MECHANIKA ROVINNÉHO POHYBU TUHÉHO TĚLESA

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Bohumil Vybíral, Přemysl Šedivý

Obsah

Předmluva **2**

1 Kinematika rovinného pohybu tuhého tělesa **3**
1.1 Charakteristika rovinného pohybu 3
1.2 Translační pohyb tuhého tělesa 3
1.3 Rotační pohyb tuhého tělesa kolem nehybné osy 4
1.4 Obecný rovinný pohyb. Základní rozklad pohybu 6
1.5 Pól rovinného pohybu tělesa 9
1.6 Zvláštní případy polohy pólu pohybu 10

2 Dynamika rovinného pohybu tuhého tělesa **13**
2.1 Vnější a vnitřní síly 13
2.2 Hybnost soustavy, hmotný střed 14
2.3 První impulsová věta 15
2.4 Druhá impulsová věta pro obecný rovinný pohyb 16
2.5 Dynamika otáčivého pohybu kolem nehybné osy 18
2.5.1 Moment hybnosti tělesa vzhledem k nehybné ose. Moment setrvačnosti 18
2.5.2 Druhá impulsová věta pro rotaci kolem nehybné osy . . 18
2.5.3 Srovnání rotačního pohybu kolem nehybné osy s translačním pohybem 19
2.5.4 Výpočet momentu setrvačnosti 22
2.5.5 Steinerova věta 24
2.5.6 Momenty setrvačnosti homogenních těles jednoduchého geometrického tvaru o hmotnosti m 25
2.6 Dynamika obecného rovinného pohybu tuhého tělesa 28
2.7 Kinetická energie tuhého tělesa při obecném rovinném pohybu 35
2.8 Zákon zachování mechanické energie 35

Výsledky úloh **42**

Literatura **44**

Předmluva

Předložený studijní text se zabývá mechanikou rovinného pohybu tuhého tělesa. Vznikl zkrácením a přepracováním podobného studijního textu [4] z roku 1997 tím, že se omezuje jen na rovinný pohyb tělesa.

Probíraná látka se vztahuje k mechanice tuhých těles, která je jedním z pilířů celé fyziky. Zabývá se jednak popisem pohybu tělesa, neboli kinematikou rovinného pohybu, a také vztahem mezi kinematickými veličinami pohybu a silami či momenty sil, které pohyb ovlivňují, neboli dynamikou rovinného pohybu. Aplikace této části mechaniky jsou významné pro technické obory, zejména strojírenství.

Studijní text je nadstavbou učiva, které je ve středoškolských učebnicích fyziky, a poskytuje průpravu pro řešení náročnějších úloh, které se často vyskytují ve Fyzikální olympiádě. Obsahuje 10 vyřešených příkladů a 12 úloh s uvedenými výsledky řešení.

Pro další studium doporučujeme navazující text [5], který pojednává o setrvačnících. Pro vážné zájemce o mechaniku pak učebnice [1], [2[a [3], které jsou však už učebnicemi vysokoškolskými.

1 Kinematika rovinného pohybu tuhého tělesa

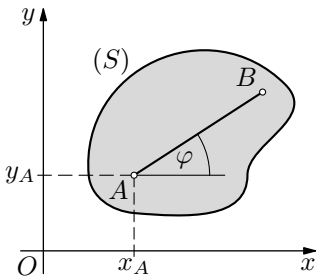
1.1 Charakteristika rovinného pohybu

Při rovinném pohybu opisují body tělesa rovinné trajektorie, které leží ve vzájemně rovnoběžných rovinách. Proto pro popis rovinného pohybu postačí popisovat průmět (S) tělesa do jedné z těchto rovin, kterou volíme za *základní*. Tak místo trojrozměrného tělesa vyšetřujeme pohyb plošného útvaru v rovině. Do základní roviny umístíme počátek O a osy x, y kartézské souřadnicové soustavy (obr. 1).

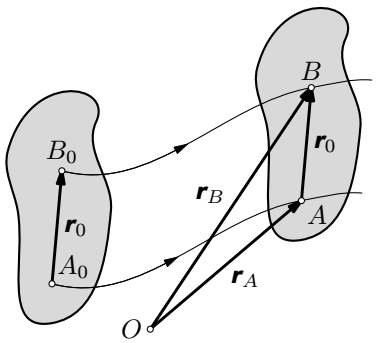
Poloha tělesa při rovinném pohybu bude jednoznačně určena polohou úsečky AB ve vztažné soustavě v základní rovině, tedy polohou referenčního (vztažného) bodu (např. bodu A) a směrem úsečky AB. Pohyb budou popisovat rovnice

$$\begin{aligned} x_A &= x_A(t) \\ y_A &= y_A(t), \\ \varphi &= \varphi(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Těleso vykonávající rovinný pohyb má tedy *tři stupně volnosti.*



Obr. 1



Obr. 2

1.2 Translační pohyb tuhého tělesa

Při translačním pohybu zůstává úsečka spojující libovolné dva body tělesa stále rovnoběžná se svou výchozí polohou. Proto mají trajektorie všech bodů tělesa při jeho translaci shodný tvar a stejnou délku — trajektorie jsou shodné, vzájemně posunuté křivky. Při translačním pohybu libovolná přímka spojená s tělesem nemění svůj směr. Uvažujme dva body A, B tělesa při translačním pohybu (obr. 2). Pro jejich polohové vektory platí

$$\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_A(t),$$
$$\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_B(t) = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_0,$$

kde vektor $\boldsymbol{r}_0$ je konstantní. Proto pro rychlost a zrychlení dvou libovolných bodů tělesa dostaneme

$$\boldsymbol{v}_B = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_A, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{a}_B = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_A}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}_A. \tag{3}$$

Všechny body tuhého tělesa se tedy při translačním pohybu pohybují *stejnou rychlostí a se stejným zrychlením*. Pohybový stav tuhého tělesa je proto při translačním pohybu jednoznačně určen pohybem jediného bodu, za který zpravidla volíme hmotný střed tělesa. K řešení translačního pohybu tedy použijeme poznatků pro pohyb jednoho hmotného bodu.

1.3 Rotační pohyb tuhého tělesa kolem nehybné osy

Při rotaci tuhého tělesa kolem osy nehybné v tělese i ve vztažné soustavě se pohybují všechny body tělesa (s výjimkou bodů osy) po trajektoriích ve tvaru kružnic ležících v rovinách kolmých k ose se středem na ose. Rotační pohyb tělesa kolem pevné osy je zvláštním případem rovinného pohybu. Ve zvolené inerciální vztažné soustavě je pohybový stav tělesa popsán jedinou souřadnicí — *úhlem otočení* $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, který definujeme jako vektor ležící v ose rotace (obr. 3). Jeho směr určíme nejsnáze *pravidlem pravé ruky*: ukazují-li prsty pravé ruky směr orientované trajektorie bodů tělesa, ukáže palec směr vektoru $\boldsymbol{\varphi}$. Rychlost změny úhlu otočení popisuje vektor *úhlová rychlost* $\boldsymbol{\omega}$, který definujeme výrazem

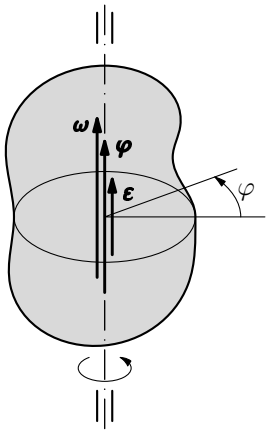
$$\boldsymbol{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\varphi}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\boldsymbol{\varphi}}.$$

Rychlost změny úhlové rychlosti popisuje vektor *úhlové zrychlení* $\boldsymbol{\varepsilon}$, který definujeme výrazem

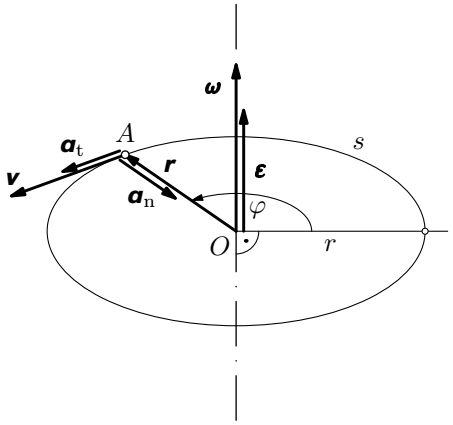
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t^2} \equiv \ddot{\boldsymbol{\varphi}}.$$

Oba vektory $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ leží v ose rotace (obr. 3). Nyní můžeme určit rychlost a zrychlení bodu A tělesa rotujícího kolem nehybné osy (obr. 4), která prochází počátkem O vztažné soustavy. Je zřejmé, že pro dráhu s a velikost v rychlosti bodu A platí

$$s = r\varphi, \qquad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = r\omega.$$



Obr. 3



Obr.4

Druhý ze vztahů nás vede k výpočtu obvodové rychlosti $\boldsymbol{v}$ jako vektoru

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}.} \tag{4}$$

Jeho derivací podle času podle vzorce pro derivaci součinu dvou funkcí při zachování pořadí funkcí (pro vektorový součin dvou vektorů ve vztahu (4) neplatí komutativní zákon) dostaneme pro zrychlení bodu A postupně výrazy

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}). \tag{5}$$

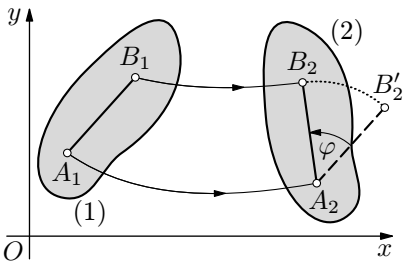
První složka zrychlení v (5) má zřejmě směr tečny ke kružnici v bodě A je tedy *tečným zrychlením* $\boldsymbol{a}_\mathrm{t}$ bodu A. Druhá složka zrychlení v (5) má zřejmě směr normály ke kružnici v bodě A je tedy *normálovým zrychlením* $\boldsymbol{a}_\mathrm{n}$ bodu A. Neboli

$$\boxed{\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\mathrm{t} + \boldsymbol{a}_\mathrm{n}, \qquad \boldsymbol{a}_\mathrm{t} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{a}_\mathrm{n} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}).} \tag{6}$$

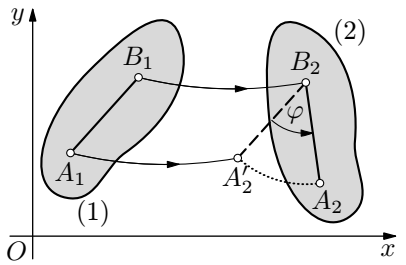
$$a_\mathrm{t} = \varepsilon r, \qquad a_\mathrm{n} = \omega v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}. \tag{7}$$

1.4 Obecný rovinný pohyb. Základní rozklad pohybu

S ohledem na popis pohybu rovnicemi (1) lze rovinný pohyb tělesa rozložit na *translační pohyb* referenčního bodu A a na *rotační pohyb* kolem referenčního bodu A — viz obr. 5. Přitom lze ukázat, že rotační složka rovinného pohybu nezávisí na volbě referenčního bodu. Na obr. 6 je znázorněn rozklad pohybu pro případ, že referenčním bodem je bod B.



Obr. 5



Obr. 6

Polohu libovolného bodu B tělesa, popsanou polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_B(t)$, lze vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{r}_B = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}_{BA},$$

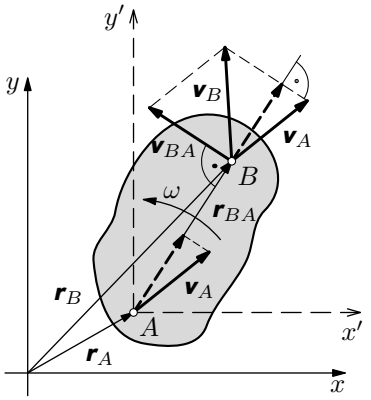
kde $\boldsymbol{r}_A = \boldsymbol{r}_A(t)$ je polohový vektor bodu A a $\boldsymbol{r}_{BA} = \boldsymbol{r}_{BA}(t)$ je polohový vektor bodu B vzhledem k bodu A ve vztažné soustavě, jejíž počátek je v bodě A a souřadnicové osy x', y' jsou rovnoběžné s osami x a y (obr. 7). Derivací tohoto vztahu podle času dostaneme vztah pro rychlost bodu B:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA} = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BA},$$

kde

$$v_{BA} = \omega \cdot r_{BA}, \quad \boldsymbol{v}_{BA} \perp AB.$$

Protože pohybem bodu B v soustavě $Ax'y'$ je rotace okolo bodu A, je rychlost $\boldsymbol{v}_{BA}$ kolmá k úsečce AB. Pak je zřejmé, že *při rovinném pohybu průměty rychlostí dvou libovolných bodů tělesa na přímku, která je spojuje, jsou si rovny* — **věta o průmětech rychlostí.**



Obr. 7

Pro zrychlení bodu B analogicky platí (srovnej se vztahy (6) a (7)):

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA\mathrm{t}} + \boldsymbol{a}_{BA\mathrm{n}} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_{BA} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_{BA}).$$

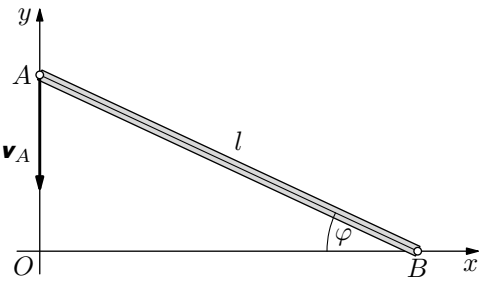
Z výrazů pro rychlost a zrychlení bodu B je zřejmý rozklad rovinného pohybu tělesa na translační pohyb referenčního bodu A a na rotační pohyb kolem tohoto bodu.

Příklad 1 – klouzající tyč

Tyč délky l se pohybuje tak, že její koncový bod A klouže po ose y a přibližuje se k bodu O stálou rychlostí $\boldsymbol{v}_A$ a koncový bod B klouže po ose x (obr. 8). V okamžiku, kdy tyč svírá s osou x úhel φ, určete:

a) rychlost a zrychlení bodu B,

b) úhlovou rychlost a úhlové zrychlení tyče.



Obr. 8

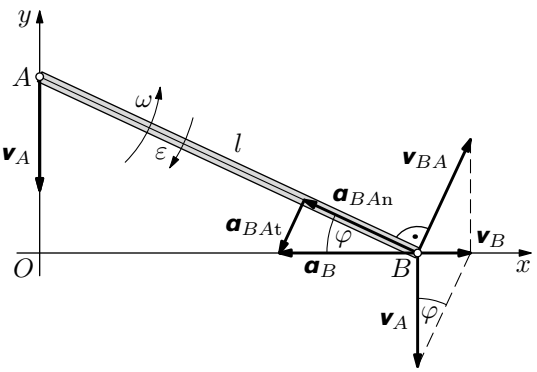
Úlohu řešte obecně a pak pro hodnoty $l = 1{,}00$ m, $v_A = 2{,}00\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $\varphi = 25°$.

Řešení

a) Ze zadání je zřejmé, že rychlost a zrychlení bodu B mají směr osy x. Zvolíme bod A jako referenční a na obr. 9 vyznačíme základní rozklad pohybu bodu B. Platí:

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}, \qquad \boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{a}_{BA\mathrm{n}} + \boldsymbol{a}_{BA\mathrm{t}},$$

přičemž $\boldsymbol{v}_{BA} \perp AB$, $\boldsymbol{a}_{BA\mathrm{t}} \perp AB$, $a_{BA\mathrm{n}} = \dfrac{v_{BA}^2}{l}$.



Obr. 9

Z nákresu odvodíme:

$$v_B = v_A \operatorname{tg}\varphi, \qquad v_{BA} = \frac{v_A}{\cos\varphi}, \qquad a_B = \frac{a_{BA\mathrm{n}}}{\cos\varphi} = \frac{v_{BA}^2}{l\cos\varphi} = \frac{v_A^2}{l\cos^3\varphi}.$$

Vektor $\boldsymbol{v}_B$ má směr kladné poloosy x, vektor $\boldsymbol{a}_B$ má směr opačný.
Číselně vychází $v_B = 0{,}93\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\ a_B = 5{,}4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

b) V daném okamžiku je velikost úhlové rychlosti tyče

$$\omega = \frac{v_{BA}}{l} = \frac{v_A}{l\cos\varphi}$$

a velikost úhlového zrychlení je

$$\varepsilon = \frac{a_{BA\mathrm{t}}}{l} = \frac{a_B\sin\varphi}{l} = \frac{v_A^2\sin\varphi}{l^2\cos^3\varphi}.$$

Orientace obou veličin je vyznačena v obrázku.
Číselně vychází $\omega = 2{,}2\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}},\ \varepsilon = 2{,}3\ \mathrm{rad\cdot s^{-2}}$,

Pro srovnání proveďme ještě analytické řešení úlohy a):
Ve výchozí poloze tyče popsané úhlem φ, kdy má bod A souřadnici $y = y_0$ a bod B souřadnici $x = x_0$, volíme počáteční okamžik $t = 0$. Závislost x-ové souřadnice bodu B na čase pak vyjadřuje funkce

$$x = \sqrt{l^2 - (y_0 - v_A t)^2} = \sqrt{l^2 - y_0^2 + 2v_A y_0\cdot t - v_A^2 t^2} = \\ = \sqrt{x_0^2 + 2v_A y_0\cdot t - v_A^2 t^2},$$

kterou dvakrát zderivujeme a dostaneme vztahy vyjadřující závislost x-ových souřadnic rychlosti a zrychlení bodu B na čase:

$$v_B = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v_A y_0 - v_A^2 t}{\sqrt{x_0^2 + 2v_A y_0\cdot t - v_A^2 t^2}}.$$

$$a_B = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{-v_A^2\sqrt{x_0^2 + 2v_A y_0\cdot t - v_A^2 t^2} - \dfrac{(v_A y_0 - v_A^2 t)^2}{\sqrt{x_0^2 + 2v_A y_0\cdot t - v_A^2 t^2}}}{x_0^2 + 2v_A y_0\cdot t - v_A^2 t^2}.$$

Dosazením $t = 0$ dojdeme k výsledkům

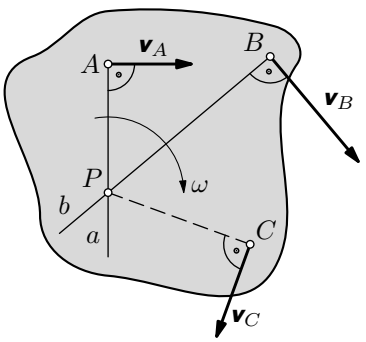
$$v_{Bx} = \frac{y_0 v_A}{x_0} = v_A\,\mathrm{tg}\,\varphi,$$

$$a_{Bx} = -v_A^2\left(\frac{1}{x_0} + \frac{y_0^2}{x_0^3}\right) = -\frac{v_A^2}{x_0}\left(\frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0^2}\right) = -\frac{v_A^2}{l\cos^3\varphi},$$

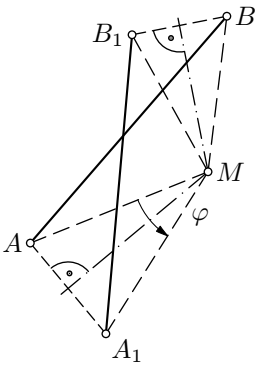
kde $l = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Tyto výsledky jsou v souladu s předcházejícím řešením. Graficko–početní metoda s užitím základního rozkladu pohybu byla ale mnohem jednodušší a názornější.

1.5 Pól rovinného pohybu tělesa

Rychlosti bodů tělesa při jeho rovinném pohybu lze jednoduše určit užitím pólu pohybu. *Pólem pohybu* neboli *okamžitým středem otáčení* se nazývá bod P průmětu tělesa do základní roviny, jehož rychlost je v daném okamžiku nulová (obr. 10).

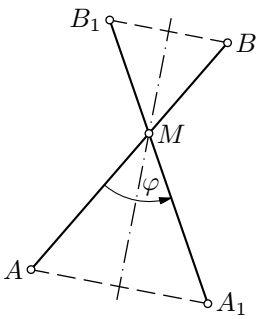


Obr. 10

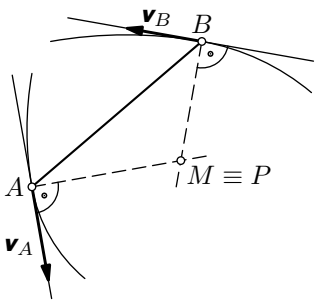


Obr.11

Nyní je otázkou, zda pól pohybu můžeme pro každý okamžik libovolného rovinného pohybu nalézt. Ukážeme, že ano. Uvažujme libovolnou úsečku AB v průmětu tělesa do roviny pohybu (obr. 11), která při pohybu přejde do polohy jiného směru A_1B_1. Průsečík M symetrál úseček AA_1, BB_1 je totiž bod, kolem něhož se úsečka AB otočí o úhel φ do nové polohy A_1B_1, neboť trojúhelníky ABM, A_1B_1M jsou shodné a pohyb lze považovat za otočení trojúhelníku ABM, k němuž náleží i úsečka AB, kolem bodu M o úhel φ. Pokud nastane zvláštní případ, že osy úseček AA_1, BB_1 splynou (obr. 12) bude bod M přímo průsečíkem úseček AB, A_1B_1.



Obr. 12



Obr. 13

Obr. 11 a 12 ukazuje, že každé přemístění úsečky AB do nové polohy A_1B_1, které není posunutím (pak by úsečky AB, A_1B_1 byly rovnoběžné) je otočením okolo nějakého bodu M, který v limitě $|AA_1| \to 0$, $|BB_1| \to 0$ nazýváme pól pohybu P.

Úsečky AA_1, BB_1 na obr. 11 a 12 jsou sečnami trajektorií příslušných bodů. V limitě pro každý časový interval tyto sečny přejdou v tečny (viz obr. 13) a osy úseček AA_1, BB_1 přejdou v normály trajektorií. Jejich průsečík je pól pohybu P.

Vraťme se nyní k popisu obecného rovinného pohybu podle obr. 9. Zvolme si body A, B, jejichž rychlosti $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$ nejsou paralelní. Pak pól P je průsečíkem přímky a, která prochází bodem A kolmo k $\boldsymbol{v}_A$, a přímky b, která prochází bodem B kolmo k $\boldsymbol{v}_B$. Pak $v_P = 0$. Kdybychom předpokládali $v_P \neq 0$ musel by podle věty o průmětech rychlostí být vektor $\boldsymbol{v}_P$ současně kolmý k a i b, což není možné.

Pro velikosti rychlostí bodů A, B platí $v_A = \omega \cdot |PA|$, $v_B = \omega \cdot |PB|$, neboli

$$\frac{v_A}{|PA|} = \frac{v_B}{|PB|} = \omega. \tag{8}$$

Velikosti rychlostí bodů tělesa při rovinném pohybu jsou úměrné jejich vzdálenosti od pólu pohybu.

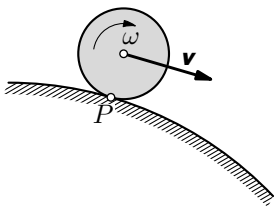
Je-li znám pól, lze určit rychlost libovolného bodu C:

$$v_C = \omega \cdot |PC|, \quad \text{kde} \quad \omega = \frac{v_A}{|PA|}.$$

Pól nejlépe určíme *graficky* ze znalosti neparalelních rychlostí dvou libovolných bodů tělesa.

1.6 Zvláštní případy polohy pólu pohybu

1. Jestliže se těleso při rovinném pohybu *odvaluje* bez skluzu, je pólem pohybu bod dotyku tělesa s podložkou (obr. 14). V daném okamžiku je $v_P = 0$, jinak by se bod P musel smýkat. Poloha bodu P je však okamžitá — bod P se přesouvá jistou rychlostí po podložce. Bude-li se odvalovat koule nebo válec po rovné podložce, bude rychlost přemisťování pólu rovna rychlosti $\boldsymbol{v}$ středu tělesa. V jiných případech, například při valení po oválu, budou tyto rychlosti různé.

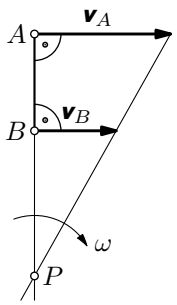


Obr. 14

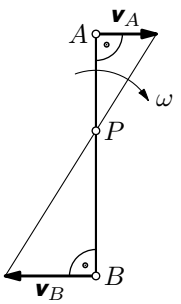
2. Jsou-li rychlosti $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$ bodů A, B tělesa při rovinném pohybu vzájemně *rovnoběžné* a kolmé na úsečku AB a mají-li *různé velikosti*, leží pól P v průsečíku přímky spojující body A, B a přímky spojující koncové body vektorů $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$ (obr. 15a, b).

3. Budou-li mít souhlasně rovnoběžné vektory $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, na rozdíl od případu ad2, *stejnou velikost a stejný směr* jde o limitní případ polohy pólu pohybu, který zřejmě leží v nekonečnu (obr. 16).

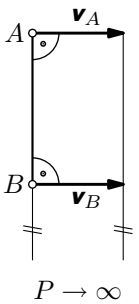
4. Jsou-li rychlosti $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, bodů A, B tělesa při rovinném pohybu souhlasně rovnoběžné vektory a nejsou-li kolmé k úsečce AB (obr. 17), tak především podle věty o průmětech rychlostí musí být $v_A \cos\alpha = v_B \cos\alpha$, neboli $v_A = v_B$. Z toho je pak zřejmé, že pól $P \to \infty$.



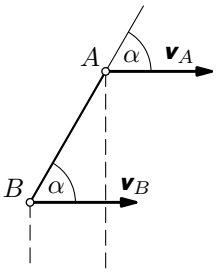
Obr. 15a



Obr. 15b



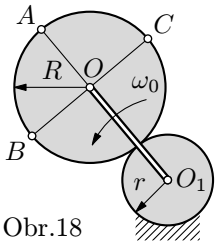
Obr. 16



Obr. 17

Příklad 2 – planetové soukolí

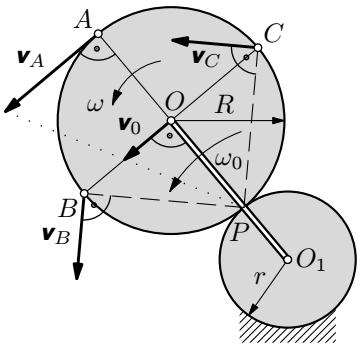
Je dáno pevné kolo o středu O_1 a poloměru r, po němž se bez skluzu odvaluje druhé kolo o středu O a poloměru R tak, že unašeč, který spojuje středy O_1, O se otáčí úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}_0$ (obr. 18). Určete směr a velikosti rychlostí bodů O, A, B, C pohyblivého kola.



Obr.18

Řešení

Problém řešíme pomocí pólu pohybu P, kterým je zřejmě bod dotyku obou kol, kolem něhož se pohyblivé kolo otáčí okamžitou úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$. Její velikost určíme z úvahy, že bod O je společný unašeči i kolu. Proto



Obr. 19

$$v_0 = \omega_0(R + r) = \omega R.$$

Z toho

$$\omega = (1 + \frac{r}{R})\omega_0.$$

Pak

$$v_A = 2R\omega = 2(R + r)\omega_0,$$

$$v_B = v_C = \sqrt{2}R\omega = \sqrt{2}(R + r)\omega_0.$$

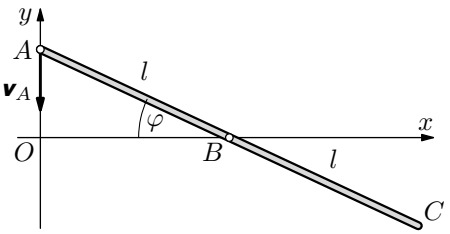
Směry vektorů rychlostí jsou zřejmé z obr. 19. Problém lze řešit rovněž přímo (bez výpočtu ω) užitím vztahu (8), přičemž výchozí bude rychlost v_0.

Úlohy

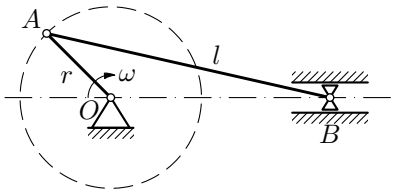
1. V příkladu 1 určete velikost rychlosti bodu B a) užitím pólu pohybu, b) užitím věty o průmětech rychlostí.

2. Tyč z příkladu 1 prodloužíme za bod B na dvojnásobnou délku (obr. 20). Bod A se opět pohybuje po ose y konstantní rychlostí $\boldsymbol{v}_A$ a bod B klouže po ose x. Určete rychlost a zrychlení volného konce C v okamžiku, kdy tyč svírá s osou x úhel φ.

3. Je dán klikový mechanismus podle obr. 21, u něhož $r : l = 1 : 3$. Klika OA se otáčí stálou úhlovou rychlostí ω. Užitím základního rozkladu pohybu určete zrychlení čepu B v levé a pravé krajní poloze.



Obr. 20



Obr. 21

2 Dynamika rovinného pohybu tuhého tělesa

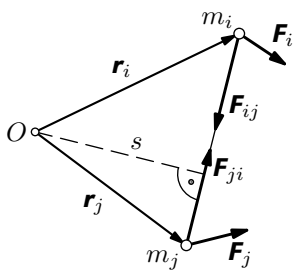
2.1 Vnější a vnitřní síly

Při odvozování pohybových rovnic tuhého tělesa budeme vycházet z Newtonových pohybových zákonů pro hmotný bod. Z metodického hlediska budeme tuhé těleso považovat za soustavu $n \to +\infty$ hmotných bodů, které jsou podrobeny tuhým vazbám. Konečné součty pak přecházejí v nekonečné řady, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} \to \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \quad - \text{ pro jednoduchost je označíme } \sum_{i}.$$

Pro zachování lepší souvislosti a názornosti výkladu tedy ponecháme označení ve tvaru sumačních znamének, avšak bez uvedení intervalu, v němž leží hodnoty indexu n. Budeme vždy předpokládat, že sumace, resp. integrace, probíhá přes celé těleso. Rovněž pro hmotnosti hmotných bodů, resp. elementů tělesa, které mají hmotnost mnohem menší než je hmotnost celého tělesa, ponecháme označení m_i. Při praktických výpočtech nahradíme sumace nekonečných řad určitými integrály. Hmotné body přitom představují elementy hmotnosti $\mathrm{d}m$. Při řešení úloh budeme předpokládat, že tělesa jsou homogenní, tedy $\mathrm{d}m = \varrho \cdot \mathrm{d}V$, kde ϱ je konstantní hustota materiálu tělesa a $\mathrm{d}V$ je element objemu.

Na soustavu hmotných bodů a tedy i na tuhé těleso obecně působí dvě soustavy sil — síly vnější a síly vnitřní. *Vnější síly* souvisejí s působením jiných bodů nebo těles, které k vyšetřovanému tělesu nepočítáme. Výslednici vnějších sil, působící na i-tý bod, označíme $\boldsymbol{F}_i$. Patří sem např. tíhová síla, kterou působí Země na uvažované těleso. Vnějšími silami jsou i síly vzájemného působení při bezprostředním dotyku tělesa s jinými tělesy, dále tlakové síly tekutin, síly elektrické a síly magnetické.



Obr. 22

Vnitřní síly souvisejí se vzájemným působením bodů uvažované soustavy. U tuhého tělesa jsou to např. vazbové síly, které uskutečňují soudržnost tělesa. Protože vnitřní síly jsou silami vzájemného působení, platí pro ně Newtonův *princip akce a reakce*. Označíme-li $\boldsymbol{F}_{ij}$ sílu, kterou působí j-tý bod na i-tý bod, a $\boldsymbol{F}_{ji}$ sílu, kterou naopak působí i-tý bod na j-tý bod (obr. 22), bude

$$\boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{F}_{ji} = 0.$$

Pro momenty uvedených sil vzhledem k libovolné ose O kolmé k rovině pohybu podobně platí

$$\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_{ij} + \boldsymbol{r}_j \times \boldsymbol{F}_{ji} = 0,$$

neboť obě síly mají stejné rameno s a jsou vzájemně opačného směru (obr. 22).

Tedy i *součet momentů vnitřních sil* k libovolnému bodu je *nulový*.

Při vyšetřování dynamických účinků sil na tuhé těleso jako celek tedy *stačí zkoumat jen účinek vnějších sil*. K tomu je třeba poznamenat, že i vnitřní síly mohou mít vliv na pohyb soustavy hmotných bodů, mohou způsobovat přeskupování bodů uvnitř dané soustavy. U tuhého tělesa k tomu však dojít nemůže, protože u něj je vzdálenost mezi body podle definice stále konstantní (tvar tělesa se zachovává). U skutečných (pružných) těles vnitřní síly způsobují mechanické napětí a mají tedy rozhodující vliv na soudržnost těles při jejich namáhání.

2.2 Hybnost soustavy, hmotný střed

Jednou z důležitých dynamických charakteristik soustavy hmotných bodů je *hybnost soustavy*, definovaná jako vektorový součet hybností jednotlivých bodů:

$$\boldsymbol{p} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i\right). \tag{9}$$

Zde jsme mohli provést naznačenou úpravu derivace podle času, neboť podle klasické mechaniky můžeme brát $m_i = konst.$

Nyní výraz (9) upravíme užitím pojmu *hmotný střed*. Je to bod, pomocí něhož zjednodušíme výpočet hybnosti soustavy tím, že do něj umístíme celkovou hmotnost m soustavy, tj.

$$m = \sum_i m_i.$$

Poloha $\boldsymbol{r}_S$ hmotného středu se definuje ze vztahu

$$m\boldsymbol{r}_S = \sum_i m_i \boldsymbol{r}_i, \tag{10}$$

neboli

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{1}{m}\sum_i m_i \boldsymbol{r}_i. \tag{11}$$

Pro soustavu hmotných bodů nebo pro tuhé těleso, které se nacházejí v homogenním tíhovém poli, *je hmotný střed zřejmě totožný s těžištěm*. Hmotný střed nemusí být reálným bodem soustavy hmotných bodů nebo tuhého tělesa (je tomu např. u prstence nebo u dutého válce).

Zavedeme-li vztah (10) do (9), můžeme pro hybnost soustavy psát

$$\boldsymbol{p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\boldsymbol{r}_S\right) = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_S}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{v}_S, \tag{12}$$

kde $\boldsymbol{v}_S$ je rychlost hmotného středu.

Hybnost soustavy hmotných bodů je rovna hybnosti jediného hmotného bodu, který by se pohyboval jako hmotný střed tělesa a ve kterém by byla soustředěna celá hmotnost soustavy.

Při výpočtu hybnosti tuhého tělesa vykonávajícího ve zvláštním případě posuvný pohyb není ani nutné pracovat s hmotným středem, neboť podle (2) jsou rychlosti všech bodů stejné a tudíž je možné ve vztahu (9) $\boldsymbol{v}_i$ vytknout před sumu. Pak je hybnost tělesa rovna součinu hmotnosti a rychlosti libovolného bodu tělesa při jeho translačním pohybu. Z hlediska univerzálnosti pojmu hmotný střed pro obecné případy soustavy hmotných bodů, např. u rovinného pohybu tuhého tělesa, se s tímto pojmem pracuje i u translačního pohybu.

2.3 První impulsová věta

Uvažujme tuhé těleso, které se pohybuje v inerciální vztažné soustavě. Bude-li na i-tý bod tohoto tělesa působit vnější síla $\boldsymbol{F}_i$ a výslednice vnitřních sil $\sum_j \boldsymbol{F}_{ij}$ od ostatních bodů tělesa, bude pro časovou změnu jeho hybnosti $\boldsymbol{p}_i$ platit

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij}. \tag{13}$$

Sumací přes celé těleso pro levou stranu rovnice (13) dostaneme

$$\sum_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \boldsymbol{p}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(m\boldsymbol{v}_S \right), \tag{14}$$

tedy časovou změnu hybnosti tělesa vyjádřené vztahem (12). Podobně sumací pro pravou stranu rovnice (13) dostaneme

$$\sum_i \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \right) = \sum_i \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F},$$

tedy výslednou vnější sílu působící na těleso, neboť výslednice všech vnitřních sil je nulová. Změnu hybnosti tělesa tudíž způsobuje výslednice působících vnějších sil podle rovnice

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}.} \tag{15}$$

Je formálně shodná s pohybovou rovnicí jediného hmotného bodu a je *pohybovou rovnicí translačního pohybu tuhého tělesa*. Rovnice (15) se označuje jako **první impulsová věta pro tuhé těleso.**

Časová změna hybnosti tělesa je rovna výsledné síle působící na těleso.

Protože podle klasické mechaniky neuvažujeme závislost hmotnosti tělesa na jeho rychlosti ve vztažné soustavě a protože hmotnost tuhého tělesa se i jinak s časem nemění (jinak je tomu např. u raket), můžeme rovnici (15) přepsat s využitím vztahu (12) do tvaru

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_S}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}_S = \boldsymbol{F}, \tag{16}$$

kde $\boldsymbol{a}_S$ je zrychlení hmotného středu.

Je-li výslednice vnějších sil $\boldsymbol{F}$ nulová, je $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$ a tedy $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{konst}$, neboli hybnost tělesa je konstantní. Dospíváme tak k **zákonu zachování hybnosti**.

2.4 Druhá impulsová věta pro obecný rovinný pohyb

Při obecném rovinném pohybu tělesa leží trajektorie, rychlosti a zrychlení jednotlivých bodů tělesa v navzájem rovnoběžných rovinách rovnoběžných se zvolenou základní rovinou. Za tuto rovinu zvolíme rovinu $(x,\ y)$ kartézské soustavy (obr. 23). Budeme předpokládat, že vnější síly působí na hmotné body tělesa v základní rovině.

Poloha průmětu i-tého hmotného bodu tělesa do základní roviny, rychlost, zrychlení tohoto bodu a vnější síla, která na něj působí, mají souřadnice

$$\boldsymbol{r}_i = (x_i,\ y_i,\ 0), \quad \boldsymbol{v}_i = (v_{ix},\ v_{iy},\ 0),$$
$$\boldsymbol{a}_i = (a_{ix}, a_{iy},\ 0), \quad \boldsymbol{F}_i = (F_{ix}, \mathrm{F}_{iy},\ 0).$$

Moment vnější síly, která působí na i-tý hmotný bod, vzhledem k ose z definujeme jako vektor

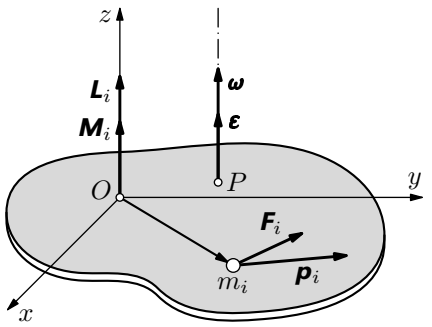
$$\boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

kolmý k základní rovině, tedy rovnoběžný s osou z. Analogicky zavedeme *moment hybnosti* i-tého hmotného bodu

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{r}_i \times m_i\boldsymbol{v}_i. \tag{17}$$

Tyto vektory mají souřadnice

$$\boldsymbol{M}_i = (0,\ 0,\ M_i), \quad \boldsymbol{L}_i = (0,\ 0,\ L_i)$$



Obr. 23

Okamžitá osa rotace tělesa má směr osy z, a proto úhlová rychlost a úhlové zrychlení mají souřadnice

$$\boldsymbol{\omega} = (0,\ 0,\ \omega), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (0,\ 0,\ \varepsilon).$$

Budeme nyní hledat souvislost mezi časovou změnou momentu hybnosti a výsledným momentem síly, který působí na tuhé těleso při rotaci kolem okamžité osy rotace. Poté budeme výpočet specializovat na rotaci kolem nehybné osy.

Pro moment hybnosti i-tého bodu platí vztah (17). Jeho derivací podle času (jako součinu dvou funkcí) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{r}_i \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t}.$$

První součin na pravé straně je nulový, neboť vektor hybnosti má stejný směr jako vektor rychlosti. Ve druhém součinu dosadíme sílu podle vztahu (13). Tedy

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_i \times \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \right).$$

Provedeme-li sumaci těchto příspěvků vzhledem k okamžité ose pro celé těleso, dostaneme pohybovou rovnici, jejíž levá strana bude mít tvar

$$\sum_i \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \boldsymbol{L}_i = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}.$$

Jde tedy o časovou změnu momentu hybnosti tuhého tělesa. Pravá strana rovnice bude mít po sumaci tvar

$$\sum_i \left[\boldsymbol{r}_i \times \left(\boldsymbol{F}_i + \sum_j \boldsymbol{F}_{ij} \right) \right] = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{M}_i = \boldsymbol{M}.$$

Půjde tedy o výsledný moment vnějších sil působící na tuhé těleso, neboť výsledný moment všech vnitřních sil je nulový. Tento moment má směr okamžité osy rotace. Obecná pohybová rovnice rotačního pohybu tedy zní

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}.} \tag{18}$$

Výsledek (18) se označuje jako **druhá impulsová věta.**

Časová změna momentu hybnosti tělesa vzhledem k libovolné ose kolmé k rovině pohybu je rovna výslednému momentu vnějších sil vzhledem k téže ose.

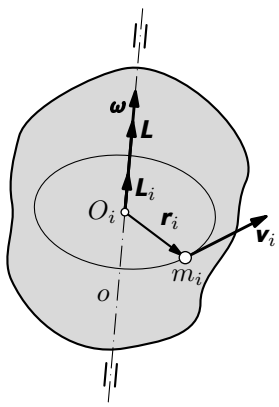
2.5 Dynamika otáčivého pohybu kolem nehybné osy

2.5.1 Moment hybnosti tělesa vzhledem k nehybné ose. Moment setrvačnosti

Při otáčivém pohybu tělesa kolem nehybné osy opisují body tělesa kruhové trajektorie se středem na ose otáčení. Pro výpočet příspěvku $\boldsymbol{L}_i$ i-tého bodu tělesa k celkovému momentu hybnosti $\boldsymbol{L}$ tělesa zvolíme počátek O_i ve středu této kružnice (obr. 24). Pak bude velikost polohového vektoru $\boldsymbol{r}_i$ hmotného bodu totožná s poloměrem příslušné kruhové trajektorie. Definujeme

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i. \tag{19}$$

Tento vektor umisťujeme do osy rotace. Rychlost $\boldsymbol{v}_i$ i-tého bodu je kolmá k průvodiči $\boldsymbol{r}_i$, můžeme tedy pro velikost momentu hybnosti i-tého bodu psát



Obr. 24

$$L_i = r_i p_i \sin 90^\circ = r_i m_i v_i = \omega m_i r_i^2,$$

kde ω je úhlová rychlost rotace. Protože takto vypočtené příspěvky od jednotlivých bodů mají stejný směr — směr nehybné osy rotace — bude mít moment hybnosti celého tělesa velikost

$$L = \sum_i L_i = \omega \sum_i m_i r_i^2 = \omega J, \tag{20}$$

kde

$$\boxed{J = \textstyle\sum_i m_i r_i^2} \tag{21}$$

je **moment setrvačnosti** tuhého tělesa vzhledem k nehybné ose o. Jelikož úhlová rychlost $\boldsymbol{\omega}$ je vektor ležící v ose rotace, je moment hybnosti tuhého tělesa rotujícího kolem nehybné osy vektor

$$\boxed{\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega},} \tag{22}$$

ležící rovněž v nehybné ose rotace.

2.5.2 Druhá impulsová věta pro rotaci kolem nehybné osy

Vyjádříme-li moment hybnosti tuhého tělesa rotujícího kolem nehybné osy pomocí vztahu (22) a uvážíme-li, že pro dané rozložení hmotnosti tuhého tělesa vzhledem k nehybné ose rotace je $J = konst.$, můžeme výsledek (18) přepsat

do jednoduchého tvaru

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(J\boldsymbol{\omega}\right) = J\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = J\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M},} \tag{23}$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon}$ je vektor úhlového zrychlení, který rovněž leží v ose rotace.

Je-li výsledný moment sil $\boldsymbol{M}$ nulový, je

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0} \text{ a tedy } \boldsymbol{L} = \boldsymbol{konst}. \tag{24}$$

Tím jsme dospěli k *zákonu zachování momentu hybnosti*. Protože $J = konst.$, dostáváme vzhledem k (22) současně i výsledek

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{konst}.. \tag{25}$$

2.5.3 Srovnání rotačního pohybu kolem nehybné osy s translačním pohybem

Nejprve porovnáme vztahy pro výpočet kinetické energie. Při translačním pohybu se všechny body tělesa pohybují stejnou rychlostí $\boldsymbol{v}$. Kinetická energie tělesa je

$$E_{\mathrm{k}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum_i m_i = \frac{1}{2} m v^2. \tag{26}$$

Při rotačním pohybu tělesa kolem nehybné osy úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}$ je velikost rychlosti i-tého elementu $v_i = \omega r_i$. Kinetická energie tělesa je

$$E_{\mathrm{k}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J \omega^2 \tag{27}$$

Mezi veličinami pro translační pohyb tuhého tělesa a pro rotační pohyb tuhého tělesa kolem nehybné osy je možné sledovat analogie, které mají hlubší fyzikální souvislost. Pro získání lepší orientace mezi těmito veličinami a vztahy je vhodné si udělat jejich shrnutí v následující tabulce:

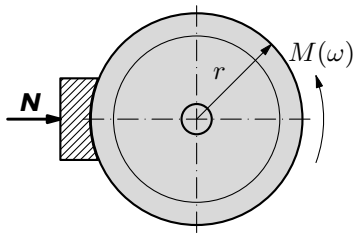
translační pohyb		rotační pohyb	
element dráhy	$\mathrm{d}\boldsymbol{r},\ \mathrm{d}\boldsymbol{s}$	element úhlové dráhy	$\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$
rychlost	$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$	úhlová rychlost	$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}$
zrychlení	$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$	úhlové zrychlení	$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$
hmotnost	m	moment setrvačnosti	J
síla	$\boldsymbol{F}$	moment síly	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
hybnost	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	moment hybnosti	$\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$
I. impulsová věta	$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$	II. impulsová věta	$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$
pohybová rovnice	$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$	pohybová rovnice	$J\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}$
element práce	$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$	element práce	$\mathrm{d}W = \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$
výkon	$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$	výkon	$P = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$
kinetická energie	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$	kinetická energie	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2$

Příklad 3 – roztáčení setrvačníku

Na hřídel s nasazeným setrvačníkem o poloměru r a o celkovém momentu setrvačnosti J vzhledem k ose hřídele působí hnací moment síly o velikosti

$$M = M_0 - k\omega,$$

kde M_0 a k jsou konstanty a ω je okamžitá úhlová rychlost. Na obvod setrvačníku (obr. 25) současně působí čelist brzdy, přičemž přítlačná síla je $\boldsymbol{N}$ a součinitel smykového tření f. Hřídel se rozbíhá z klidového stavu. Určete



Obr. 25

a) maximální úhlovou rychlost ω_m hřídele,

b) závislost $\omega = \omega(t)$ a čas t_m, kdy hřídel dosáhne úhlové rychlosti ω_m.

Řešení

a) Protože hnací moment síly je závislý na úhlové rychlosti a brzdný moment síly Nfr je konstantní, dosáhne hřídel maximální úhlové rychlosti ω_m při vyrovnání velikosti těchto momentů sil, tedy když

$$M_0 - k\omega_\mathrm{m} = Nfr \quad \Rightarrow \quad \omega_\mathrm{m} = \frac{M_0 - Nfr}{k}.$$

b) Pohybová rovnice podle (23) ve skalárním tvaru bude

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_0 - k\omega - Nfr.$$

Aby se hřídel vůbec roztočila, musí být

$$M_0 - Nfr = M_0' > 0.$$

Rovnici upravíme do tvaru vhodného k integraci tím, že oddělíme (separujeme) proměnné ω a t:

$$J\frac{\mathrm{d}\omega}{M_0' - k\omega} = \mathrm{d}t.$$

Integrujeme v mezích od $\omega = 0$ do ω a od $t = 0$ do t:

$$-\frac{J}{k}\int_0^{\omega} \frac{-k\,\mathrm{d}\omega}{M_0' - k\omega} = \int_0^t \mathrm{d}t,$$

$$-\frac{J}{k}\Big[\ln(M_0' - k\omega)\Big]_0^{\omega} = \frac{J}{k}\ln\frac{M_0'}{M_0' - k\omega} = t.$$

Odtud

$$\omega = \frac{M_0 - Nfr}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{J}t}\right).$$

Z časového průběhu ω vidíme, že hřídel dosáhne maxima ω_m až v limitním případě $t_\mathrm{m} \to \infty$.

Úlohy

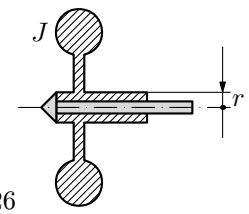
4. Setrvačník (obr. 26) můžeme roztočit tak, že na jeho pouzdro o poloměru r navineme šňůrku a za její volný konec táhneme silou až do jejího odvinutí. Vypočtěte úhlovou rychlost setrvačníku o momentu setrvačnosti J, jestliže se odvinula bez prokluzu ze stavu klidu šňůrka délky l při působení stálé síly o velikosti F.

5. Jaký je moment setrvačnosti kotouče kladky o poloměru $r = 180$ mm vzhledem k ose jdoucí těžištěm, jestliže závaží o hmotnosti $m = 4{,}0$ kg proběhne dráhu $s = 1{,}2$ m za dobu $t = 1{,}3$ s? Na počátku je závaží v klidu (obr. 27).

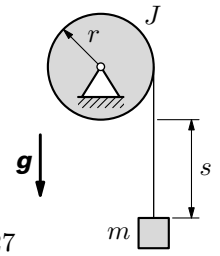
6. Rotor turbíny o momentu setrvačnosti J volně dobíhá z počáteční úhlové rychlosti ω_0 pod působením odporových sil, které mají moment o velikosti $M = k\omega^2$, kde ω je okamžitá úhlová rychlost a $k > 0$ je konstanta. Určete

a) závislost $\omega = \omega(t)$,

b) dobu t_1, za níž se úhlová rychlost zmenší z ω_0 na $\omega_0/10$.



Obr. 26



Obr. 27

2.5.4 Výpočet momentu setrvačnosti

Moment setrvačnosti tělesa vzhledem k nehybné ose definujeme výrazem (21):

$$J = \sum_i m_i r_i^2.$$

Je to veličina, která je mírou setrvačných účinků tělesa při rotačním pohybu. Tato veličina zřejmě závisí nejen na hmotnostech elementů tělesa, ale především na jejich rozložení vzhledem k rotační ose. Přitom setrvačnost hmotných elementů se uplatňuje s druhou mocninou jejich vzdáleností od osy rotace. Jednotkou momentu setrvačnosti v soustavě SI je $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.

Při výpočtu momentu setrvačnosti těles předpokládáme spojitě rozloženou hmotnost. Pak sumace nekonečné řady (21) přejde na určitý integrál

$$\boxed{J = \textstyle\int_{(m)} r^2 \mathrm{d}m,} \tag{28}$$

kde integraci provádíme přes celou hmotnost m tělesa. Je-li těleso *homogenní*, tak $\mathrm{d}m = \varrho\,\mathrm{d}V$, $\varrho = konst.$ a $\mathrm{d}V$ je element objemu. Pak se integrál (28) zjednoduší na tvar

$$\boxed{J = \varrho \textstyle\int_{(V)} r^2 \mathrm{d}V} \tag{29}$$

a integraci provádíme přes celý objem V tělesa. Element $\mathrm{d}V$ volíme tak, aby integrace byla co nejjednodušší, jak to bude ukázáno na následujících příkladech. Máme-li počítat moment setrvačnosti k určité ose a známe-li moment setrvačnosti k ose rovnoběžné s touto osou, která prochází hmotným středem, použijeme k výpočtu s výhodou *Steinerovu větu* (viz následující odstavec).

Moment setrvačnosti je zřejmě aditivní veličina. Toho lze výhodně využít při výpočtu momentu setrvačnosti těles složených z n částí, jejichž momenty J_i k dané ose známe. Pak

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i. \tag{30}$$

Má-li homogenní těleso dutinu nebo otvor, odečteme od celku moment setrvačnosti tělesa, které by vyplňovalo dutinu nebo otvor. Tento postup se využije

např. při řešení úloh č. 8 a 9.

Aditivnosti momentu setrvačnosti využijeme i při výpočtu momentu setrvačnosti homogenního tělesa, které si představíme složené z nekonečného počtu částí, jejichž elementární momenty $\mathrm{d}J$ známe. Pak řada (30) přejde v integrál

$$J = \int_{(J)} \mathrm{d}J. \tag{31}$$

Tohoto postupu je využito např. v příkladě 5, kde si těleso představíme složené z elementárních desek proměnného poloměru.

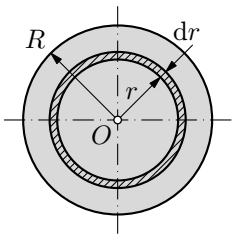
Příklad 4 – moment setrvačnosti válce

Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního kruhového válce vzhledem k jeho rotační ose. Válec má poloměr R a hmotnost m.

Řešení

K řešení užijeme vzorec (29). Z válce vyjmeme element souměrný k ose. Jeho průřez má tvar mezikruží (obr. 28) o poloměru r a tloušťce $\mathrm{d}r$. Označíme-li výšku válce l, bude

$$\mathrm{d}V = 2\pi l r \mathrm{d}r.$$



Obr. 28

Integrujeme v mezích od $r = 0$ do $r = R$. Pak

$$J = \varrho \int_0^R r^2 \mathrm{d}V = 2\pi\varrho l \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\pi\varrho l R^4 = \frac{1}{2} m R^2, \tag{32}$$

kde $m = \pi R^2 l \varrho$ je hmotnost válce.

Moment setrvačnosti válce pro určitou hmotnost zřejmě nezávisí na jeho výšce. Stejný vzorec tedy platí i pro tenkou kruhovou desku stejného poloměru a stejné hmotnosti.

Příklad 5 – moment setrvačnosti koule

Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní koule o hmotnosti m a poloměru R vzhledem k ose o, která prochází jejím středem.

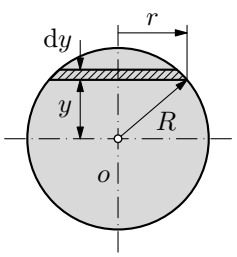
Řešení

K řešení použijeme vzorec (31). Kouli si představíme složenou z elementárních desek (vrstev) o poloměru r a tloušťce $\mathrm{d}y$ (obr. 29). Deska má v souladu s (32) elementární moment setrvačnosti

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}m,$$

kde

$$\mathrm{d}m = \pi r^2 \varrho \mathrm{d}y, \quad r^2 = R^2 - y^2.$$



Obr. 29

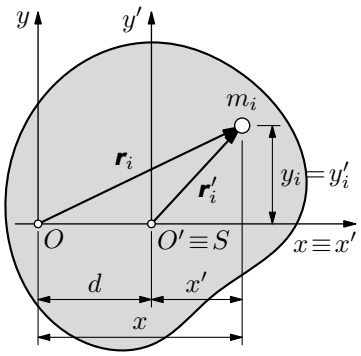
Integrací v mezích od $y = -R$, $y = R$ dostaneme

$$J = \frac{\pi\varrho}{2}\int_{-R}^{R}(R^2 - y^2)^2 \mathrm{d}y = \frac{8}{15}\pi\varrho R^5 = \frac{2}{5}mR^2, \tag{33}$$

kde $m = \frac{4}{3}\pi R^3\varrho$ je hmotnost koule.

2.5.5 Steinerova věta

Nyní odvodíme větu, která umožní vypočíst moment setrvačnosti J tělesa vzhledem k libovolné ose, známe-li moment setrvačnosti J_S vzhledem k rovnoběžné ose, která prochází hmotným středem. Pro výpočet položíme počátek O čárkované vztažné soustavy do hmotného středu S (obr. 30). Nečárkovaná soustava má osy rovnoběžné se soustavou čárkovanou, přičemž osy $x,\ x'$ splývají. Půjde nám o to najít vztah mezi momentem J k ose z a momentem J_S k ose z', která prochází hmotným středem S. Osy $z,\ z'$ mají vzájemnou vzdálenost d. Podle definičního vztahu (21) platí pro tyto momenty setrvačnosti vztahy



Obr. 30

$$J = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2), \qquad J_S = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2).$$

Z obr. 30 je zřejmé, že $x_i^2 = (x_i' + d)^2, \quad y_i = y_i'$.
Po dosazení do výrazu pro J dostaneme

$$J = \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + 2d\sum_i m_i x_i' + d^2\sum_i m_i = J_S + md^2,$$

protože začátek čárkované soustavy leží v hmotném středu tělesa (pro jeho polohu v této soustavě platí $x_S' = 0$) a tudíž v souladu s (11) je

$$\sum_i m_i x_i' = 0.$$

Dostali jsme tak důležitý vztah

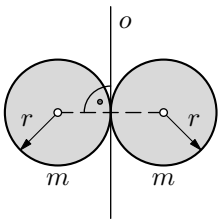
$$\boxed{J = J_S + md^2,} \tag{34}$$

který se nazývá **Steinerova věta**:

Moment setrvačnosti J tuhého tělesa vzhledem k libovolné ose je roven součtu momentu setrvačnosti J_S vzhledem k ose procházející hmotným středem S rovnoběžně s uvažovanou osou a součinu hmotnosti m tělesa se druhou mocninou vzdálenosti d obou os.

Příklad 6 – moment setrvačnosti dvojice koulí

Vypočtěte moment setrvačnosti soustavy dvou dotýkajících se a pevně spojených stejných homogenních koulí podle obr. 31 k ose o. Každá z koulí má hmotnost m a poloměr r.



Obr. 31

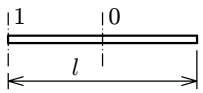
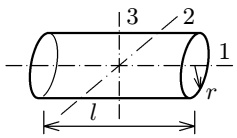
Řešení

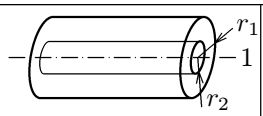
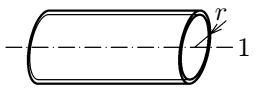
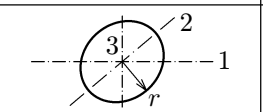
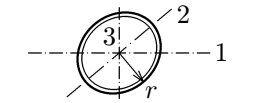
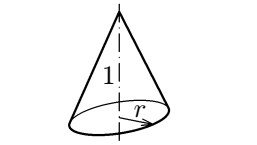
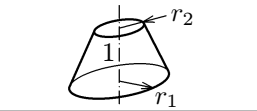
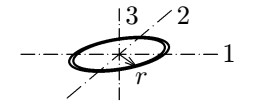
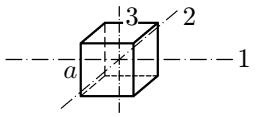
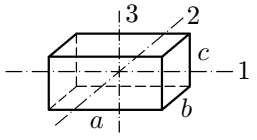
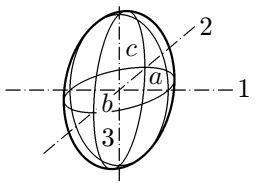
Užitím Steinerovy věty a výsledku (33) dostaneme

$$J = 2(J_S + mr^2) = 2\left(\frac{2}{5}mr^2 + mr^2\right) = \frac{14}{5}mr^2.$$

2.5.6 Momenty setrvačnosti homogenních těles jednoduchého geometrického tvaru o hmotnosti m

V následující tabulce uvedeme momenty některých homogenních těles jednoduchého tvaru. Jedná se vesměs o hlavní centrální momenty setrvačnosti (s výjimkou momentu J_1 v prvním případě).

Tenká tyč		$J_0 = \frac{1}{12}ml^2,\ J_1 = \frac{1}{3}ml^2$
Kolmý válec Kruhová deska		$J_1 = \frac{1}{2}mr^2$ $J_2 = J_3 = \frac{m}{4}\left(r^2 + \frac{l^2}{3}\right)$

Dutý kruhový kolmý válec		$J_1 = \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2)$
Tenkostěnná válcová trubka		$J_1 = mr^2$
Koule		$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2}{5}mr^2$
Tenkostěnná kulová skořepina		$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{2}{3}mr^2$
Kolmý kužel		$J_1 = \frac{3}{10}mr^2$
Komolý kolmý kužel		$J_1 = \frac{3}{10}m\frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}$
Tenký kruhový prstenec		$J_1 = J_2 = \frac{1}{2}mr^2$ $J_3 = mr^2$
Krychle		$J_1 = J_2 = J_3 = \frac{m}{6}a^2$
Hranol		$J_1 = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$ $J_2 = \frac{m}{12}(a^2 + c^2)$ $J_3 = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$
Elipsoid		$J_1 = \frac{m}{5}(b^2 + c^2)$ $J_2 = \frac{m}{5}(a^2 + c^2)$ $J_3 = \frac{m}{5}(a^2 + b^2)$

Úlohy

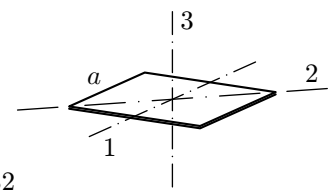
7. Odvoďte vztah pro výpočet momentů setrvačnosti tenké čtvercové desky o straně a a hmotnosti m vzhledem k jejím osám souměrnosti 1, 2 a 3 (obr. 32).

8. Odvoďte vztah pro výpočet momentu setrvačnosti tenké kulové skořepiny o hmotnosti m a poloměru R vzhledem k její ose souměrnosti.

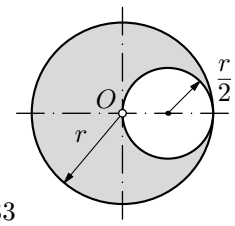
9. Je dána homogenní kruhová deska o poloměru r s otvorem podle obr. 33. Hmotnost desky je m. Vypočtěte

a) moment setrvačnosti J vzhledem k ose procházející středem O kolmo k rovině desky.

b) moment setrvačnosti J_S vzhledem k ose procházející těžištěm desky kolmo k rovině desky.



Obr. 32



Obr. 33

2.6 Dynamika obecného rovinného pohybu tuhého tělesa

Pro pohyb tělesa budou platí impulsové věty, které mají obecný tvar (15) a (18):

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M},}$$

kde

$$\boldsymbol{p} = \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i = m\boldsymbol{v}_S, \qquad \boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \tag{35}$$

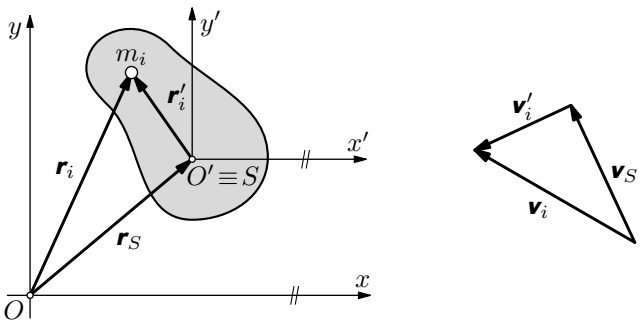
je hybnost a moment hybnosti tělesa při rovinném pohybu. V těchto vyjádřeních je osa, vzhledem k níž počítáme momentové veličiny $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{M}$, volena obecně jako osa z vztažné soustavy $x,\ y,\ z$. Při řešení úloh je vhodné buď vycházet ze základního rozkladu pohybu tělesa při kterém za referenční bod tělesa zvolíme jeho hmotný střed, nebo zvolit počátek vztažné soustavy v pólu pohybu. Oba způsoby řešení podrobně probereme.

1. Použití základního rozkladu pohybu

S hmotným středem tělesa S spojíme počátek vztažné soustavy $O'x'y'z'$, která koná posuvný pohyb vzhledem původní inerciální soustavě $Oxyz$ tak, že souřadnicové osy obou soustav jsou rovnoběžné (obr. 34). Pak pro polohový vektor i-tého bodu měřený v soustavě $Oxyz$ a pro rychlost tohoto bodu platí

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_S + \boldsymbol{r}'_i, \quad \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{v}'_i,$$

kde $\boldsymbol{r}_S$ je polohový vektor hmotného středu a $\boldsymbol{v}_S$ jeho rychlost.



Obr. 34

Nejprve vyjádříme *moment hybnosti tělesa* vzhledem k ose z dosazením těchto vztahů do výrazu (35):

$$\boldsymbol{L} = \sum_i (\boldsymbol{r}_S + \boldsymbol{r}'_i) \times m_i(\boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{v}'_i) = \boldsymbol{r}_S \times \boldsymbol{v}_S \sum_i m_i + \sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{v}_S +$$

$$+\boldsymbol{r}_S \times \sum_i m_i \boldsymbol{v}'_i + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i = \boldsymbol{r}_S \times m\boldsymbol{v}_S + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i, \qquad (36)$$

neboť

$$\sum_i m_i \boldsymbol{r}'_i = m\boldsymbol{r}'_S = 0, \qquad \sum_i m_i \boldsymbol{v}'_i = m\boldsymbol{v}'_S = 0,$$

protože $\boldsymbol{r}'_S = 0$, $\boldsymbol{v}'_S = 0$ je poloha a rychlost hmotného středu vzhledem ke vztažné soustavě $O'x'y'z'$ pevně spojené s hmotným středem (viz obr. 34). Výraz (36) může být formálně přepsán do tvaru

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_S + \boldsymbol{L}', \qquad (37)$$

kde

$$\boldsymbol{L}_S = \boldsymbol{r}_S \times \boldsymbol{p}_S \qquad (38)$$

je moment hybnosti hmotného středu tělesa vzhledem k ose z, nazývaný též *orbitální moment hybnosti* a

$$\boldsymbol{L}' = \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i \qquad (39)$$

je moment hybnosti tělesa vzhledem k ose z' procházející hmotným středem, nazývaný též *spinový moment hybnosti.* (Označení „orbitální“ a „spinový“ mají původ v atomistice, kde se zavádí např. orbitální moment hybnosti elektronu a spinový moment hybnosti elektronu, zvaný spin.)

Časovou změnu momentu hybnosti dostaneme součtem derivovaných vztahů (38) a (39):

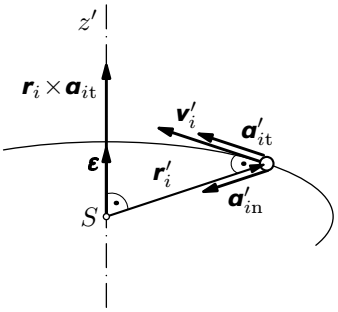
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\boldsymbol{v}_S \times \boldsymbol{p}_S}_{0} + \boldsymbol{r}_S \times m\boldsymbol{a}_S + \underbrace{\sum_i \boldsymbol{v}'_i \times m_i \boldsymbol{v}'_i}_{0} + \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}'_i. \qquad (40)$$

První a třetí člen je zřejmě nulový (jde o vektorový součin rovnoběžných vektorů). Upravíme nyní čtvrtý člen, když si uvědomíme, že vzhledem k (6) a (7) platí:

$$\boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{a}'_{it} + \boldsymbol{a}'_{in} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'_i, \qquad \boldsymbol{a}'_{it} \perp \boldsymbol{r}'_i, \quad \boldsymbol{a}'_{in} \parallel \boldsymbol{r}'_i.$$

Vzájemnou polohu vektorů vidíme na obr. 35. Z uvedených vztahů plyne:

$$\boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}'_{it} + \underbrace{\boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}'_{in}}_{0} = m_i \boldsymbol{r}'_i \times (\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}'_i) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot m_i r'^2_i,$$



Obr. 35

$$\sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{a}'_i = \boldsymbol{\varepsilon} \sum_i m_i r_i'^2 = \boldsymbol{\varepsilon} J_S,$$

kde J_S je moment setrvačnosti vzhledem k ose z', která prochází hmotným středem S.

Tak můžeme vztah (40) přepsat do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}_S \times m\boldsymbol{a}_S + J_S \boldsymbol{\varepsilon}. \qquad (41)$$

Výsledný moment sil, který je roven výslednému momentu vnějších sil, můžeme analogicky rozložit na dva členy

$$\boldsymbol{M} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}_S + \boldsymbol{r}'_i) \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{r}_S \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{M}_S, \qquad (42)$$

kde $\boldsymbol{M}_S$ je výsledný moment vnějších sil vzhledem k ose z' procházející hmotným středem. Porovnáme-li vztahy (15), (18), (41) a (42) získáme pohybové rovnice tuhého tělesa konajícího obecný rovinný pohyb ve tvaru:

$$m\boldsymbol{a}_S = \boldsymbol{F}, \qquad J_S \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}_S. \qquad (43)$$

Při vyjádření ve složkách dostaneme

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_S}{\mathrm{d}\,t^2} = F_x, \qquad (44)$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y_S}{\mathrm{d}\,t^2} = F_y, \qquad (45)$$

$$J_S\frac{\mathrm{d}^2 \varphi}{\mathrm{d}\,t^2} = M_S, \qquad (46)$$

kde x_S, y_S jsou souřadnice hmotného středu, F_x, F_y souřadnice výslednice vnějších sil, J_S moment setrvačnosti tělesa k ose procházející hmotným středem a M_S velikost výsledného momentu vnějších sil k téže ose.

2. **Volba počátku vztažné soustavy v pólu pohybu**

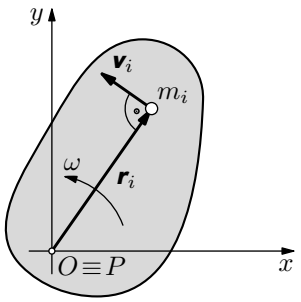
Z vlastností pólu vyplývá, že rychlosti všech bodů jsou kolmé k průvodičům, neboli

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i.$$

Pak moment hybnosti (35) tělesa k ose z je

$$\boldsymbol{L} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)$$

a pro jeho derivaci podle času platí



Obr. 36

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i \boldsymbol{v}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i}_{0} + \sum_i \boldsymbol{r}_i \times (m_i \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) + \underbrace{\sum_i \boldsymbol{r}_i \times (m_i \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_i)}_{0}.$$

Vektor v okrouhlé závorce ve třetím členu je rovnoběžný s vektorem $\boldsymbol{r}_i$, rovněž vektory ve vektorovém součinu prvního členu jsou vzájemně rovnoběžné, proto jsou oba členy nulové. Nyní upravíme druhý člen. Vektory $\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ a vektorový součin $\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i$ jsou vzájemně kolmé. Proto

$$\boldsymbol{r}_i \times m_i(\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot m_i r_i^2, \qquad \sum_i \boldsymbol{r}_i \times (m_i \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}_i) = \boldsymbol{\varepsilon} \sum_i m_i r_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon} J_P.$$

Veličina J_P je moment setrvačnosti k ose z procházející pólem pohybu. Moment vnějších sil počítáme rovněž k ose procházející pólem:

$$\sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{M}_P.$$

Druhá impulsová věta tedy dává pohybovou rovnici ve tvaru

$$J_P \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}_P,$$

kterou lze psát skalárně

$$\boxed{J_P \cdot \varepsilon = J_P \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\,t^2} = M_P.} \tag{47}$$

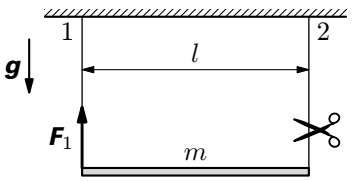
Při řešení úloh, podle dispozice zadání, lze výhodně užít jeden nebo druhý způsob sestavení pohybové rovnice. Někdy lze jednoduše užít postupy oba, jak si ukážeme na následujícím příkladě.

Příklad 7 – jednostranně uvolněná tyč

Homogenní tenká tyč o hmotnosti m a délce l je zavěšena na dvou stejných rovnoběžných vláknech 1, 2 podle obr. 37. Pro okamžik bezprostředně po přestřižení vlákna 2 určete:

a) zrychlení hmotného středu S a úhlové zrychlení tyče,

b) tahovou sílu $\boldsymbol{F}_1$ ve vlákně 1.

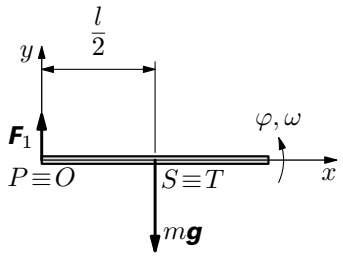


Obr. 37

Řešení

Výsledná tíhová síla $m\boldsymbol{g}$ působí v těžišti T totožném s hmotným středem S (obr. 38). Pohybové rovnice (44) až (46) mají tvar

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_S &= 0, \\ m\ddot{y}_S &= F_1 - mg, \\ J_S\ddot{\varphi} &= -F_1\frac{l}{2}, \end{aligned} \qquad (48)$$



Obr. 38

kde $J_S = \dfrac{1}{12}ml^2$.

Na konci tyče, v bodě $O \equiv P$, je okamžitý pól pohybu a tudíž mezi y-ovou složkou okamžitého zrychlení hmotného středu a úhlovým zrychlením platí

$$\ddot{y}_S = \frac{l}{2}\ddot{\varphi}. \qquad (49)$$

Po dosazení do (48) za J_S a $\ddot{y}_S$ řešením dostaneme

$$\text{a) } \ddot{x}_S = 0, \quad \ddot{y}_S = -\frac{3}{4}g, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2l}, \qquad \text{b) } F_1 = \frac{mg}{4}.$$

Tahová síla ve vlákně je zřejmě poloviční než před přestřižením vlákna 2, kdy každé vlákno zachycovalo polovinu tíhy tyče.

Nyní ještě ukážeme druhý způsob využívající pól pohybu, kdy použijeme vztah (47), kam dosadíme $J_P = \dfrac{1}{3}ml^2$. Platí:

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} = -mg\frac{l}{2}, \quad \text{odtud} \quad \ddot{\varphi} = -\frac{3g}{2l}$$

v souladu s předchozím řešením.

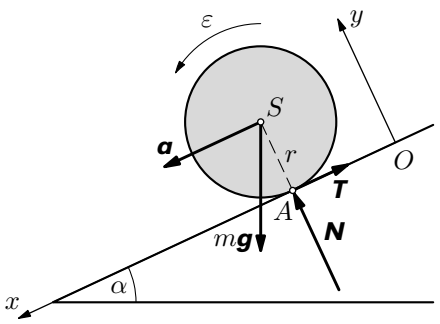
Příklad 8 – koule na nakloněné rovině
Homogenní kouli o poloměru r a hmotnosti m položíme na nakloněnou rovinu se sklonem α. S jakým zrychlením se bude pohybovat, je-li součinitel smykového tření mezi koulí a nakloněnou rovinou f?

Řešení
Soustavu souřadnic zvolíme tak, že osa x bude mít směr spádnice nakloněné roviny (obr. 39). Rovina působí na těleso reakcí, která má normálovou složku $\boldsymbol{N}$ a tečnou složku $\boldsymbol{T}$. Skalární pohybové rovnice (44) až (46) pro uvažované těleso jsou

$$m\ddot{x}_S = mg\sin\alpha - T, \qquad (50)$$

$$m\ddot{y}_S = N - mg\cos\alpha, \qquad (51)$$

$$J_S\ddot{\varphi} = Tr. \qquad (52)$$



Obr. 39

V těchto třech rovnicích je pět neznámých: N, T, $\ddot{x}_S$, $\ddot{y}_S$, $\ddot{\varphi}$.

Aby soustava byla řešitelná, musíme připojit ještě dvě rovnice (resp. podmínky). Jednou z nich je podmínka vazby, podle níž se hmotný střed pohybuje po přímce rovnoběžné s osou x, neboli

$$y_S = r = konst., \quad \text{resp.} \quad \ddot{y}_S = 0. \qquad (53)$$

Pak z rovnice (51) pro normálovou složku reakce plyne

$$N = mg\cos\alpha. \qquad (54)$$

Další doplňkové rovnice závisí na tom, zda těleso při odvalování prokluzuje nebo ne. Mohou nastat tyto případy:
1. *Těleso se dokonale odvaluje,* tedy bez prokluzu. Pak je bod dotyku A koule s nakloněnou rovinou okamžitým pólem pohybu ($A \equiv P$). Odtud dostaneme vazbovou rovnici

$$x_S = r\varphi, \quad \text{resp.} \quad \ddot{x}_S = r\ddot{\varphi}. \qquad (55)$$

2. *Těleso se odvaluje a současně smýká,* tedy mezi tělesem a nakloněnou rovinou je prokluz a tečná složka reakce dosahuje hodnoty síly smykového tření

$$T = F_t = fN = fmg\cos\alpha. \qquad (56)$$

ad 1) *Řešení pro dokonalé odvalování*

Dosazením z (55) za $\ddot{\varphi}$ do (52) dostaneme

$$T = \frac{J_S}{r^2}\ddot{x}_S. \qquad (57)$$

Po dosazení (57) do (50) dostaneme pro x-ovou složku zrychlení hmotného středu výraz

$$\ddot{x}_S = a = \frac{mr^2}{J_S + mr^2} g \sin\alpha = \frac{mr^2}{\frac{2}{5}mr^2 + mr^2} g \sin\alpha = \frac{5}{7} g \sin\alpha. \tag{58}$$

Zpětným dosazením (58) do (57) vychází pro tečnou složku reakce výraz

$$T = \frac{J_S}{J_S + mr^2} mg \sin\alpha = \frac{J_S}{J_P} mg \sin\alpha = \frac{2}{7} mg \sin\alpha, \tag{59}$$

kde $J_P = J_S + mr^2 = \frac{7}{5}mr^2$ je, v souladu se Steinerovou větou, moment setrvačnosti k ose, která prochází okamžitým pólem pohybu P.

Aby při odvalování nedošlo k prokluzu, musí být tečné složky reakce (59) menší než síla smykového tření, neboli $T < fN$. Musí tedy být splněna podmínka

$$\frac{J_S}{J_P} mg \sin\alpha < fmg \cos\alpha,$$

neboli pro úhel α sklonu nakloněné roviny musí platit

$$\operatorname{tg}\alpha < \frac{J_P}{J_S} = \frac{7}{2} f. \tag{60}$$

ad 2) *Řešení pro odvalování provázené smýkáním*

Normálová i tečná složka reakce jsou pro tento případ známy: viz výrazy (54) a (56). Dosazením za T z rovnice (56) do rovnic (50) a (52) dostaneme

$$\ddot{x}_S = a = g(\sin\alpha - f\cos\alpha), \tag{61}$$

$$\ddot{\varphi} = f\frac{mgr}{J_S}\cos\alpha. \tag{62}$$

Aby řešení (61) mělo smysl, musí být výraz v závorce kladný, tj. musí platit

$$\sin\alpha > f\cos\alpha, \quad \text{tj.} \quad \operatorname{tg}\alpha > f. \tag{63}$$

Protože vyšetřovaný případ ad 2) nastává až při nesplnění podmínky (60), tj. pro

$$\operatorname{tg}\alpha \geq \frac{J_P}{J_S} f = \frac{7}{2} f$$

a podmínka $\frac{J_P}{J_S} > 1$, je tedy splněna.

2.7 Kinetická energie tuhého tělesa při obecném rovinném pohybu

Při obecném rovinném pohybu pro kinetickou energii tělesa platí

$$E_{\mathrm{k}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i). \tag{64}$$

Rychlost i-tého bodu $\boldsymbol{v}_i$ nyní vyjádříme pomocí rychlosti $\boldsymbol{v}_S$ hmotného středu v uvažované vztažné soustavě. Zřejmě platí (viz obr. 34 vpravo)

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{v}_i',$$

kde $\boldsymbol{v}_i'$ je rychlost i-tého bodu vzhledem k hmotnému středu. Po dosazení do (64) dostaneme

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{v}_i') \cdot (\boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{v}_i') = \frac{1}{2} v_S^2 \sum_i m_i + \boldsymbol{v}_S \cdot \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i' + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i'^2. \tag{65}$$

Suma ve druhém členu výrazu (65) představuje hybnost tělesa ve vztažné soustavě spojené hmotným středem. Srovnáme-li výrazy (9) a (12) můžeme analogicky psát

$$\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i' = m \boldsymbol{v}_S', \tag{66}$$

kde $\boldsymbol{v}_S'$ je rychlost hmotného středu v soustavě s ním pevně spojené — zřejmě je $\boldsymbol{v}_S' = 0$ a člen (66) je nulový. Pak přejde vztah (65) pro kinetickou energii do tvaru

$$\boxed{E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \textstyle\sum_i m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2 = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2,} \tag{67}$$

kde J_S je moment setrvačnosti tělesa k ose procházející hmotným středem.

Kinetická energie tuhého tělesa při jeho obecném rovinném pohybu je rovna součtu kinetické energie hmotného středu (odpovídá translační složce pohybu) a kinetické energie pohybu tělesa vzhledem k hmotnému středu (odpovídá rotační složce pohybu).

2.8 Zákon zachování mechanické energie

Uvažujme pohyb tělesa v silovém poli, které je *konzervativní.* Přitom konzervativní pole je takové pole, u něhož je práce působící síly vykonaná po uzavřené trajektorii tělesa v tomto poli nulová. To může být jen, když práce mezi dvěma body trajektorie *závisí pouze na výchozí a konečné poloze tělesa, nikoli na*

tvaru trajektorie. V takovém poli můžeme definovat *potenciální (polohovou) energii* E_p. Příkladem konzervativních polí v mechanice je pole gravitační a pole pružných sil, v elektromagnetismu je to pole elektrostatické.

Práce, kterou vykoná konzervativní pole při přemístění tělesa z polohy 1 do polohy 2, je

$$W_{12} = E_{\mathrm{p}1} - E_{\mathrm{p}2}. \tag{68}$$

Z toho je zřejmé, že potenciální energie je definována až na konstantu — ta se při výpočtu práce podle (68) vyruší. Proto je nutné podle charakteru úlohy volit *nulovou hladinu* potenciální energie.

Práce vykonaná na tělese se projeví vzrůstem jeho kinetické energie v uvažované inerciální vztažné soustavě. Tedy

$$W_{12} = E_{\mathrm{p}1} - E_{\mathrm{p}2} = E_{\mathrm{k}2} - E_{\mathrm{k}1}, \quad \text{neboli} \quad E_{\mathrm{k}1} + E_{\mathrm{p}1} = E_{\mathrm{k}2} + E_{\mathrm{p}2}.$$

Obecně tedy platí

$$\boxed{E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = konst.} \tag{69}$$

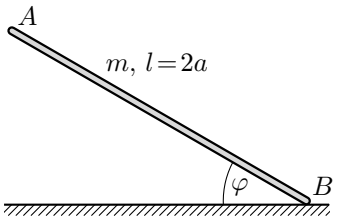
Tento vztah vyjadřuje **zákon zachování mechanické energie:**

Celková mechanická energie tělesa v konzervativním poli v uvažované inerciální vztažné soustavě je konstantní.

Zákon zachování energie (69) spolu s výrazy (26), (27) a (67) pro kinetickou energii můžeme s výhodou využít při řešení mnohých úloh z mechaniky tělesa. Přitom např. při výpočtu rychlosti nebo úhlové rychlosti nemusíme řešit diferenciální pohybovou rovnici, jak si ukážeme na následujících dvou příkladech.

Příklad 9 - klouzající tyč

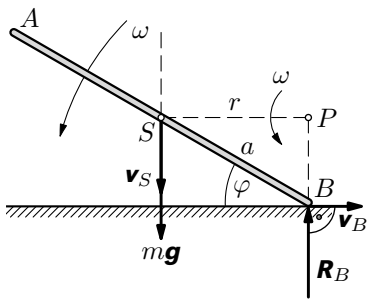
Tenká tuhá homogenní tyč o délce $l = 2a$ a hmotnosti m klouže koncovým bodem B po dokonale hladké vodorovné ploše (obr. 40). Tyč se začala pohybovat z klidové, téměř svislé polohy ($\varphi \approx \pi/2$). Určete velikost úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ jako funkci úhlu φ.



Obr. 40

Řešení

K řešení využijeme zákona zachování mechanické energie (69). V opěrném bodě B působí na tyč reakce $\boldsymbol{R}_B$ vodorovné plochy, která však v případě neexistence tření je kolmá k ploše, a tudíž při pohybu tyče nekoná práci (obr. 41). Jedinou silou, která způsobuje změnu kinetické energie v soustavě spojené s vodorovnou plochou je tíhová síla $m\boldsymbol{g}$. Protože počáteční rychlost tyče byla nulová a tíhová síla je svislá, pohybuje se hmotný střed po svislé přímce. Mechanická energie v počáteční poloze má složky



Obr. 41

$$E_{\mathrm{k}0} = 0, \quad E_{\mathrm{p}0} = mga.$$

V obecné poloze podle (67) je

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}J_S\omega^2, \qquad E_{\mathrm{p}} = mga\sin\varphi.$$

Pro výpočet rychlosti $\boldsymbol{v}_S$ hmotného středu S můžeme s výhodou použít pólu pohybu P (obr. 41). Platí $v_S = \omega r = \omega a\cos\varphi$. Uvážíme-li, že $J_S = m(2a)^2/12$, dostaneme po dosazení do vztahu (69) pro zákon zachování energie rovnici

$$mga = \frac{1}{2}ma^2\omega^2\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ma^2\omega^2 + mga\sin\varphi,$$

neboli

$$g(1-\sin\varphi) = \frac{a\omega^2}{6}(1+3\cos^2\varphi).$$

Odtud dostaneme hledané řešení

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{a}\cdot\frac{1-\sin\varphi}{1+3\cos^2\varphi}}.$$

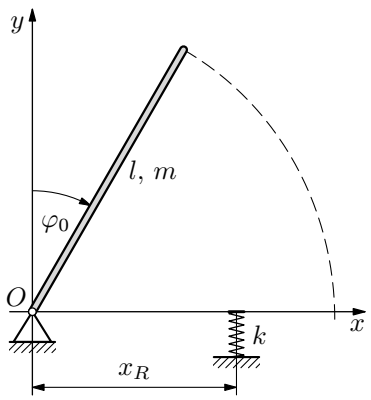
Příklad 10 – otáčející se tyč

Tenká tuhá homogenní tyč o hmotnosti m a délce l je ze stavu klidu, kdy je odkloněna od svislice o úhel φ_0, volně puštěna (obr. 42).

a) Vypočtěte rychlost jejího koncového bodu při dopadu na vodorovnou rovinu.

b) Do jaké vzdálenosti x_R od osy O je nutné ve vodorovné rovině umístit nárazník o tuhosti k, aby zachytil celou sílu nárazu, tj. aby reakce v závěsu osy tyče nezávisela na síle nárazu.

c) Vypočtěte velikost síly nárazu při umístění nárazníku podle b).



Obr. 42

Řešení

a) Řešíme užitím zákona zachování mechanické energie. Nulovou hladinu potenciální energie volíme ve vodorovné rovině. Celková energie ve výchozí poloze je

$$E_0 = E_{\mathrm{pmax}} = mg\frac{l}{2}\cos\varphi_0. \tag{70}$$

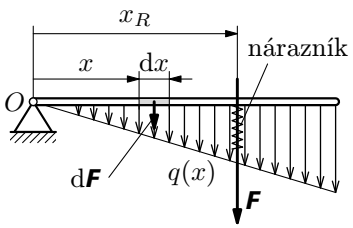
Celková energie ve vodorovné rovině je

$$E_{\mathrm{v}} = E_{\mathrm{kmax}} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\left(\frac{v}{l}\right)^2 = \frac{1}{6}mv^2.$$

Z rovností celkových energií v obou polohách dostaneme pro rychlost koncového bodu tyče výraz

$$v = \sqrt{3gl\cos\varphi_0}.$$

b) Při dopadu tuhé tyče na pružný nárazník o konstantní tuhosti k dojde ke zpomalenému otočnému zabrzdění tyče; úhlové zrychlení označíme ε.



Obr. 43

Na element $\mathrm{d}x$ tyče působí element síly (obr. 43)

$$\mathrm{d}F = a\,\mathrm{d}m = \varepsilon x\frac{m}{l}\mathrm{d}x.$$

Délková hustota síly tedy je

$$q(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\varepsilon m}{l}x.$$

Hustota síly tedy narůstá lineárně od osy O (viz obr. 44). Výsledná síla má velikost

$$F = \int_0^l q(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon m}{l}\int_0^l x\,\mathrm{d}x = \varepsilon\frac{ml}{2}. \tag{71}$$

Aby nárazník zcela zachytil nárazovou sílu, musíme jej umístit tak, aby ležel na nositelce výslednice (71). Její polohu x_R určíme z podmínky, že moment výslednice je roven součtu momentů složkových sil. Složkové síly jsou rozloženy spojitě, proto tento součet přejde v integrál. Tedy

$$Fx_R = \int_0^l q(x)\cdot x\,\mathrm{d}x,$$

neboli

$$\varepsilon\frac{ml}{2}x_R = \frac{\varepsilon m}{l}\int_0^l x^2\mathrm{d}x = \varepsilon\frac{ml^2}{3}.$$

Z prvního a třetího členu dostaneme pro polohu výslednice a tím i pro polohu nárazníku výraz

$$x_R = \frac{2}{3}\,l. \tag{72}$$

Tato poloha se v dynamice nazývá *střed rázu* nebo *střed perkuze*.

c) Výše vypočtená velikost výslednice setrvačných sil, která je dynamickou silou nárazu, je podmíněna znalostí úhlového zrychlení ε po dopadu na nárazník. To závisí na tuhosti nárazníku a jeho velikost během nárazu vzrůstá. Výpočet konečné velikosti síly $\boldsymbol{F}$ můžeme však udělat přímo úvahou o energii. Celková mechanická energie E_0 vypočtená v a) se po nárazu přemění na potenciální pružnou energii E_{pr} nárazníku podle vztahu

$$E_0 = E_{\mathrm{pr}} = \frac{1}{2}ky_{\max}^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{F}{k}\right)^2 = \frac{F^2}{2k},$$

kde $y_{\max} = \dfrac{F}{k}$ je dynamická složka deformace při nárazu. Po dosazení za E_0 z výrazu (70) dostaneme pro konečnou velikost síly nárazu výraz

$$F = \sqrt{mglk\cos\varphi_0}. \tag{73}$$

Po dosazení tohoto výrazu do (71) bychom mohli vypočítat velikost příslušného úhlového zrychlení při největší deformaci nárazníku.
Celková síla, působící při nárazu na nárazník, bude kromě dynamické složky (73) zahrnovat ještě statickou tíhovou složku, která závisí na poloze x_R podle (72). Celková síla má velikost

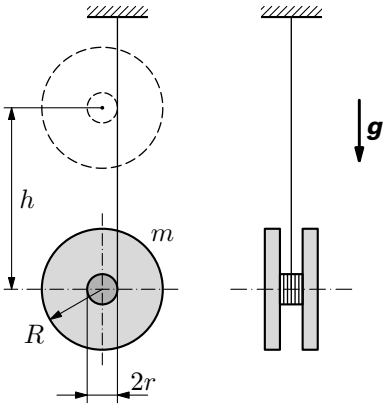
$$F_c = \frac{3}{4}mg + \sqrt{mglk\cos\varphi_0}.$$

Úlohy

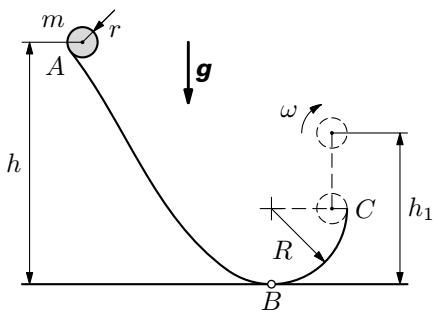
10. Maxwellovo kyvadlo je soustava dvou blízko sebe umístěných válcových kotoučů o poloměru R a o celkové hmotnosti m, které jsou spojeny čepem o poloměru r, jehož hmotnost zanedbáme (obr. 44). Na čepu je jedním koncem připevněno a navinuto neroztažitelné vlákno, které je druhým koncem připevněno k závěsu. Po navinutí vlákna a po uvolnění kotoučů z horní klidové polohy se vlákno odvijí bez prokluzu. Vypočtěte

a) rychlost středu kotoučů při jejich přemístění do vzdálenosti h od klidové polohy,

b) zrychlení středu kotoučů.



Obr. 44



Obr. 45

11. Kulička o hmotnosti m a poloměru r se z klidového stavu v bodě A valí bez klouzání po dráze podle obr. 45 a v bodě C ji opustí. Je-li dána výška h a poloměr R, vypočtěte

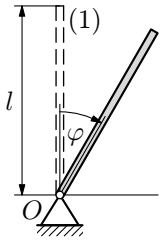
a) sílu, kterou bude na kuličku působit dráha, když bude procházet jejím nejnižším bodem B,

b) největší výšku h_1, do které vystoupí, a úhlovou rychlost ω_1, kterou zde bude mít.

12. Tenká homogenní tyč o délce l je uvolněna ze svislé polohy (1) (obr. 46) a se zanedbatelným třením se otáčí okolo čepu O.

a) Užitím pohybové rovnice určete závislost úhlového zrychlení ε tyče na úhlu otočení.

b) Užitím zákona zachování energie určete závislost úhlové rychlosti ω tyče na úhlu otočení. Derivací výsledku b) ověřte řešení a).



Obr.46

Výsledky úloh

1. a) $\dfrac{v_B}{v_A} = \dfrac{|PB|}{|PA|} \quad \Rightarrow \quad v_B = v_A \dfrac{|PB|}{|PA|} = v_A \operatorname{tg}\varphi$, b) $v_A \sin\varphi = v_B \cos\varphi$.

2. Platí $x_C = 2x_B$, $y_C = -y_A$. Z toho

$$\dot{x}_C = 2\dot{x}_B = 2v_A \operatorname{tg}\varphi, \qquad \dot{y}_C = -\dot{y}_A = -v_A,$$

$$\ddot{x}_C = 2\ddot{x}_B = -\frac{2v_A^2}{l\cos^3\varphi}, \qquad \ddot{y}_C = -\ddot{y}_A = 0.$$

Rychlost bodu C má velikost $v_C = v_A\sqrt{4\operatorname{tg}^2\varphi + 1}$ a svírá s osou x úhel

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2\operatorname{tg}\varphi}.$$

Zrychlení bodu C má velikost $\dfrac{2v_A^2}{l\cos^3\varphi}$ a směr záporné poloosy x.

3. V krajních polohách je $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{0}$. Proto $\boldsymbol{v}_{BA} = -\boldsymbol{v}_A$. Zrychlení bodu B má trvale směr osy OB. Proto v krajních polohách je

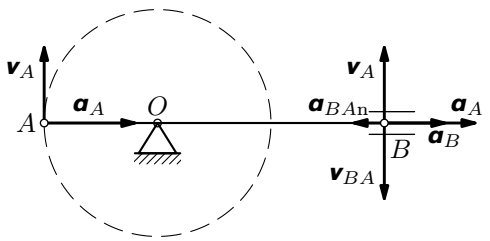
$$\boldsymbol{a}_{BA\mathrm{t}} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA\mathrm{n}}$$

V levé krajní poloze je (viz obr. 47)

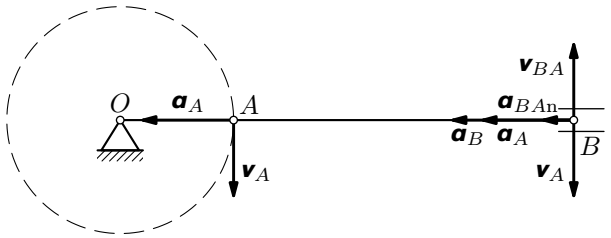
$$a_B = a_A - a_{BA\mathrm{n}} = \frac{v_A^2}{r} - \frac{v_A^2}{l} = \frac{v_A^2}{r} - \frac{v_A^2}{3r} = \frac{2}{3}\omega^2 r.$$

V pravé krajní poloze je (viz obr. 48)

$$a_B = a_A + a_{BA\mathrm{n}} = \frac{v_A^2}{r} + \frac{v_A^2}{l} = \frac{v_A^2}{r} + \frac{v_A^2}{3r} = \frac{4}{3}\omega^2 r.$$



Obr. 47



Obr. 48

4. $\omega = \sqrt{\dfrac{2Fl}{J}}$.

5. $J = mr^2\left(\dfrac{gt^2}{2s} - 1\right) = 0{,}76\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.

6. Pohybová rovnice po separaci proměnných: $\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2} = -\dfrac{k}{J}\mathrm{d}t$.

a) $\omega = \dfrac{J\omega_0}{J + k\omega_0 t}$, b) $t_1 = \dfrac{9J}{k\omega_0}$.

7. $J_1 = J_2 = \dfrac{1}{12}ma^2$, $J_3 = \dfrac{1}{6}ma^2$.

8. Označme R vnější poloměr, r vnitřní poloměr skořepiny. Moment setrvačnosti plné koule je

$$J_1 = \frac{2}{5}mR^2 = \frac{8}{15}\varrho\pi R^5.$$

Moment setrvačnosti skořepiny je tedy

$$J = J_1 - J_2 = \frac{8}{15}\varrho\pi(R^5 - r^5) = \frac{8}{15}\varrho\pi(R-r)(R^4 + R^3r + R^2r^2 + Rr^3 + r^4).$$

Hmotnost skořepiny je

$$m = m_1 - m_2 = \frac{4}{3}\varrho\pi(R^3 - r^3) = \frac{4}{3}\varrho\pi(R-r)(R^2 + Rr + r^2).$$

U tenké skořepiny $r \approx R$.

$$\frac{J}{m} \approx \frac{\frac{8}{15}\varrho\pi(R-r)\cdot 5R^4}{\frac{4}{3}\varrho\pi(R-r)\cdot 3R^2} = \frac{2}{3}R^2, \quad J \approx \frac{2}{3}mR^2.$$

9. $J = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} mr^2 - \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{3} \left(\frac{r}{2} \right)^2 + \frac{m}{3} \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right] = \frac{13}{24} mr^2,$

těžiště je ve vzdálenosti $\frac{r}{6}$ od středu O, $J_S = J - m \left(\frac{r}{6} \right)^2 = \frac{37}{72} mr^2.$

10. a) $v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{R^2}{2r^2}}}$, b) $a = \frac{2r^2 g}{2r^2 + R^2}$.

11. a) $F_B = mg \left[1 + \frac{10(h-r)}{7(R-r)} \right]$,

b) $h_1 = \frac{5h + 2R}{7}$, $\omega_1 = \sqrt{\frac{10g(h-R)}{7r^2}}$.

12. a) $\varepsilon = \frac{3g}{2l} \sin \varphi$, b) $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}(1 - \cos \varphi)}$.

Literatura

[1] Brdička, M., Hladík, A.: *Teoretická mechanika.* Praha: Academia, 1987.

[2] Szabó, J.: *Mechanika tuhých těles a kapalin.* Praha: SNTL, 1967.

[3] Trkal, V.: *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa.* Praha: Nakl. ČSAV, 1956.

[4] Vybíral, B.:*Kinematika a dynamika tuhého tělesa.* Knihovnička Fyzikální olympiády č. 31. Hradec Králové: MAFY, 1997.

[5] Vybíral, B.:*Setrvačníky a jejich aplikace.* Knihovnička Fyzikální olympiády č. 34. Hradec Králové: MAFY, 1998.