_\mathrm{k}}{W_\mathrm{k}}} , \quad \text{kde} \quad \boxed{W_\mathrm{k} = \frac{J_\mathrm{p}}{r}} \tag{37}$$

je **průřezový modul v krutu**[5]). Pro kruhový průřez o poloměru $r = d/2$ je

$$W_\mathrm{k} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16} . \tag{38}$$

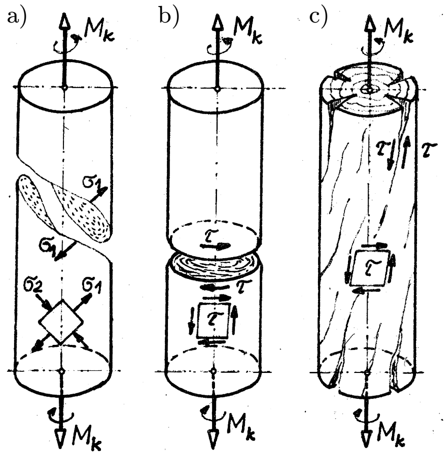
Napětí ve válci namáhaném na krut nesmí překročit největší dovolené napětí ve smyku τ_d, tj. při torzi musí být splněna **pevnostní podmínka**

$$\boxed{\tau_\mathrm{max} = \frac{M_\mathrm{k}}{W_\mathrm{k}} \leqq \tau_\mathrm{d}} . \tag{39}$$

[5]) Tato veličina zjednodušuje výpočet smykového napětí při krutu u složitějších profilů; podobně je tomu i u ohybu (čl. 4.3).

Dovolené napětí ve smyku bylo zmíněno v čl. 3.3. Závisí především na tom, zda použitý materiál je houževnatý (viz výraz (25)) nebo křehký (viz výraz (26)).

O tom, jaký druh napětí rozhoduje o porušení krouceného válce se můžeme přesvědčit jednoduchými experimenty. Křehký materiál (např. litina) se při kroucení poruší přetržením v šikmých řezech, v nichž působí největší tahové napětí (obr. 23a). O litině víme, že má pevnost v tahu asi čtyřikrát menší než v tlaku. O charakteru lomu křehkého materiálu při kroucení se můžeme snadno přesvědčit např. kroucením slané tyčinky nebo školní křídy.



Obr. 23
Porušení válce při torzi materiálu
a) křehkého, b) houževnatého, c) dřeva
(převzato z [7])

U houževnatých materiálů je rozhodující největší tečné napětí. Proto se vzorek z tvárného materiálu namáhaný krutem usmýkne v rovině kolmé k ose tyče (obr. 23b). Přesvědčíme se o tom experimentem při kroucení např. měděného nebo železného drátu anebo jednoduše na rohlíku ve druhém dni po jeho upečení. Dřevo je materiál anizotropní. Jeho pevnost ve směru vláken je mnohem větší než napříč a pevnost ve smyku podél vláken je malá. Proto při kroucení vznikají trhliny (obr. 23c).

U některých krutem namáhaných součástí je z funkčních důvodů nutné dát přednost **deformační podmínce**, tj. zkrut ϑ nesmí překročit určitou dovolenou hodnotu ϑ_d, tj. musí platit

$$\vartheta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_\mathrm{k}}{GJ_\mathrm{p}} \leqq \vartheta_\mathrm{d}\,.$$

Např. u hřídelů, u nichž nemá vzniknout torzní kmitání rotujících hmot, se připouští $\vartheta \in (0{,}25 \div 0{,}75)\ {}^\circ/\mathrm{m}$.

3.5 Deformační energie při torzi

Výpočet provedeme dvojím způsobem. Nejprve vyjdeme z deformační práce kroutícího momentu s využitím výsledku (30). Pro element této práce platí

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}U = M_\mathrm{k}\mathrm{d}\varphi = \frac{GJ_\mathrm{p}}{l}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Celkovou deformační energii dostaneme integrací pro úhel zkroucení od 0 do φ. S využitím vztahu (35) po integraci dostaneme

$$U = \frac{GJ_\mathrm{p}}{l}\int\limits_0^\varphi \varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{GJ_\mathrm{p}}{2l}\varphi^2 = \frac{M_\mathrm{k}^2 l}{2GJ_\mathrm{p}} = \frac{M_\mathrm{k}^2 l}{\pi G r^4}\,. \tag{40}$$

Protože u torze jde o složený smyk, můžeme ke stejnému výsledku dospět využitím hustoty deformační energie (24). Uvažujme element zkroucené tyče, který má podstavu $\mathrm{d}S$ a výšku $\mathrm{d}y$ (viz obr. 20), tedy objem $\mathrm{d}V = \mathrm{d}S\cdot\mathrm{d}y$. V něm je tedy obsažena deformační energie, pro kterou vzhledem k (36) dostaneme

$$\mathrm{d}U = u_\mathrm{s}\mathrm{d}V = \frac{\tau^2}{2G}\mathrm{d}S\cdot\mathrm{d}y = \frac{M_\mathrm{k}^2}{2GJ_\mathrm{p}^2}r'^2\mathrm{d}S\cdot\mathrm{d}y\,.$$

Nyní provedeme integraci přes celý objem, tedy pro y od 0 do l a přes celý plošný obsah S příčného řezu. Deformační energie je

$$U = \frac{M_\mathrm{k}^2}{2GJ_\mathrm{p}^2}\int\limits_0^l\left[\int\limits_S r'^2\,\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}z = \frac{M_\mathrm{k}^2 l}{2GJ_\mathrm{p}}\,,$$

neboť výraz v hranaté závorce je polární moment setrvačnosti průřezu J_p.

Příklad 4 – hnací hřídel

Vypočtěte průměr spojovacího kloubového hřídele mezi převodovkou a rozvodovkou na zadní nápravě automobilu. Motor má největší výkon $P = 65{,}0$ kW při frekvenci otáčení $n_0 = 4\,200\ \mathrm{min}^{-1}$. Největší převod v převodovce (při 1. převodovém stupni) je $z_1 = 3{,}77$. Dovolené napětí volte $\tau_\mathrm{d} = 70$ MPa. Proveďte kontrolu tuhosti hřídele. $G = 8{,}0\cdot 10^{10}$ Pa.

Řešení

Pro daný výkon bude mít kroutící moment největší velikost při největším převodovém stupni z_1, tj. při frekvenci otáčení $n_1 = n_0/z_1$. Tomu bude odpovídat maximální kroutící moment

$$M_\mathrm{k} = \frac{P}{\omega_1} = \frac{30P}{\pi n_1} = \frac{30Pz_1}{\pi n_0} = 557\ \mathrm{N\cdot m}\,.$$

Pevnostní podmínka je

$$\tau_\mathrm{max} = \frac{M_\mathrm{k}}{W_\mathrm{k}} = \frac{16M_\mathrm{k}}{\pi d^3} \leqq \tau_\mathrm{d}\,;$$

odtud průměr hřídele

$$d \geqq \sqrt[3]{\frac{16M_\mathrm{k}}{\pi\tau_\mathrm{d}}} = 34{,}3\ \mathrm{mm}; \quad \text{volíme} \quad d = 35\ \mathrm{mm}\,.$$

Kontrola tuhosti se provede výpočtem největšího zkrutu s využitím (34) a (35):

$$\vartheta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_\mathrm{k}}{GJ_\mathrm{p}} = \frac{32M_\mathrm{k}}{\pi Gd^4} = 4{,}73\cdot 10^{-2}\ \mathrm{rad\cdot m^{-1}} = 2{,}71\ {}^\circ/\mathrm{m}\,.$$

Tento zkrut (předpokládá se, že v provozu bude mezní) je ještě vyhovující. Výhodnější konstrukčním řešením by byl dutý hřídel, který by sice měl větší průměr (např. 42 mm), avšak byl by lehčí a tužší.

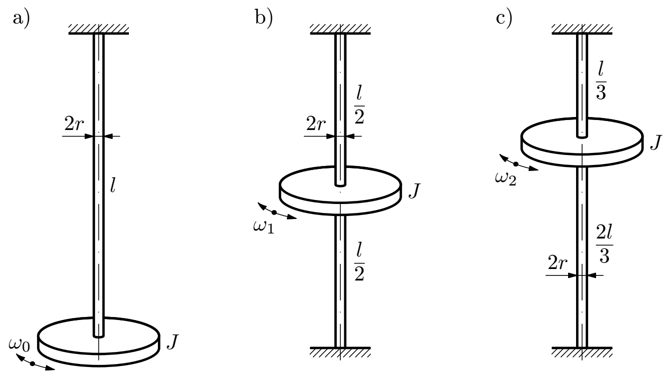
Příklad 5 – torzní oscilátor

Vypočtěte úhlové frekvence $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ vlastních kmitů torzních oscilátorů podle obr. 24, které sestávají z tělesa o momentu setrvačnosti J a torzní tyče o poloměru r, aktivní délce l a modulu pružnosti ve smyku G. V případě a) je těleso na volném konci tyče, v případech b), c) jsou oba konce tyče upevněny a těleso je buď uprostřed tyče nebo v jedné třetině její délky. Úhlové frekvence ω_1, ω_2 vyjádřete pomocí úhlové frekvence ω_0.

Řešení

a) Otočíme-li těleso okolo osy tyče o úhel φ, bude proti výchylce působit moment síly $M_\mathrm{k} = -k_\mathrm{t}\varphi$, kde torzní tuhost k_t určíme použitím vztahu (35):

$$k_\mathrm{t} = \frac{M_\mathrm{k}}{\varphi} = \frac{\pi Gr^4}{2l}\,. \tag{41}$$



Obr. 24 Torzní oscilátory s různou polohou kmitajícího tělesa

Pohybová rovnice vychýleného tělesa je $J\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = M_\mathrm{k}$, neboli

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k_\mathrm{t}}{J}\varphi = 0\,.$$

Jak se můžeme přesvědčit zpětným dosazením, rovnici vyhovuje funkce $\varphi = \varphi_\mathrm{m} \sin \omega_0 t$, kde φ_m je úhlová amplituda a ω_0 hledaná úhlová frekvence. Porovnáním rovnic pro ni a její druhou derivaci $\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 \varphi_\mathrm{m} \sin \omega_0 t$ dostaneme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_\mathrm{t}}{J}} = \sqrt{\frac{\pi G r^4}{2lJ}}\,. \qquad (42)$$

b) Soustavy na obr. b), c) jsou složené – mají dvě paralelně řazené torzní pružiny (obecně o tuhostech k_t1, k_t2). Otočíme-li těleso o úhel φ, bude na ně působit vratný moment síly $M_\mathrm{k} = -(k_\mathrm{t1} + k_\mathrm{t2})\varphi = -k_\mathrm{t}\varphi$, kde

$$k_\mathrm{t} = k_\mathrm{t1} + k_\mathrm{t2} \qquad (43)$$

je výsledná tuhost soustavy. Při výpočtu úhlové frekvence tedy obecně píšeme

$$\omega = \sqrt{\frac{k_\mathrm{t}}{J}} = \sqrt{\frac{k_\mathrm{t1} + k_\mathrm{t2}}{J}}\,.$$

V případě podle obr. b) je $k_\mathrm{t1} = k_\mathrm{t2} = \dfrac{\pi G r^4}{l}$ a úhlová frekvence je

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\pi G r^4}{lJ}} = 2\omega_0\,.$$

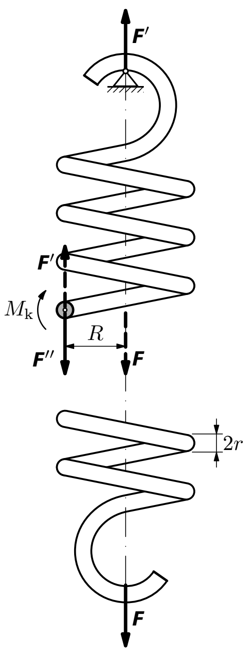
c) V soustavě na obr. c) je

$$k_{\mathrm{t}} = \frac{\pi G r^4}{2}\left(\frac{3}{l} + \frac{3}{2l}\right) = \frac{9}{4}\,\frac{\pi G r^4}{l}\,,$$

$$\omega_2 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\pi G r^4}{lJ}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\omega_0 = \frac{3\sqrt{2}}{4}\omega_1\,.$$

Příklad 6 – tuhost šroubovité pružiny

Uvažujme šroubovitou válcovou tažnou pružinu (obr. 25). Pružina má střední poloměr vinutí R, poloměr drátu r a počet závitů n. Předpokládejme, že pružina je hustě vinutá a že její deformace je malá. Proto můžeme stoupání šroubovice, která je osovou křivkou svinutého drátu, zanedbat. Vypočtěte tuhost pružiny.



Obr. 25
Šroubovitá pružina

Řešení

Pružinu zatíženou silou $\boldsymbol{F}$ rozdělíme myšleným řezem na dvě části (obr. 25). V místě řezu musíme připojit vnitřní síly, abychom obnovili rovnováhu. To provedeme tak, že sílu $\boldsymbol{F}$ přeneseme do osy drátu jako sílu $\boldsymbol{F}'' = \boldsymbol{F}$. Tím musíme připojit silovou dvojici $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}'$ o momentu $M_{\mathrm{k}} = FR$, který zkrucuje drát.

Síla $\boldsymbol{F}''$ namáhá drát na prostý smyk. Jak si ukážeme na závěr, její vliv je zanedbatelný. Podstatný je vliv torze drátu pružiny, který jednoduše vypočteme užitím deformační energie při zkrucování závitů pružiny. Užijeme vztah (40), do něhož dosadíme $M_{\mathrm{k}} = FR$, $l = 2\pi Rn$ (délka nedeformovaného drátu pružiny). Deformační energie pružiny se rovná práci napínající síly $\boldsymbol{F}$, která se lineárně zvětšuje a prodlužuje pružinu do konečné hodnoty Δy. Musí tedy platit (srovnej s výpočtem podle (10)):

$$U = \frac{2F^2R^3n}{Gr^4} = \frac{1}{2}F\Delta y\,.$$

Pro prodloužení pružiny vlivem torze platí $\Delta y = \dfrac{4R^3nF}{Gr^4}\,.$

Prodloužení pružiny vlivem smyku označíme Δy_s. Vypočteme je užitím Hookova zákona pro smyk $\gamma = \dfrac{\tau}{G}$, kde $\gamma = \dfrac{\Delta y_\mathrm{s}}{l} = \dfrac{\Delta y_\mathrm{s}}{2\pi R n}$ a $\tau = \dfrac{F}{S} = \dfrac{F}{\pi r^2}$. Dosazením dostaneme

$$\Delta y_\mathrm{s} = \frac{2RnF}{Gr^2}\,, \quad \text{neboli} \quad \frac{\Delta y_\mathrm{s}}{\Delta y} = \frac{r^2}{2R^2} \ll 1\,.$$

Vliv smyku je tedy zanedbatelný. Bude-li např. $r = 1{,}0$ mm, $R = 10$ mm dostaneme že prodloužení vlivem smyku činí jen 0,5 % prodloužení vlivem torze.

Tuhost pružiny můžeme určit z výrazu

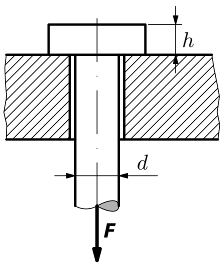
$$k = \frac{F}{\Delta y} = \frac{Gr^4}{4R^3 n} \quad (= \text{konst.})\,. \tag{44}$$

Na úloze je zajímavé to, že pružina jako celek je namáhána na tah, kdežto vlastní drát na krut a nepatrně i na smyk. Pro tuhost tlačné pružiny platí stejný výraz (44).

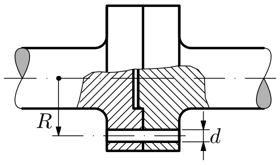
3.6 Úlohy ke kapitole 3

12. Závěs

Navrhněte rozměry h a d závěsu podle obr. 26. Závěs je zatížen silou o velikosti $F = 2{,}0 \cdot 10^4$ N a má být vyroben z oceli 11 500 ($\sigma_\mathrm{kt} = 260$ MPa, $\tau_\mathrm{d} = \sigma_\mathrm{kt}/(k\sqrt{3})$). Míru bezpečnosti volte $k = 2{,}0$.



Obr. 26 K návrhu závěsu



Obr. 27 Spojka s pojistným kolíkem

13. Spojka

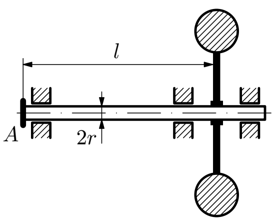
Vypočtěte průměr d pojistného kolíku na poloměru $R = 40$ mm spojky (obr. 27), který se má přestřihnout při překročení největšího výkonu $P_\mathrm{max} = 8{,}0$ kW při frekvenci otáčení $n = 500\ \mathrm{min}^{-1}$. Pevnost navržené oceli je $\sigma_{\mathrm{pt}} = 330$ MPa. Předpokládejte, že ocel je houževnatá a tedy pro pevnost ve smyku platí $\tau_{\mathrm{p}} = \sigma_{\mathrm{pt}}/\sqrt{3}$.

14. Hřídel

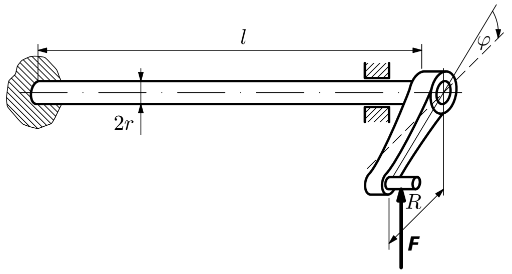
Hřídel přenáší výkon $P = 20$ kW při frekvenci otáčení $n = 1\,200\ \mathrm{min}^{-1}$. Navrhněte jeho průměr při $\tau_{\mathrm{d}} = 40$ MPa.

15. Setrvačník

Setrvačník o momentu setrvačnosti $J = 150\ \mathrm{kg\cdot m^2}$ je pevně spojen s hřídelem, na jehož konci A je brzda (obr. 28). Při jaké největší frekvenci otáčení lze konec hřídele A zastavit, aniž by došlo k překročení dovoleného namáhání hřídele? Je dáno: poloměr hřídele $r = 25{,}0$ mm, jeho délka $l = 1{,}80$ m, $G = 8{,}0 \cdot 10^{10}$ Pa a dovolené tečné napětí $\tau_{\mathrm{d}} = 80$ MPa.



Obr. 28 Setrvačník na hřídeli



Obr. 29 Torzní tyč k pérování

16. Torzní pérování

V tanku je každé z deseti pojezdových kol odpruženo samostatnou torzní tyčí (obr. 29). Odpružená hmotnost je $m = 28{,}0$ t; předpokládejte, že na každé pojezdové kolo připadá stejný díl této hmotnosti. Rozměry tyčí jsou: $l = 1{,}80$ m, $2r = 56{,}0$ mm, $R = 250$ mm, $G = 8{,}0 \cdot 10^{10}$ Pa. Vypočtěte

a) úhel zkroucení φ torzní tyče po jejím statickém zatížení vlastní tíhou odpružené hmotnosti,
b) maximální tečné napětí v tyči při jejím zatížení.

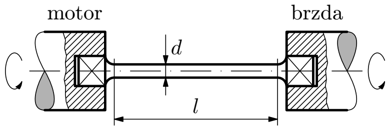
17. Torzní dynamometr

K měření výkonu lze užít torzní dynamometr, jehož základem je torzní tyč (obr. 30). Určete výkon spalovacího motoru na brzdě, jestliže se měrná torzní tyč o průměru $d = 18$ mm a délce $l = 600$ mm zkroutila o $\varphi = 6°30'$ při frekvenci otáčení $f = 53{,}3\ \mathrm{s}^{-1}$. Vypočtěte napětí v tyči. $G = 7{,}95 \cdot 10^{10}$ Pa.

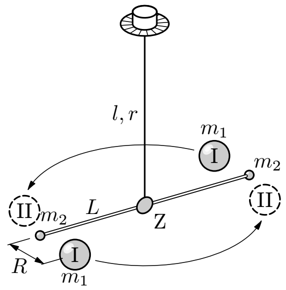
18. Torzní váhy

Pro ověření Newtonova gravitačního zákona a k určení gravitační konstanty sestrojil H. Cavendish r. 1798 torzní váhy, jejichž schéma je na obr. 31. Použil olověné koule o hmotnosti $m_1 = 158$ kg a olověné kuličky o hmotnosti $m_2 = 0{,}730$ kg uchycené na lehkém vahadle s roztečí $L = 1820$ mm. Vahadlo bylo zavěšeno na ocelovém drátě s otočným závěsem. Délka drátu $l = 1\,600$ mm průměr $2r = 0{,}15$ mm. Cavendish změřil na těchto vahách gravitační konstantu s obdivuhodnou přesností 1 %: $\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg \cdot s^{-2}}$.

Při měření nastavil koule ke kuličkám do vzdálenosti $R = 210$ mm (poloha I). Zrcátkovou metodou zjistil úhlovou polohu vahadla. Pak přemístil koule do polohy II tak, aby vzdálenost mezi koulemi a kuličkami byla stejná jako v poloze I. Vypočtěte úhlovou změnu $\Delta\varphi$ vahadla mezi oběma polohami koulí. Modul pružnosti drátu ve smyku $G = 8{,}0 \cdot 10^{10}$ Pa. (Poznámka – některé zde uvedené rozměry jsou rekonstruovány z vyobrazení přístroje.)



Obr. 30 Torzní dynamometr

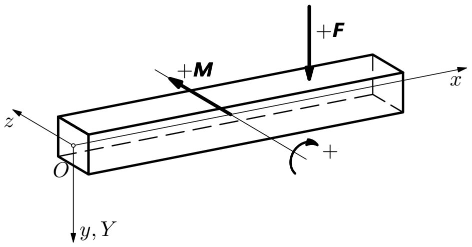


Obr. 31 Cavendishovy torzní gravitační váhy

4 ELEMENTÁRNÍ TEORIE OHYBU

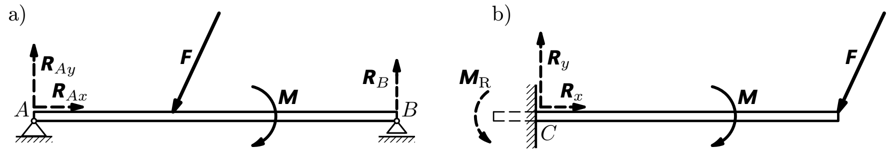
4.1 Nosník zatížený vnějšími silami

Nosník je důležitý konstrukční element přímého tvaru, který u strojních a stavebních konstrukcí slouží k zachycení vnějšího, převážně příčného, silového zatížení. My si jej znázorníme jako tyč spojenou s pravotočivou soustavou souřadnic podle obr. 32, přičemž se přidržíme historicky vžité úmluvy v teorii ohybu, pokud jde o kladné orientace. Protože většina vnějších sil jsou tíhové síly směřující dolů, bereme tento směr jako kladný. U rovinných úloh, které budeme řešit a znázorňovat rovinnými náčrty, budou mít momenty sil v kladném směru směr kladné poloosy z. Budeme je znázorňovat obloučky, orientované ve směru rotace, kterou by příslušný moment vyvolal. Tedy kladný moment $\boldsymbol{M}$ vyvolá rotaci ve směru pohybu hodinových ručiček (obr. 32). Deformace, která se u nosníku nazývá **průhyb**, má souřadnici Y.



Obr. 32 Nosník – volba souřadnic

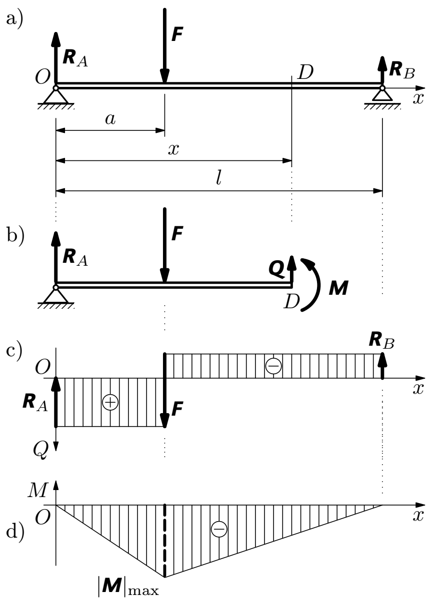
Budeme pracovat se staticky určitými nosníky. Mezi ně patří nosník na obr. 33a uložený na jedné rovné kloubové podpoře (A) a jedné posuvné kloubové podpoře (B); na obr. 33b je nosník s jedním dokonale vetknutým koncem (C). Při řešení statické rovnováhy odstraníme vazby, tj. podpory A, B resp. vetknutí C a nahradíme je vazbovými silami – reakcemi a případně reakčním momentem, jak je na obr. 33b vyznačeno čárkovaně.



Obr. 33 Staticky určité nosníky; v podporách A, B, C jsou čárkovaně vyznačeny reakce a reakční moment

4.2 Vnitřní statické účinky u nosníků

Působením vnějších sil a momentů sil vznikají uvnitř nosníku vnitřní síly. Vztáhneme-li je na jednotkovou plochu, hovoříme o **napětí**. K jeho určení musíme v příslušném průřezu znát výslednou vnitřní sílu a výsledný moment vnitřních sil. K tomu se opět využije **metoda myšleného řezu**, kterou vysvětlíme na jednoduchém příkladu nosníku v obr. 34. Předpokládáme, že k dané vnější síle $\boldsymbol{F}$ jsme z podmínek statické rovnováhy určili reakce $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$. Nosník myšleným řezem rozdělíme na dvě části. Abychom obnovili rovnováhu v **levé části**, musíme zde připojit sílu $\boldsymbol{Q}$, tzv. **posouvající silu** a moment síly $\boldsymbol{M}$, tzv. **ohybový moment**.



Obr. 34 Vnitřní síly u nosníku

Protože myšleně oddělená **levá** část musí být v rovnováze, určíme posouvající sílu $\boldsymbol{Q}$ tak, že do řezu přeneseme všechny vnější síly ($\boldsymbol{F}_\mathrm{p}$) působící zprava od něj a sečteme je:

$$Q = \sum F_\mathrm{p}$$

(síly jsou rovnoběžné, proto jejich souřadnice sčítáme skalárně). Podobně ohybová moment určíme sečtením momentů přenášených sil a vložených momentů, které působí zprava

$$M = \sum M_\mathrm{p}\,.$$

V příkladu z obr. 34 pro obecně umístěný bod D platí

pro $a < x < l$ $\quad Q = -|R_B| < 0\,, \quad M = -|R_B|(l-x) < 0\,,$

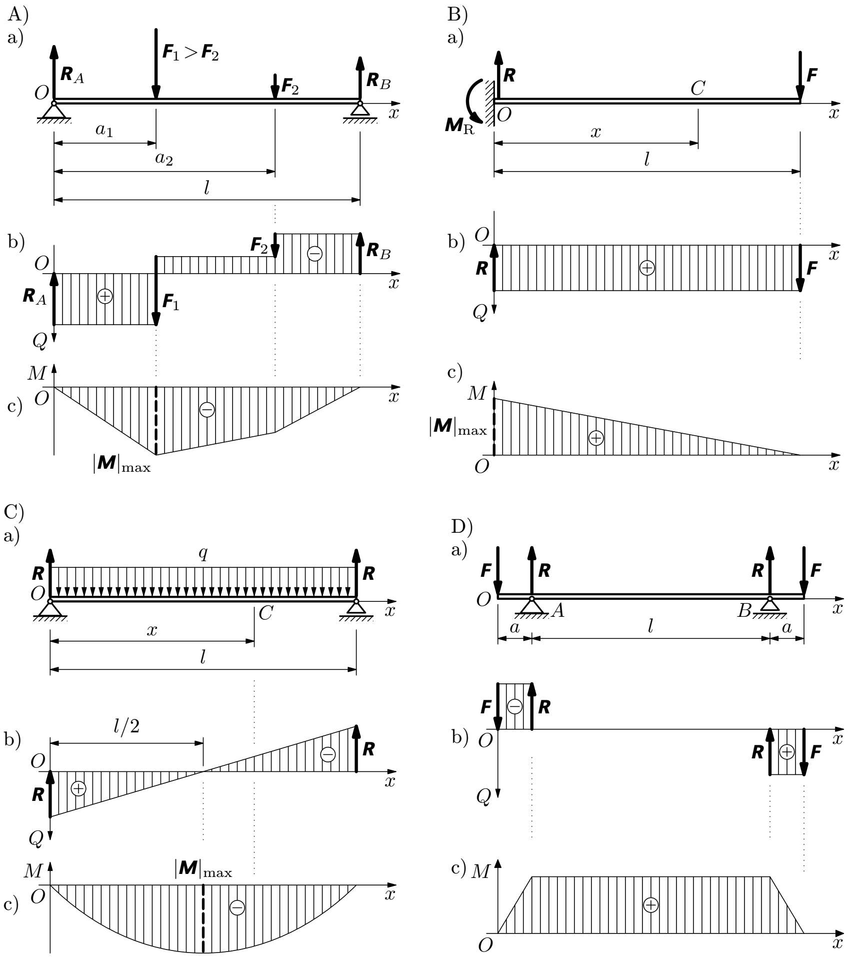
pro $0 < x < a$ $\quad Q = -|R_B| + F > 0\,, \quad M = -|R_B|(l-x) + F(a-x) < 0\,.$

Závislost Q a M na x vidíme na obr. 34c,d. Je zřejmé, že ohybový moment má maximum v místě, kde posouvající síla mění znaménko. (Tento poznatek platí obecně a uvádí se jako *Schwedlerova věta*.) Průřez, kde $M = M_\mathrm{max}$, se nazývá **nebezpečný průřez**; je rozhodující pro návrh celého (prizmatického) nosníku.

Příklad 7 – posouvající síla a ohybový moment

Vyšetřete průběh posouvající síly a ohybového momentu u čtyř typických nosníků z obr. 35 a určete jejich nebezpečný průřez. Nosník na obr. 35C je zatížen spojitým břemenem o délkové hustotě tíhové síly $q =$ konst.

Řešení

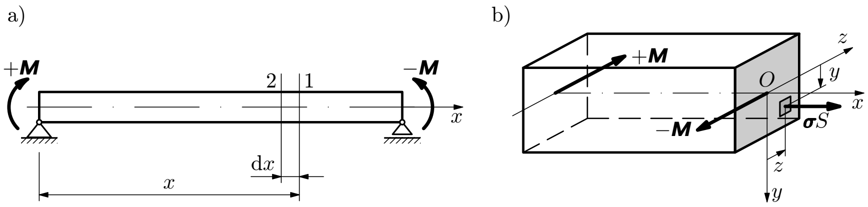


Obr. 35 Posouvající síla a ohybový moment: A) nosník s osamělými silami, B) krakorec s osamělou silou, C) nosník se spojitým zatížením, D) nosník s částí s konstantním ohybovým momentem

Zde uvedené řešení je provedeno v grafické formě; předpokládá, že čtenář si napíše příslušné rovnice závislostí $Q = Q(x)$, $M = M(x)$. Nebezpečný průřez je v místech, kde Q mění znaménko. U nosníku na obr. 35D je mezi podporami $Q = 0$ a $M =$ konst. Jde o významný případ, kdy **působí jen ohybový moment**; příslušný ohyb se nazývá **prostý (čistý) ohyb**.

4.3 Napětí a deformace při prostém ohybu

U nosníku namáhaného ohybovým momentem $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{konst}$. provedeme myšlený řez 1 ve vzdálenosti x od levé podpory (obr. 36a). Odříznutá levá část nosníku je na obr. 36b. Protože při prostém ohybu je posouvající síla Q nulová, působí v příčném řezu jen normálové napětí σ; **nosník je ve stavu jednoosé napjatosti**. Působením ohybového momentu se určitá myšlená podélná „vlákna" nosníku prodlužují, jiná zkracují.



Obr. 36 K výpočtu napětí při prostém smyku

Vyšetřeme nyní podmínky rovnováhy. Na element plochy d$\boldsymbol{S}$ působí vnitřní síla o velikosti $\sigma \mathrm{d}S$ (obr. 36b). Protože na nosník nepůsobí žádná vnější síla ve směru osy x, musí platit

$$\int_S \sigma \mathrm{d}S = 0\,. \tag{45}$$

Rovněž celkový moment elementárních sil $\sigma \mathrm{d}S$ k ose y je nulový:

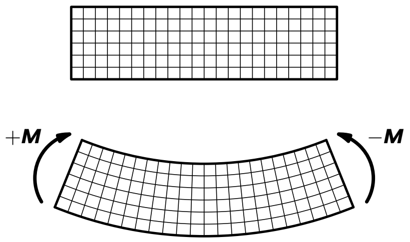
$$\int_S z\sigma \mathrm{d}S = 0\,, \tag{46}$$

kdežto celkový moment vnitřních sil k ose z musí být roven $-\boldsymbol{M}$ (moment $\boldsymbol{M}$ je volen tak, že má směr záporné poloosy z). Tedy

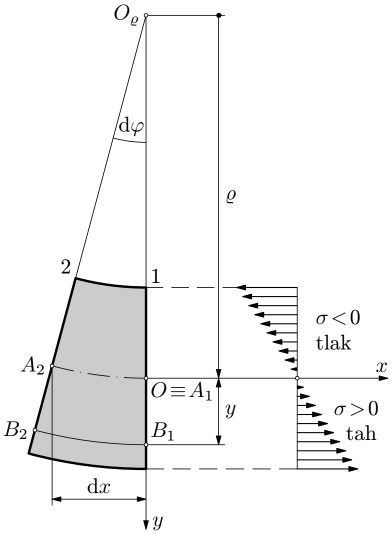
$$\int_S y\sigma \mathrm{d}S = -M\,. \tag{47}$$

Rovnice (45) až (47) vyjadřují, jak se uskutečňuje přenos vnitřních sil uvnitř nosníku, avšak nepostačují k nalezení funkce $\sigma = \sigma(y, z)$. Z toho vyplývá, že rozložení napětí v v průřezu je **staticky neurčité**.

K určení napětí v průřezu musíme vyjít z rozboru deformace nosníku. Vyjdeme z předpokladu, že **příčné řezy, které byly rovinné před deformací, zůstanou rovinnými i po deformaci**. Tato hypotéza umožnila *Jakobu Bernoulliovi* r. 1774 podat první správné řešení ohybu. Oprávněnost tohoto předpokladu byla dostatečně prokázána tím, že výsledky teorie ohybu, které z něho plynou, souhlasí s experimenty. Správnost předpokladu můžeme názorně ukázat na gumovém modelu nosníku s vyznačenou sítí podle obr. 37.



Obr. 37
Deformační hypotéza pro prostý ohyb



Obr. 38
Deformovaný element nosníku
při prostém ohybu

Uvedenou hypotézu budeme nyní aplikovat na náš nosník. Uvažujme dva soumezné původně rovnoběžné řezy 1, 2 podle obr. 36a, které se po deformaci nosníku vzájemně natočí o úhel dφ (obr. 38). Roviny proložené deformovanými průřezy se protnou v přímce – ose O_ϱ, která je kolmá k nákresně. Na této ose leží středy křivosti deformovaných podélných vláken elementu nosníku. Je zřejmé, že spodní vlákna se prodlužují, horní zkracují.

Délka jistého vlákna A_1A_2, o jehož poloze zatím nic nevíme, se nemění. Plocha, v níž leží tato vlákna, se nazývá **neutrální plocha**. Poloměr křivosti vlákna A_1A_2 označíme ϱ. Pro délku tohoto vlákna při uvažovaných malých deformacích můžeme psát $A_1A_2 = \varrho \mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}x$. Vlákno B_1B_2, které je ve vzdálenosti y od neutrální plochy, má po deformaci délku $B_1B_2 = (\varrho + y)\mathrm{d}\varphi$. Jeho relativní prodloužení je

$$\varepsilon = \frac{B_1B_2 - A_1A_2}{A_1A_2} = \frac{(\varrho + y)\mathrm{d}\varphi - \varrho\,\mathrm{d}\varphi}{\varrho\,\mathrm{d}\varphi} = \frac{y}{\varrho}\,. \tag{48}$$

Z Hookova zákona (8) plyne pro napětí ve vlákně B_1B_2

$$\sigma = E\varepsilon = E\,\frac{y}{\varrho}\,. \tag{49}$$

Napětí se tedy lineárně mění se souřadnicí y elementu měřenou od neutrální plochy, jak znázorňuje obr. 38.

Dosadíme-li (49) do (45), dostaneme podmínku

$$\frac{E}{\varrho}\int\limits_S y\mathrm{d}y = 0\,, \tag{50}$$

z níž plyne, že statický moment průřezu k ose z musí být nulový, čili **neutrální plocha prochází těžištěm průřezu**. Dosadíme-li výsledek (48) do rovnice (47), dostaneme důležitý poznatek

$$M = -\frac{E}{\varrho}\int\limits_S y^2\,\mathrm{d}S = -\frac{E}{\varrho}J_z\,, \tag{51}$$

kde

$$\boxed{J_z = \int\limits_S y^2\mathrm{d}S} \tag{52}$$

je veličina, která závisí jen na tvaru a velikosti plochy průřezu a nazývá se **kvadratický moment průřezu k ose** z. Jeho jednotkou je m^4. Ze vztahu (51) plyne

$$\boxed{\frac{1}{\varrho} = -\frac{M}{EJ_z}}\,, \tag{53}$$

tedy křivost deformovaného nosníku je přímo úměrná ohybovému momentu M. Protože u námi vyšetřovaného prostého ohybu je $M =$ konst., je jeho křivost konstantní a **ohybovou čarou je oblouk kružnice**. Veličina EJ_z se nazývá **tuhost v ohybu**.

Pro výpočet napětí dosadíme (53) do (49):

$$\sigma = -\frac{M}{J_z}y\,. \tag{54}$$

Maximální hodnota tohoto napětí je pro $|y| = |y|_{\max}$, tedy

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|}{J_z}|y|_{\max}\,.$$

Tento výraz se píše ve zjednodušeném tvaru, který je významný pro pevnostní výpočty:

$$\boxed{|\sigma|_{\max} = \frac{|M|}{W_z}}\,, \tag{55}$$

kde

$$\boxed{W_z = \frac{J_z}{|y|_{\max}} = \frac{1}{|y|_{\max}} \int_S y^2 \mathrm{d}S} \tag{56}$$

je **průřezový modul v ohybu** k ose z. Jeho jednotkou je m^3.

Při návrhu nosníku musí být splněna podmínka

$$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_z} \leqq \sigma_{\mathrm{d}}\,, \tag{57}$$

kde jsme o ohybového momentu připojili ještě index „max", což má význam pro obecnější případ příčného ohybu (viz čl. 4.5).

Příklad 8 – Průřezové charakteristiky obdélníka a kruhu

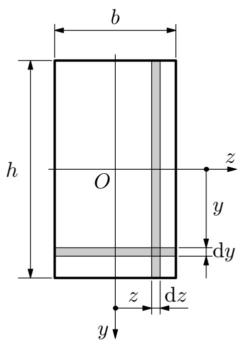
Vypočtěte centrální kvadratický moment a průřezový modul obdélníka a kruhu vzhledem k ose souměrnosti.

Řešení
Centrální charakteristiky jsou vztaženy k osám, které procházejí těžištěm průřezu.
a) **Obdélník** (obr. 39)

$$J_z = \int_S y^2 \mathrm{d}S = b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 \mathrm{d}y = \frac{bh^3}{12}\,, \tag{58}$$

$$J_y = \int_S z^2 \mathrm{d}S = h \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \mathrm{d}y = \frac{hb^3}{12}\,,$$

$$W_z = \frac{2J_z}{h} = \frac{bh^2}{6}\,, \qquad W_y = \frac{2J_y}{b} = \frac{hb^2}{6}\,. \tag{59}$$



Obr. 39 K výpočtu charakteristik obdélníka

Je zřejmé, že tuhost v ohybu EJ nosníku s obdélníkovým průřezem ovlivňuje především výška, která je ve třetí mocnině.

b) **Kruh**

Využijeme výsledku (32) pro polární kvadratický moment kruhu. Užitím Pythagorovy věty můžeme nalézt obecný vztah mezi polárním momentem J_{p} a osovými momenty J_y a J_z:

$$J_{\mathrm{p}} = \int_S r^2 \mathrm{d}S = \int_S (y^2 + z^2) \mathrm{d}S = J_z + J_y \,.$$

Vzhledem k symetrii kruhu však platí

$$J_z = J_y = \frac{J_{\mathrm{p}}}{2} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} \,. \tag{60}$$

Průřezový modul kruhu v ohybu dostaneme dělením r:

$$W_z = W_y = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32} \,. \tag{61}$$

4.4 Deformační energie při prostém ohybu

Nosník je při prostém ohybu ve stavu jednoosé napjatosti, proto můžeme deformační energii vypočítat užitím vztahu (12) pro tah/tlak: $u = \sigma^2/(2E)$. Za napětí dosadíme výraz (54), v němž $M =$ konst., a za element objemu $\mathrm{d}V = l\mathrm{d}S$. Pak deformační energie nosníku je

$$U = \int_V u \,\mathrm{d}V = \frac{M^2 l}{2EJ_z^2} \int_S y^2 \mathrm{d}S = \frac{M^2 l}{2EJ_z} \,, \tag{62}$$

neboť integrál přes plochu S představuje kvadratický moment (52).

4.5 Příčný ohyb

Nyní se obrátíme poznámkou k obecnějšímu případu ohybu. U dosud probíraného prostého ohybu jsme počítali jen s účinkem ohybového momentu $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{konst}$. V obecnějším případě tzv. **příčného ohybu** je $\boldsymbol{M} \neq \boldsymbol{konst}$. a v průřezech působí ještě posouvající síla $\boldsymbol{Q}$. Ta vyvolává **tečná napětí**, což má za následek, že v důsledku zkosu nejsou příčné průřezy po deformaci přesně kolmé k podélným vláknům, jak předpokládal obr. 38 a výpočty z něj plynoucí. Odchylky však nejsou podstatné, a proto je možno při výpočtech napětí vycházet ze vztahu (57). Je však nutné najít **nebezpečný průřez**, v němž ohybový moment dosahuje maxima. V důsledku $\boldsymbol{M} \neq \boldsymbol{konst}$., již také křivost nosníku (53) není konstantní a mění se se změnou ohybového momentu $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(x)$. To ovlivňuje tvar ohybové čáry, jak bud řešeno v následujícím článku.

4.6 Ohybová čára nosníku při příčném ohybu

Ohybovou čarou při příčném ohybu bude rovinná křivka, protože příčný ohyb je rovinná úloha. Deformaci nosníku budeme podle dohody v čl. 4.1 popisovat ve vztažné soustavě OxY. Při deformaci se těžiště příčného průřezu o souřadnici x posune z polohy C_0 do C (obr. 40a). Posunutí C_0C se nazývá **průhyb** (kladný směrem dolů).

Element CD ohybové čáry můžeme nahradit obloukem o poloměru ϱ. Pak $\mathrm{d}s = \varrho\,\mathrm{d}\varphi$. Pro malé průhyby můžeme psát $\mathrm{d}s \approx \mathrm{d}x$ a pro orientovaný úhel φ, který je při malých průhybech malý, platí (obr. 40b):

$$\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\,. \tag{63}$$

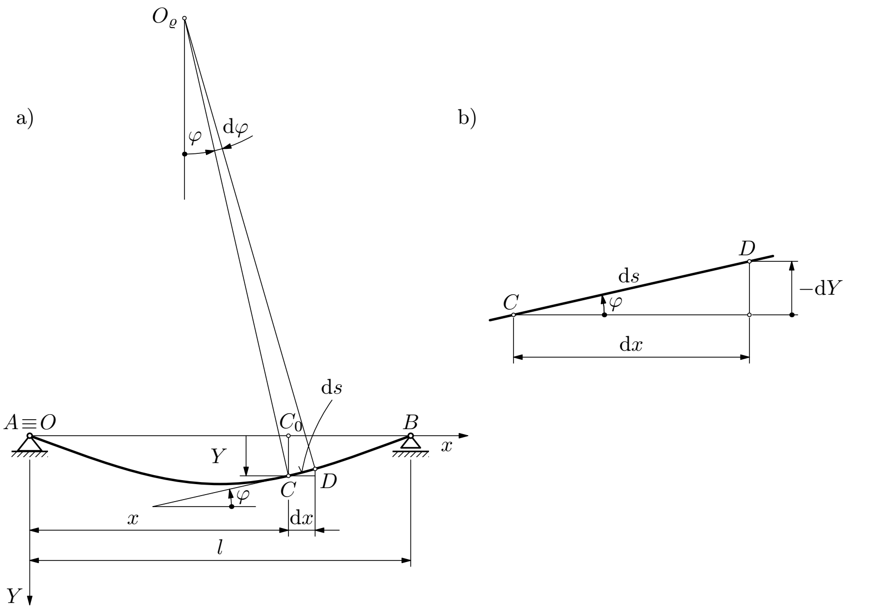
Pak

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x}\right) = -\frac{d^2Y}{\mathrm{d}x^2}\,. \tag{64}$$

Na průhyb Y nosníku má vliv jeho napjatost, která je u příčného ohybu popsána normálovým napětím σ (to je vyvoláno ohybovým momentem) a tečným napětím τ (to vzniká působením posouvající síly $\boldsymbol{Q}$). Jak si ukážeme na příkladu 9, je vliv tečného napětí prakticky zanedbatelný (menší než 1 %). Lze tedy počítat jen s vlivem normálového napětí a k výpočtu použít vztah (53) odvozený pro prostý ohyb (s M = konst.), kde v případě příčného ohybu je $M = M(x)$ daná funkce. Dosazením (53) do (64) dostaneme

$$\boxed{EJ_z\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}x^2} = M(x)}\,. \tag{65}$$

Tato **diferenciální rovnice ohybové čáry** je druhého řádu s konstantními koeficienty (pro případ nosníku s konstantním příčným průřezem je $J_z =$ $=$ konst.). Při její integraci přistoupí dvě integrační konstanty, které určíme z okrajových podmínek. Vychází se např. z toho, že v místě podpory je nulový průhyb, v místě vetknuté podpory je vedle toho i nulový úhel φ natočení průřezu (63). Úhel $\varphi = 0$ je i v místě maximálního průhybu. Řešení rovnice (65) si ukážeme v následujícím příkladu 9 a v úloze 24.



Obr. 40 K odvození diferenciální rovnice ohybové čáry

Příklad 9 – Ohybová čára krakorce

Odvoďte rovnici ohybové čáry vetknutého nosníku (krakorce) podle obr. 41. Nosník je zatížen na volném konci osamělou silou $\boldsymbol{F}$. Odhadněte vliv posouvající síly na ohyb.

Řešení

Ohybový moment v průřezu C je $M = F(l - x)$ a rovnice (65) bude mít tvar

$$EJ_z \frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}x^2} = F(l - x)\,.$$

Dvojí integrací dostaneme

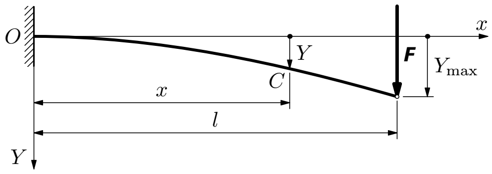
$$EJ_z \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = F\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1\,, \quad EJ_zY = \frac{F}{2}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) + C_1x + C_2\,.$$

K výpočtu konstant C_1, C_2 si uvědomíme, že v místě vetknutí ($x = 0$) je $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x = -\varphi = 0$ a $Y = 0$. Tak z první rovnice vychází $C_1 = 0$ a ze druhé rovnice $C_2 = 0$. Ohybová čára krakorce je pak popsána vztahem

$$Y = \frac{F}{2EJ_z}\left(lx^2 - \frac{x^3}{3}\right)\,. \tag{66}$$

Největší průhyb bude zřejmě pro $x = l$:

$$Y_{\mathrm{max}} = \frac{Fl^3}{3EJ_z}\,. \tag{67}$$



Obr. 41 K ohybové čáře krakorce

Posouzení vlivu posouvající síly na ohyb krakorce lze provést jen přibližně. V případě našeho nosníku je posouvající síla podél nosníku konstantní: $Q = F$ (viz obr. 35B), což usnadňuje naši úvahu. Problém je v tom, že tečné napětí podél výšky průřezu není konstantní, protože na okrajích je nulové a maxima dosahuje u neutrální plochy, kde je naopak nulové normálové napětí. Posouzení provedeme zjednodušeně pro krakorec obdélníkového průřezu o výšce h a šířce b, ($J_z = bh^3/12$). Střední hodnota tečného napětí je $\tau_{\text{stř}} = F/(bh)$. Toto napětí podle Hookova zákona pro smyk vyvolá zkos

$$\gamma = \frac{Y_{\mathrm{s}}}{l} = \frac{\tau_{\text{stř}}}{G} = \frac{F}{bhG}\,.$$

Odtud průhyb způsobený střední hodnotou tečného napětí je $Y_{\mathrm{s}} = \dfrac{Fl}{bhG}$. Jeho velikost porovnáme s průhybem (67) způsobeným normálovým napětím:

$$\frac{Y_{\mathrm{s}}}{Y_{\mathrm{max}}} = \frac{Fl}{bhG} \cdot \frac{3EJ_z}{Fl^3} = \frac{h^2}{4l^2} \cdot \frac{E}{G} \approx \frac{2h^2}{3l^2}\,,$$

když jsme uvážili, že mezi moduly pružnosti je přibližný vztah $E : G \approx 8 : 3$. Zvolíme-li např. $l/h = 20$, dostaneme $Y_{\mathrm{s}}/Y_{\mathrm{max}} = 1/600$, tedy méně než 0,2 %. Vliv posouvající síly je tedy pro běžné výpočty průhybu zanedbatelný.

Příklad 10 – Pevnostní výpočet krakorce

Jakým břemenem můžeme zatížit na volném konci krakorec tvořený dřevěným trámem délky $l = 1{,}50$ m a obdélníkového průřezu $b = 80$ mm, $h = 120$ mm, je-li dovolené napětí $\sigma_\mathrm{d} = 12{,}0$ MPa? Jaký bude průhyb konce krakorce? $E = 1{,}20 \cdot 10^{10}$ Pa.

Řešení

Nebezpečný průřez je v místě vetknutí, kde je ohybový moment $M = mgl$. Z pevnostní podmínky (57): $\dfrac{M_\mathrm{max}}{W_z} \leqq \sigma_\mathrm{d}$, neboli $\dfrac{6mgl}{bh^2} \leqq \sigma_\mathrm{d}$,

plyne $m_\mathrm{max} = \dfrac{bh^2\sigma_\mathrm{d}}{6gl} = 157\ \mathrm{kg}$.

Průhyb volného konce nosníku je $Y_\mathrm{max} = \dfrac{4mgl^4}{Ebh^3} = 18{,}8\ \mathrm{mm}$.

4.7 Vzpěr přímých prutů

V dosavadních řešeních problémů zatížených elementů konstrukcí jsme vycházeli z pevnostní podmínky. Znehodnocení součástky může nastat i tím, že náhle změní svůj tvar. Příkladem může být štíhlý prut (např. plastové pravítko) zatížený osovou tlakovou silou. Při překročení určité osové síly prut příčně vybočí, plasticky se deformuje, případně zlomí, protože nemůže zachovat svůj tvar – **ztratí stabilitu**.

Problém stability osově zatíženého prutu vyřešil již r. 1744 *Leonard Euler* (1707 – 1783). Technici jeho poznatky zpočátku nebrali na vědomí – až do doby, kdy došlo k zřícení několika příhradových železničních mostů v počátečním stadiu rozvoje železnice. (Největší havárie se stala v polovině 19. století ve Švýcarsku – rodné zemi Eulera.) Od té doby platí přísné normy pro kontrolu vzpěrné pevnosti osově stlačovaných prutů. Nyní odvodíme **Eulerův vztah pro kritickou sílu**, při níž dochází ke ztrátě stability přímého prutu.

Uvažujme tyč konstantního příčného průřezu S a tuhosti v ohybu $EJ_z = \mathrm{konst.}$, která je zatížena v ose tlakovou silou $\boldsymbol{F}$ (obr. 42). Při zvětšování síly $\boldsymbol{F}$ dojde k příčné deformaci tyče, která se projeví průhybem $Y = Y(x)$. Vyšetřeme, zda mimo přímé tyče může být v rovnováze i takto příčně deformovaná tyč. Síla $\boldsymbol{F}$ vyvolá v průřezu C ohybový moment $M(x) = -F \cdot Y(x)$ a průhyb tyče bude popsán diferenciální rovnicí (65), neboli

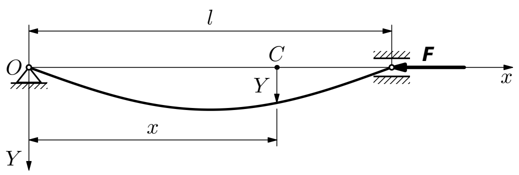
$$EJ_z \frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}x^2} = -FY(x)\,.$$

Přepíšeme ji do tvaru

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}x^2} + p^2 Y = 0}\,, \tag{68}$$

kde jsme zavedli konstantu p vztahem

$$p^2 = \frac{F}{EJ_z}\,. \tag{69}$$



Obr. 42 K výpočtu Eulerovy kritické síly

Vztah (68) je diferenciální rovnice 2. řádu s konstantním koeficientem p, která má obecné řešení

$$Y = A\sin px + B\cos px\,, \tag{70}$$

jak se můžeme přesvědčit dosazením funkce (70) a její druhé derivace do (68). Integrační konstanty A, B určíme z okrajových podmínek úlohy: průhyb Y musí splňovat v bodech $x = 0$ a $x = l$ podmínky $Y(0) = 0$, $Y(l) = 0$. Dosadíme-li první podmínku do obecného řešení, dostaneme $B = 0$. Z druhé podmínky a z (70) pak vyplývá podmínka $A\sin pl = 0$. Pomineme-li triviální řešení $A = 0$, které nemá pro nás význam, dostaneme podmínku $\sin pl = 0$, která je splněna pro

$$pl = k\pi\,, \quad \text{kde} \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{71}$$

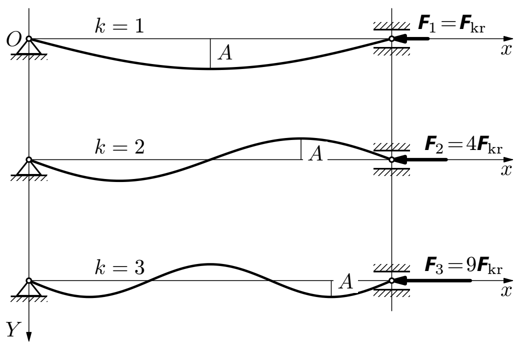
První z hodnot k, tj. $k = 0$ odpovídá nezatížené tyči a nemá opět fyzikální význam. Partikulární integrál rovnice (68), který vyhovuje našim podmínkám, má tedy tvar

$$\boxed{Y = A\sin\frac{k\pi x}{l}\,, \quad \text{kde} \quad k = 1,\ 2,\ \ldots} \tag{72}$$

Nejmenší sílu, při níž nastává rovnováha deformované tyče, dostaneme z (71) pro $k = 1$. S přihlédnutím k označení (69) je

$$\boxed{F_{\mathrm{kr}} = \frac{\pi^2 EJ_z}{l^2}}\,. \tag{73}$$

Toto je **Eulerův výraz pro kritickou sílu** – při jejím dosažení ztrácí tyč stabilitu. Konstanta A v (72) má význam maximálního průhybu prutu.



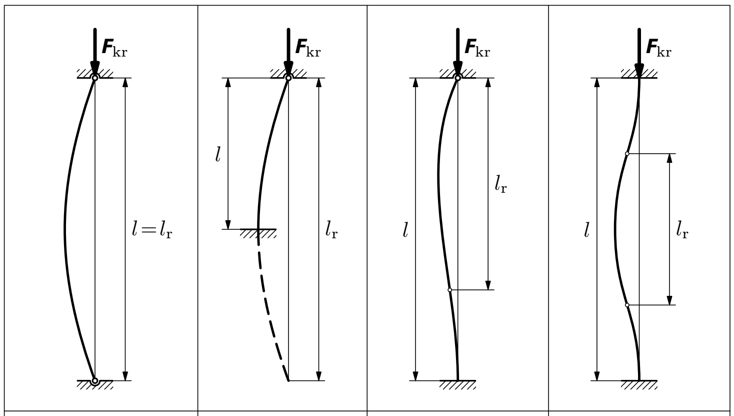
Obr. 43 Grafy funkcí, které představují první tři stabilní řešení rovnice (68)

Tvar ohybové čáry pro $k = 1,\ 2,\ 3$ je na obr. 43. Síla $\boldsymbol{F}_k$, pro níž nastává rovnováha, má obecně velikost $F_k = k^2 F_{\mathrm{kr}}$. Případy pro $k > 1$ však nemají praktický význam, protože ztráta stability nastane již při $k = 1$.

Eulerův výraz pro kritickou sílu (73) platí pro prut s kloubově uloženými konci. Analogickým postupem by bylo možné odvodit i jiné případy – změní se jen okrajové podmínky. Ostatní případy uložení lze převést na základní případ zavedením **redukované délky prutu** l_{r} (viz tab. V). Kritická síla je dána výrazem

$$F_{\mathrm{kr}} = \frac{\pi^2 E J_z}{l_{\mathrm{r}}^2}\,. \tag{74}$$

Tabulka V. Redukované délky různě uložených prutů



$l_{\mathrm{r}} = l$	$l_{\mathrm{r}} = 2l$	$l_{\mathrm{r}} = \dfrac{l}{\sqrt{2}}$	$l_{\mathrm{r}} = \dfrac{l}{2}$

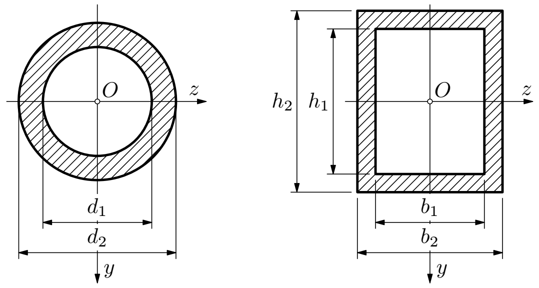
Na závěr je třeba poznamenat, že zde uvedené úvahy a výpočty platí pouze pro oblast platnosti Hookova zákona, pro níž byla odvozena rovnice (68). Je to oblast **pružného vzpěru**. Poté následuje oblast pružně-plastického vzpěru. Kontrola nosníku namáhaného na tlak a vzpěr je předepsána normou. Rozhodující veličinou pro nutnost kontroly na vzpěr je hodnota **štíhlosti nosníku** definované výrazem $\lambda = l_{\mathrm{r}}\sqrt{S/J_z}$. Je-li $\lambda \geqq 10$, je nutná kontrola na vzpěr. Podrobnosti lze nalézt v odborné literatuře (např. [3], [8]).

4.8 Úlohy ke kapitole 4

19. Geometrické charakteristiky dutých profilů

a) Vypočtěte kvadratické momenty (polární a osový) a průřezové moduly v krutu a ohybu průřezu ve tvaru mezikruží.

b) Vypočtěte kvadratické osové momenty a průřezové moduly dutého obdélníka. Rozměry průřezů jsou vyznačeny na obr. 44.



Obr. 44 K výpočtu geometrických charakteristik

20. Navíjení drátu

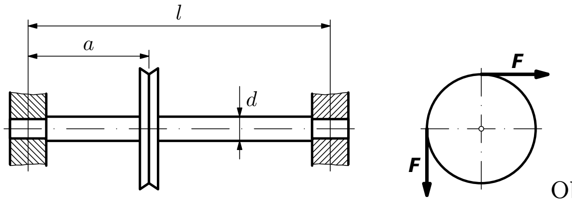
Ocelový drát o průměru $d = 2{,}00$ mm se navíjí na buben o průměru $D = 900$ mm. Vypočtěte největší napětí, které přitom v drátu vzniká.

21. Ocelové svinovací pásmo

Na jaký nejmenší poloměr lze svinout ocelové měřicí pásmo, které má tloušťku $h = 0{,}15$ mm, nemá-li docházet k jeho trvalé deformaci? Mez pružnosti použité oceli $\sigma_{\mathrm{e}} = 350$ MPa, $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Pa.

22. Osa vodicí kladky

Vypočtěte průměr d osy vodicí kladky podle obr. 45, je-li dáno: $a = 200$ mm, $l = 500$ mm, $F = 3\,500$ N, ocel 11 370 ($\sigma_{\mathrm{kt}} = 200$ MPa), míra bezpečnosti $k = 2{,}0$.



Obr. 45 Vodicí kladka

23. Průhyb nosníku

Vypočtěte maximální průhyb nosníku délky l uloženého na koncích na pevné a posuvné podpoře a zatíženého uprostřed osamělou svislou silou $\boldsymbol{F}$. Je dána tuhost v ohybu EJ_z = konst. *Nápověda:* k řešení využijte výsledek (67) pro krakorec.

24. Určení Youngova modulu z průhybu nosníku

Využijte výsledku úlohy 23 k určení Youngova modulu z průhybu tyče zatěžované uprostřed závažím o hmotnosti $m = 2{,}00$ kg (přesně). Opakovaným měřením na ocelové tyči o délce l a obdélníkovém průřezu (šířka b, výška h) byly získány tyto hodnoty (jsou uvedeny i chyby použitých měřidel):

l/mm	999,5	1000	999,5	1000	1000,5	ocel. pásmo, chyba ±0,5 mm
b/mm	19,8	19,7	19,9	20,1	20,0	posuv. měř., chyba ±0,05 mm
h/mm	5,97	5,99	6,00	6,01	5,99	mikrometr, chyba ±0,01 mm
Y/mm	5,41	5,40	5,42	5,40	5,41	indikátor, chyba ±0,005 mm

Určete hodnotu E a její chybu (využijte text [9]).

25. Průhyb tyče vlastní tíhou

Odvoďte rovnici ohybové čáry a vypočtěte největší průhyb ocelové tyče kruhového průřezu o průměru $d = 20{,}0$ mm a délce $l = 5{,}00$ m působením vlastní tíhy. Tyč je podepřena na koncích. Jaké bude největší napětí v tyči? Hustota ocele je $\varrho = 7{,}85 \cdot 10^3$ kg · m^{-3}, $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Pa.

26. Vzpěr trubky

a) Vypočtěte Eulerovu kritickou sílu pro lešenářskou trubku délky $l = 4{,}00$ m. Její průřez má tvar mezikruží ($d_1 = 41{,}0$ mm, $d_2 = 48{,}0$ mm). K výpočtu kvadratického momentu využijte výsledek úl. 19. $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Pa.

b) Jaká bude v trubce přípustná tlaková síla při míře bezpečnosti $k_\text{v} = 3{,}0$ a jaké bude v trubce napětí?

c) Z lešenářských trubek délky $l = 4{,}0$ m zhotovíme stojan, jehož hrany budou tvořit čtyřstěn. Jaké břemeno můžeme zavěsit do jeho vrcholu, aby nebyla překročena přípustná síla podle bodu b)?

5 ŘEŠENÍ ÚLOH

1. Pevnostní podmínka

$$\frac{2mg}{\pi d^2} \leqq \frac{\sigma_{\rm kt}}{k} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{2mgk}{\pi\sigma_{\rm kt}}} = 12{,}5\ \text{mm}$$

2. a) Frekvence základního tónu

$$f = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\varrho S}} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}} \quad \Rightarrow \quad \sigma = 4l^2 f^2 \varrho = 1\,420\ \text{MPa}\,,$$

napínající síla

$$F = 4\pi r^2 l^2 f^2 \varrho = 69{,}7\ \text{N}\,.$$

b) $\Delta l = \dfrac{\sigma l}{E} = \dfrac{4}{E} l^3 f^2 \varrho = 2{,}20$ mm.

3. Užitím Pythagorovy věty a po zanedbání ε^2 oproti ε dostaneme vztah $\delta^2 = l^2\varepsilon/2$. Z Hookova zákona pak plyne

$$\sigma_{\rm p} = \frac{2\delta^2}{l^2} E = 58{,}5\ \text{MPa}\,, \quad \sigma_{\rm c} = \sigma + \sigma_{\rm p} = 1\,480\ \text{MPa}\,.$$

4. a) $\sigma = \dfrac{F}{\pi r^2} = 9{,}55$ MPa,

b) $\sigma' = \sigma + E\alpha(t - t') = 133$ MPa, $F' = \pi r^2 \sigma' = 418$ N.

5. $\sigma = \dfrac{4F}{\pi d^2} = 177$ MPa, $\quad E = \dfrac{4Fl}{\pi d^2 \Delta l} = 2{,}05 \cdot 10^{11}$ Pa, $\quad \mu = \dfrac{l\Delta d}{d\Delta l} = 0{,}28$.

6. $t_{\min} = \dfrac{k'F}{\pi d \sigma_{\rm pd}} = 7{,}96$ mm. Volíme $t = 8{,}0$ mm.

7. a) Na element dξ ve vzdálenosti ξ od konce působí síla $F_\xi = \mu g \xi$, která způsobí jeho prodloužení. Celkové prodloužení dostaneme integrací

$$\Delta l_0 = \frac{\mu g}{ES}\int_0^l \xi\,\mathrm{d}\xi = \frac{\mu g l^2}{2ES} = 440\ \text{mm}.$$

b) Prodloužení lana a největší napětí bude

$$\Delta l = \frac{mgl}{ES} + \Delta l_0 = 1\,109\ \text{mm}, \quad \sigma_{\max} = \frac{g}{S}(m + \mu l) = 136\ \text{MPa}.$$

8. Aby kroužek zachytil osovou sílu F_a, musí vzniknout ve stykové ploše po nalisování tlak

$$p = \frac{F_\mathrm{a}}{2\pi rbf}\,.$$

Dále postupujeme jako v příkladě 3 s tím rozdílem, že element odstředivé síly nahradíme elementem radiální síly $\mathrm{d}F_\mathrm{o} = pbr\mathrm{d}\alpha$. Pak vnitřní obvodová síla bude

$$F = pbr = \frac{F_\mathrm{a}}{2\pi f}$$

a napětí v příčném řezu o plošném obsahu bh musí splňovat pevnostní podmínku

$$\sigma = \frac{F}{bh} = \frac{F_\mathrm{a}}{2\pi fbh} \leqq \frac{\sigma_\mathrm{pt}}{k'} \quad \Rightarrow \quad h \geqq \frac{k'F_\mathrm{a}}{2\pi fb\sigma_\mathrm{pt}} = 2{,}50 \text{ mm.}$$

Potřebný minimální přesah určíme z Hookova zákona:

$$\Delta r_\mathrm{min} = \frac{r\sigma}{E} = \frac{r\sigma_\mathrm{pt}}{k'E} = 0{,}026 \text{ mm.}$$

Potřebné minimální ohřátí $\Delta t = \dfrac{\Delta r}{r\alpha} = 65\ {}^\circ\mathrm{C}$, tedy na teplotu $90\ {}^\circ\mathrm{C}$.

9. Předpokládáme, že při pádu závaží se celá potenciální energie tíhová transformuje na deformační energii (11) při tahu, tedy

$$U = mgh = \frac{\sigma^2}{2E}\pi r^2 l \quad \Rightarrow \quad r \geqq \frac{1}{\sigma_\mathrm{d}}\sqrt{\frac{2mghE}{\pi l}} = 22{,}9 \text{ mm.}$$

Volíme $2r = 46{,}0$ mm. Pak skutečné dynamické napětí při dopadu závaží bude $\sigma_\mathrm{dyn} = 199$ MPa, kdežto statické napětí jen $\sigma_\mathrm{stat} = \dfrac{mg}{\pi r^2} = 0{,}118$ MPa, tedy $\sigma_\mathrm{dyn}/\sigma_\mathrm{stat} = 1\,690$.

10. Po zavěšení závaží se drát protáhne o $2\Delta l$ (obr 46a). Ze středu drátu vyjmeme element podle obr. 49b. Vnitřní síly, které na něj působí, musí být v rovnováze s tíhou závaží $m\boldsymbol{g}$ (obr. 46c).

a) Z geometrické situace (obr. 46a) pro $\Delta l \ll l$ je

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{l}{l + \Delta l}\right)^2} \approx \sqrt{\frac{2\Delta l}{l}} \approx \alpha\,,$$

Protažení drátu silou $\boldsymbol{F}_0$ určuje Hookův zákon $\dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{F_0}{ES}$, $F_0 \gg F$.

Z rovnováhy sil (obr. 46c) pro malé úhly plyne $mg = 2\alpha(F + F_0)$.

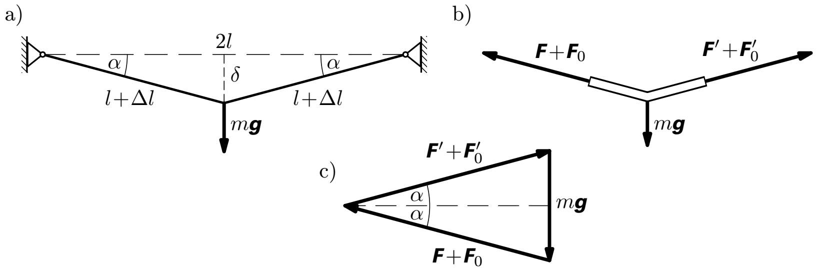
Odtud dosazením za α a $\Delta l/l$ dostaneme $mg = 2\sqrt{\dfrac{2F_0}{ES}}(F_0 + F)$.

Řešení vede na obtížně řešitelnou rovnici třetího stupně pro F_0. Budeme-li předpokládat $F \ll F_0$, můžeme v závorce F zanedbat a sílu F_0 snadno určit:

$$F_0 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{ES(mg)^2} = 499\ \mathrm{N}.$$

(Výsledek splňuje předpoklad $F \ll F_0$.)

b) $\sigma_c = \dfrac{F_0 + F}{S} = 168\ \mathrm{MPa}$, c) $\delta \approx l\alpha = l\sqrt{\dfrac{2F_0}{ES}} = l\sqrt[3]{\dfrac{mg}{ES}} = 98{,}4\ \mathrm{mm}$.



Obr. 46 Svisle zatížený drát a síly v něm působící

11. a) Frekvence základního tónu struny je vyjádřena vztahem

$$f_1 = \frac{v}{2l} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{\sigma}{\varrho}}.$$

Úpravou dostaneme $\sigma = 4l^2 f_1^2 \varrho = 976\ \mathrm{MPa}$.

b) Při napínání struny dojde k jejímu prodloužení podle Hookova zákona

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{\Delta l}{l}E.$$

Zahřátím se struna délky l prodlouží o $\Delta_t l = l\alpha\Delta t$ a o tuto hodnotu se tedy zmenší deformace tahem. Napětí struny se zmenší na

$$\sigma' = \frac{\Delta l - \Delta_t l}{l}E = \sigma - E\alpha\Delta t = 976\ \mathrm{MPa} - 33\ \mathrm{MPa} = 946\ \mathrm{MPa}$$

a frekvence struny poklesne na $f_1' = \dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{\sigma'}{\varrho}} = 433\ \mathrm{Hz}$.

12. Hlava závěsu je namáhána v ploše $S_1 = \pi hd$ na smyk. Pevnostní podmínka $\tau = \dfrac{F}{\pi hd} \leqq \tau_d = \dfrac{\sigma_{kt}}{k\sqrt{3}}$. Současně je čep na ploše $S_2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$ namáhán na tah. Pevnostní podmínka $\sigma = \dfrac{4F}{\pi d^2} \leqq \dfrac{\sigma_t}{k}$. Odtud $d_{\min} = 2\sqrt{\dfrac{kF}{\pi\sigma_{kt}}} = 14{,}0$ mm; volíme $d = 15$ mm. Z první podmínky pak $h_{\min} = \dfrac{kF\sqrt{3}}{\pi d\,\sigma_{kt}} = 5{,}7$ mm. Volíme $h = 6{,}0$ mm.

13. $d = \sqrt{\dfrac{120\sqrt{3}P}{\pi^2 nR\sigma_{pt}}} = 5{,}0$ mm.

14. $d \geqq \sqrt[3]{\dfrac{480P}{\pi^2 n\tau_d}} = 27{,}2$ mm; volíme $d = 30$ mm.

15. Při náhlém zastavení se celá kinetická energie setrvačníku transformuje na deformační energii při krutu, přičemž pro dovolený moment musí platit $M_k \leqq \tau_d W_k = \dfrac{\tau_d J_p}{r}$, kde $J_p = \dfrac{\pi r^4}{2}$. Z (40) plyne podmínka

$$J\left(\frac{\pi n}{30}\right)^2 \leqq \frac{\tau_d^2 J_p l}{r^2 G} = \frac{\tau_d^2 \pi r^2 l}{2G} \quad \Rightarrow \quad n_{\max} = 30r\tau_d\sqrt{\frac{l}{2\pi GJ}} = 9{,}27\ \text{min}^{-1}.$$

16. Kroutící moment $M_k = mgR/10$; úhel zkroucení a maximální napětí:

$$\varphi = \frac{mgRl}{5\pi Gr^4} = 0{,}150\ \text{rad} = 9{,}17°, \quad \tau_{\max} = \frac{mgR}{5\pi r^3} = 199\ \text{MPa}.$$

17. $P = \dfrac{\pi^2 d^4 fG\varphi}{16l} = 51{,}9$ kW, $\quad \tau_{\max} = \dfrac{\varphi Gd}{2l} = 135$ MPa.

18. $\Delta\varphi = \dfrac{4\varkappa Lm_1m_2l}{\pi Gr^4R^2} = 0{,}256\ \text{rad} = 14{,}6°$.

19. Podle principu superpozice odečteme kvadratický moment vnitřní části profilu; u mezikruží dále platí vztah $J_p = 2J_z$.

Mezikruží:

$$J_p = \frac{\pi}{32}(d_2^4 - d_1^4), \quad J_z = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi}{64}(d_2^4 - d_1^4),$$

$$W_k = \frac{2J_p}{d_2} = \frac{\pi}{16d_2}(d_2^4 - d_1^4), \quad W_z = \frac{2J_z}{d_2} = \frac{\pi}{32d_2}(d_2^4 - d_1^4) = \frac{W_k}{2}.$$

Dutý obdélník:

$$J_z = \frac{1}{12}(b_2h_2^3 - b_1h_1^3), \quad J_y = \frac{1}{12}(h_2b_2^3 - h_1b_1^3),$$

$$W_z = \frac{2J_z}{h_2} = \frac{1}{6h_2}(b_2h_2^3 - b_1h_1^3), \quad W_y = \frac{2J_y}{b_2} = \frac{1}{6b_2}(h_2b_2^3 - h_1b_1^3).$$

20. Poloměr křivosti neutrální vrstvy je $\varrho = D/2$. Z toho plyne ohybový moment $M = -\dfrac{E}{\varrho} J_z$ a napětí: $\sigma = -\dfrac{M}{J_z} r = \dfrac{2Er}{D} = 467\ \mathrm{MPa}$.

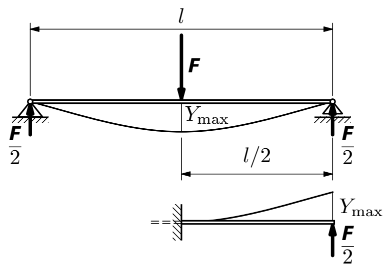
21. $R = \dfrac{Eh}{2\sigma_{\mathrm{e}}} = 45\ \mathrm{mm}$.

22. Maximální ohybový moment je v místě kladky: $M_{\max} = \dfrac{a\sqrt{2}}{l}(l-a)F$,

$$d \geqq \sqrt[3]{\frac{32\sqrt{2}k(l-a)aF}{\pi l \sigma_{\mathrm{kt}}}} = 39{,}3\ \mathrm{mm}\,, \quad \text{volíme} \quad d = 40\ \mathrm{mm}\,.$$

23. Problém převedeme na řešení krakorce podle obr. 47. Do výrazu (67) dosadíme za l hodnotu $l/2$, za F hodnotu $F/2$ a dostaneme

$$Y_{\max} = \frac{Fl^3}{48EJ_z}\,.$$



Obr. 47
K výpočtu průhybu nosníku
na dvou podporách

24. $\delta = \sqrt{\delta_{\mathrm{n}}^2 + \delta_{\mathrm{m}}^2}$, δ_{n} … náhodná chyba, δ_{m} … chyba měřidla,

$l = (999{,}9 \pm 0{,}6)\ \mathrm{mm}$, $b = (19{,}90 \pm 0{,}09)\ \mathrm{mm}$, $h = (5{,}992 \pm 0{,}013)\ \mathrm{mm}$,

$Y = (5{,}408 \pm 0{,}007)\ \mathrm{mm}$,

Využijeme závěr řešení úlohy 23, přičemž $J_z = bh^3/12$:

$$\overline{Y} = \frac{F\overline{l}^3}{48\overline{E}\dfrac{\overline{bh}^3}{12}} = \frac{F\overline{l}^3}{4\overline{E}\overline{bh}^3}\,, \quad \Rightarrow \quad \overline{E} = \frac{F\overline{l}^3}{4\overline{Y}\overline{bh}^3} = 2{,}118 \cdot 10^{11}\ \mathrm{Pa},$$

$$s_{\overline{E}} = \overline{E}\sqrt{\left(3\frac{s_{\overline{l}}}{\overline{l}}\right)^2 + \left(\frac{s_{\overline{Y}}}{\overline{Y}}\right)^2 + \left(\frac{s_{\overline{b}}}{\overline{b}}\right)^2 + \left(3\frac{s_{\overline{h}}}{\overline{h}}\right)^2} = 0{,}018 \cdot 10^{11}\ \mathrm{Pa},$$

$E = (2{,}12 \pm 0{,}02)\ \mathrm{Pa}$.

25. Jde o nosník zatížený spojitým zatížením (obr. 48) o délkové hustotě

$$q = \frac{\pi d^2}{4} \varrho g = 24{,}2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} .$$

Ohybový moment $M = -\frac{q}{2}(l - x)x$.

Rovnice ohybové čáry a její integrace jsou $EJ_z \frac{\mathrm{d}^2 Y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{q}{2}(lx - x^2)$,

$$EJ_z \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = -\frac{q}{2}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C_1 , \qquad EJ_z Y = -\frac{q}{2}\left(\frac{lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + C_1 x + C_2 .$$

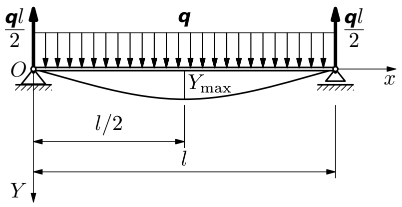
Z okrajové podmínky, že pro $x = l/2$ je $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}x = 0$, plyne $C_1 = ql^3/24$.
Z okrajové podmínky $Y = 0$ pro $x = 0$ plyne $C_2 = 0$. Ohybová čára má rovnici

$$Y = \frac{q}{24EJ_z}(l^3 x - 2lx^3 + x^4) ; \quad Y_{\max} = \frac{5ql^4}{384EJ_z} \quad \text{pro} \quad x = \frac{l}{2} .$$

Kvadratický osový moment $J_z = \frac{\pi d^4}{64} = 7{,}85 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$.

Maximální průhyb $Y_{\max} = 119$ mm.

Největší napětí je pro $x = l/2$: $\sigma = \frac{|M_{\max}|}{W_z} = \frac{ql^2 d}{16J_z} = \frac{4ql^2}{\pi d^3} = 96{,}3$ MPa.



Obr. 48 Nosník se spojitým zatížením

26. a) $J_z = \frac{\pi d_2^4}{64}\left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4\right] = 1{,}22 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4 , \quad F_{\text{kr}} = \frac{\pi^2 E J_z}{l^2} = 15{,}8 \text{ kN} .$

b) $F = \frac{F_{\text{kr}}}{k_{\text{v}}} = 5\,270 \text{ N} , \quad \sigma = \frac{4F}{\pi(d_2^2 - d_1^2)} = 10{,}8 \text{ MPa} .$

c) Mezi tíhovou silou G zavěšeného břemene a velikostí síly F v každé ze tří trubek odvodíme užitím geometrie čtyřstěnu vztah $G = F\sqrt{6}$. Břemeno může mít maximální hmotnost $m_{\max} = F\sqrt{6}/g = 1\,320$ kg.

Literatura

[1] *Brdička, M. – Samek, L. – Sopko, B.:* Mechanika kontinua. Academia, Praha, 2000.

[2] *Horák, Z. – Krupka, F. – Šindelář, V:* Technická fyzika. SNTL, Praha, 1960 a 1961.

[3] *Höschl, C.:* Pružnost a pevnost ve strojnictví. Praha, SNTL/ALFA, 1971.

[4] *Kříž, R. – Vávra, P.:* Strojírenská příručka, 3. svazek. Praha, Scientia, 1993.

[5] *Szabó, I.:* Mechanika tuhých těles a kapalin. Praha, SNTL, 1967.

[6] *Vybíral, B.:* Základy teoretické mechaniky, 2. díl. Hradec Králové, Gaudeamus, 1992.

[7] *Vybíral, B.:* Pružnost a pevnost I. Vyškov: Vysoká vojenská škola pozemního vojska, 1974. Košice: Vysoká vojenská letecká škola, 1977. Martin: Vysoká vojenská velitelsko-technická škola, 1978.

[8] *Vybíral, B.:* Pružnost a pevnost II. Vyškov: Vysoká vojenská škola pozemního vojska, 1975. Košice: Vysoká vojenská letecká škola, 1977. Martin: Vysoká vojenská velitelsko-technická škola, 1978.

[9] *Vybíral, B.:* Zpracování dat fyzikálních měření.
Knihovnička FO č. 52, Hradec Králové, MAFY, 2002.

[10] *Vybíral, B.:* Statika tuhého tělesa.
Knihovnička FO č. 26, Hradec Králové, MAFY, 1996.

[11] *Vybíral, B.:* Setrvačníky a jejich aplikace.
Knihovnička FO č. 34, Hradec Králové, MAFY, 1998.

[12] *Jarešová, M. – Volf, I.:* Skaláry, vektory ....
Knihovnička FO č. 73, Hradec Králové, MAFY, 2006.

[13] *Jarešová, M. – Volf, I – Vybíral, B.:* Kapitoly z matematiky pro řešitele fyzikální olympiády. Knihovnička FO č. 73, Hradec Králové, MAFY, 2006.

Příloha

Tabulka I

Youngův modul E, modul pružnosti ve smyku G,
Poissonovo číslo μ a teplotní součinitel delkové roztažnosti α
(podle [3] a [4])

Materiál	E/MPa	G/MPa	μ	$\alpha \cdot 10^6\mathrm{K}^{-1}$
Ocel	$(2{,}10 \div 2{,}20) \cdot 10^5$	$(7{,}9 \div 8{,}1 \cdot 10^4$	$0{,}29 \div 0{,}30$	$12 \div 16$
Šedá litina	$(0{,}75 \div 1{,}1) \cdot 10^5$	$(3{,}0 \div 5{,}5) \cdot 10^4$	0,25	9
Měď	$(1{,}10 \div 1{,}18 \cdot 10^5$	$4{,}4 \cdot 10^4$	0,35	14
Bronz	$1{,}1 \cdot 10^5$	$4{,}2 \cdot 10^4$	0,25	15
Mosaz	$(8 \div 9) \cdot 10^4$	$3{,}5 \cdot 10^4$	0.25	18
Hliník a jeho slitiny	$(6{,}9 \div 7{,}0) \cdot 10^4$	$2{,}7 \cdot 10^4$	0,33	23
Hořčík a jeho slitiny	$3{,}4 \cdot 10^4$	$1{,}4 \cdot 10^4$	$0{,}20 \div 0{,}30$	26
Zinek	$(8{,}3 \div 9{,}1) \cdot 10^4$	$(3{,}2 \div 3{,}3) \cdot 10^4$	0,27	36
Olovo	$1{,}7 \cdot 10^4$	$6{,}0 \cdot 10^3$	0,45	29
Sklo	$(6 \div 7) \cdot 10^4$	$2{,}4 \cdot 10^4$	0,23	$5 \div 8$
Bakelit	$5 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^4$	0,25	—
Celuloid	$3{,}9 \cdot 10^3$	$1{,}5 \cdot 10^3$	0,35	—
Polyethylen	235	85	0,38	—
Polystyren	$3{,}4 \cdot 10^3$	$1{,}3 \cdot 10^3$	0,33	—
Plexisklo	$2{,}1 \cdot 10^3$	800	0,35	—
Dřevo ve sm. vláken	$1{,}2 \cdot 10^4$	$5{,}0 \cdot 10^3$	—	$4 \div 9$
Dřevo napříč vláken	$2{,}7 \cdot 10^3$	—	—	—
Pryž	$8 \div 20$	$7 \div 3$	0,50	—
Beton	$(1{,}5 \div 2{,}5 \cdot 10^4$	$8{,}0 \cdot 10^3$	0,13	$10 \div 14$
Cihlové zdivo	$2{,}7 \cdot 10^3$	—	—	—

Tabulka II

Mechanické vlastnosti některých konstrukčních ocelí

Označení podle ČSN	Mez kluzu σ_{kt}/MPa	Pevnost v tahu σ_{pt}/MPa
11 340 (10 340)	180 až 210	340 až 420
11 370 (10 370)	200 až 240	370 až 450
11 500	260 až 290	500 až 620
11 600	300 až 340	600 až 720
12 050	400	650 až 800
13 251 (pružinová)	980	1 150 až 1 500

Tabulka III

Mechanické vlastnosti některých křehkých konstrukčních materiálů

Materiál	Pevnost v tahu $\sigma_{\mathrm{pt}}/\mathrm{MPa}$	Pevnost v tlaku $\sigma_{\mathrm{pd}}/\mathrm{MPa}$	Pevnost v ohybu $\sigma_{\mathrm{po}}/\mathrm{MPa}$
Šedá litina 42 24 12	120	500	280
Šedá litina 42 24 24	240	950	430
Beton	(1,3 až 3,5)	5 až 35	1,3 až 3,5
Cihla	(0,2 až 4)	7,4 až 30	0,2 až 4
Žula	3	120 až 260	