STATIKA TUHÉHO TĚLESA

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Bohumil Vybíral

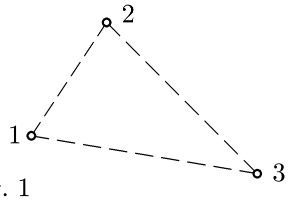
Obsah

Úvod

Skutečná tělesa pevného skupenství, neboli *pevná tělesa*, se vyznačují tím, že vzdálenosti mezi částicemi, z nichž jsou složena, nejsou stálé. Působením sil se tyto vzdálenosti mění, vzniká deformace pevného tělesa. Tyto změny vzdáleností jsou u řady úloh z mechaniky zanedbatelné, a pokud nedojde působením sil k porušení soudržnosti tělesa, není nutné k nim přihlížet.

Proto zavádíme pojem *tuhé těleso*. Je to model skutečného pevného tělesa, u kterého se definuje, že vzdálenosti mezi jednotlivými body tělesa jsou neproměnné při libovolných působících silách. Dále se definuje, že tvar tuhého tělesa a rozložení hmotnosti v něm je stejné jako u skutečného tělesa, přičemž rozložení hmotnosti se předpokládá spojité. Tohoto modelu nelze použít v případech, kdy se např. uplatňují pružné vlastnosti skutečného tělesa.

Uvažujme o třech bodech tuhého tělesa, které neleží na jedné přímce, půjde např. o body 1, 2, 3 na obr. 1. Upevníme-li nyní tuhé těleso tak, že jeden jeho bod, např. 1, bude ve vztažné soustavě nepohyblivý, mohou ostatní body opisovat trajektorie, které budou ležet na kulových plochách se středem v bodě 1. Budou-li ve vztažné soustavě dva body nepohyblivé, např. 1, 2, budou ostatní body tělesa opisovat kruhové trajektorie, jejichž společnou osou je přímka, na níž leží body 1, 2. Zamezíme-li v uvažované vztažné soustavě i pohybu bodu 3, bude těleso v této vztažné soustavě nepohyblivé. Z této úvahy vyplývá, že *poloha tuhého tělesa v prostoru je jednoznačně určena polohou jeho tří bodů, které neleží na téže přímce*. Protože tyto body můžeme považovat za vrchly rovinného trojúhelníka, je poloha tuhého tělesa rovněž jednoznačně určena polohou libovolného trojúhelníka spřaženého s tělesem.



Obr. 1

Poloha každého z uvažovaných bodů 1, 2, 3 je ve vztažné soustavě určena třemi souřadnicemi, takže pro určení polohy tělesa máme celkem devět čísel. Všech těchto devět čísel však nelze nezávisle měnit, protože tím bychom mohli tři body tuhého tělesa umístit kamkoli do prostoru, což není vzhledem k tuhosti tělesa možné. Protože tedy $|12|$=konst, $|23|$=konst, $|31|$=konst, lze při pohybu volit nanejvýš $3 \cdot 3 - 3 = 6$ nezávislých souřadnic tuhého tělesa. Říkáme, že *volné tuhé těleso konající obecný prostorový pohyb má šest stupňů volnosti*.

Toto zjištění je rozhodující pro celou mechaniku tuhého tělesa. Např. k jednoznačnému řešení prostorového pohybu tuhého tělesa je třeba řešit *šest* skalárních pohybových rovnic a k určení rovnováhy tuhého tělesa v prostoru je třeba řešit *šest* skalárních podmínek rovnováhy.

V mechanice tuhých těles často řešíme tzv. *rovinné úlohy*. Patří sem například vyšetřování pohybu tělesa, jehož body opisují trajektorie, které jsou rovinnými křivkami. Nebo půjde o vyšetřování rovnováhy tělesa, kdy soustava sil působících na těleso je rovinná.

Podmínky řešitelnosti rovinných úloh jsou podstatně jednodušší než u obecných prostorových úloh. Vyplývá to i z počtu stupňů volnosti volného tuhého tělesa vykonávajícího *rovinný pohyb*. Tento počet určíme opět z úvahy o pohybu tuhé soustavy tří bodů z obr. 1. Obecně volené body 1, 2, 3 opisují při rovinném pohybu trajektorie, které leží ve třech vzájemně rovnoběžných rovinách. Tyto tři body, které vymezují trojúhelník, můžeme bez újmy obecnosti volit tak, aby ležely jen v jedné z těchto rovnoběžných rovin. Pak je ovšem zřejmé, že k jednoznačnosti určení polohy tělesa při rovinném pohybu stačí uvažovat jen o jedné ze stran tohoto trojúhelníka, například o úsečce $\overline{12}$. Její poloha v rovině je určena třemi nezávislými souřadnicemi, např. dvěma kartézskými souřadnicemi bodu 1 a úhlem, který svírá úsečka $\overline{12}$ s libovolnou přímkou v této rovině. Tedy *volné tuhé těleso konající rovinný pohyb má tři stupně volnosti*.

Podle druhů řešených úloh se mechanika tuhého tělesa člení na:

1. statiku — řeší podmínky rovnováhy tělesa,

2. kinematiku — zabývá se pohybem tělesa bez zřetele k jeho příčinám,

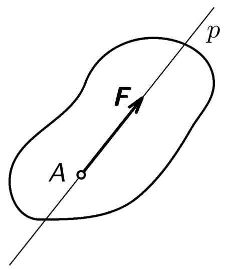
3. dynamiku — vyšetřuje souvislost mezi pohybem tělesa a silami a jejich momenty působícími na teleso.

V našem textu se omezíme jen na statiku tuhého tělesa.

1 Soustavy sil působících na těleso

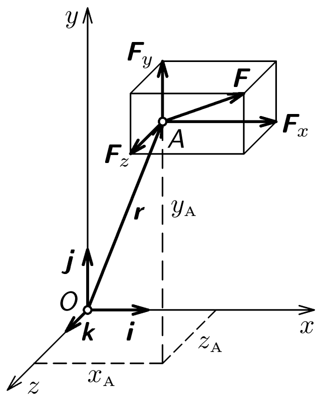
1.1 Síla

Ve statice vyšetřujeme soustavy sil, které sestávají z jednotlivých sil. *Síla* se ve fyzice zavádí jako veličina, která je mírou *dynamických účinků* na těleso (síla jako příčina změny pohybového stavu tělesa) anebo je mírou *statických účinků* na těleso (např. tah na závěs, tlak na podložku, míra vzájemného působení mezi tělesy, síla jako příčina deformace pružných těles).



Obr. 2

Z experimentů je zřejmé, že *síla je vektorová veličina*. Při působení na skutečná tělesa je jednoznačně určena *velikostí, směrem a působištěm*. U tuhých těles není vazba síly na působiště (A) nutná, neboť účinek síly na tuhé těleso se jejím posunutím po přímce nositelce (p) nezmění — *v tuhém tělese je síla vázaná na přímku* — viz. obr. 2. Tuto vektorovou přímku síly budeme nazývat *nositelka síly*. Sílu graficky znázorňujeme orientovanou úsečkou a používáme pro ni značku $\boldsymbol{F}$, případně ve speciálních případech ještě značky $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{S}$. Důležitým případem síly pro statiku je *tíhová síla* $\boldsymbol{F}_G$. Je to výslednice tíhových sil působících na elementy tělesa v tíhovém poli. Má působiště v těžišti tělesa. Kromě toho zavádíme *tíhu* $\boldsymbol{G}$. Je to síla, kterou působí těleso v tíhovém poli na jiné těleso (např. podložku) v *místě dotyku těchto těles*. Jednotkou síly je *newton* (N).



Obr. 3

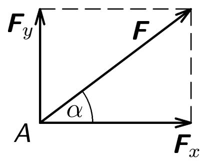
Při práci se silovými soustavami je velmi výhodné provést rozklad síly do kartézských složek (obr. 3):

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y + \boldsymbol{F}_z = F_x\,\boldsymbol{i} + F_y\,\boldsymbol{j} + F_z\,\boldsymbol{k}\,, \quad (1)$$

kde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ jsou jednotkové vektory ve směru os x, y, z kartézské soustavy souřadnic. Rozlišujeme vektory $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$, $\boldsymbol{F}_z$ jako *kartézské složky* síly $\boldsymbol{F}$ a skaláry F_x, F_y, F_z jako *kartézské souřadnice* síly $\boldsymbol{F}$.

V obr. 3 je působiště A síly určeno polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$ o souřadnicích x_{A}, y_{A}, z_{A}. Platí

$$\boldsymbol{r} = x_{\mathrm{A}}\,\boldsymbol{i} + y_{\mathrm{A}}\,\boldsymbol{j} + z_{\mathrm{A}}\,\boldsymbol{k}\,. \quad (2)$$



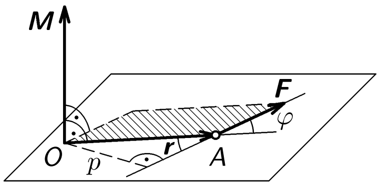
Obr. 4

V tomto textu se až na výjimky omezíme na rovinnou soustavu sil. Pak $F_z = 0$, $z_{\mathrm{A}} = 0$. Často pracujeme i s polárními souřadnicemi síly: $F = |\boldsymbol{F}|$, α (obr. 4). Pak

$$F_x = F\cos\alpha\,,\;\; F_y = F\sin\alpha\,,$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}\,,\;\; \operatorname{tg}\alpha = \frac{F_y}{F_x}\,. \tag{3}$$

1.2 Moment síly vzhledem k bodu



Obr. 5

Důležitým pojmem mechaniky je *moment* ($\boldsymbol{M}$) *síly vzhledem k bodu*, který definujeme jako *vektorový součin polohového vektoru* ($\boldsymbol{r}$) *působiště síly od příslušného bodu* (O) *a vektoru* ($\boldsymbol{F}$) *síly zde působící*:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}\,. \tag{4}$$

Je mírou otáčivých účinků síly $\boldsymbol{F}$ na těleso, které je otáčivé kolem nehybného bodu O.

Z vlastností vektorového součinu dvou vektorů vyplývá, že $\boldsymbol{M}$ je vektor, který má tyto vlastnosti (viz. obr. 5):

a) Je kolmý k rovině proložené vektory $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}$.
b) Jeho orientace je určena pravidlem pravé ruky pro vektorový součin (zde lze toto pravidlo specializovat tak, že orientace je určena palcem pravé ruky, když prsty ukazují směr rotace, kterou by síla $\boldsymbol{F}$ vzhledem k bodu O způsobila).
c) Jeho velikost je určena plochou rovnoběžníka opsaného vektory $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}$:

$$|\boldsymbol{M}| = M = rF\sin\varphi = pF\,, \tag{5}$$

kde $p = r\sin\varphi$ je *rameno síly* (obr. 5).
d) Je vázán k bodu O, který se nazývá *momentový bod*.
e) Je nulový buď pro $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ anebo pro $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, tedy když nositelka síly $\boldsymbol{F}$ prochází momentovým bodem O. Je nulový rovněž pro $\varphi = 0$, tedy když nositelka síly je rovnoběžná s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$ a je $p = 0$.

Kartézské složky vektoru $\boldsymbol{M}$ určíme obecným postupem pro vektorový součin. Omezíme-li se na rovinný případ, kdy vektory $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{F}$ budou ležet v rovině

$z = 0$, bude

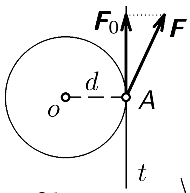
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = (x_\mathrm{A}\,\boldsymbol{i} + y_\mathrm{A}\,\boldsymbol{j}) \times (F_x\,\boldsymbol{i} + F_y\,\boldsymbol{j}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_\mathrm{A} & y_\mathrm{A} & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{k}(x_\mathrm{A} F_y - y_\mathrm{A} F_x) = \boldsymbol{M}_z \,. \tag{6}$$

Vektor $\boldsymbol{M}$ má v tomto případě jedinou složku, která leží v ose z uvažované vztažné soustavy.

Jednotkou momentu síly je *newton metr* $(\mathrm{N \cdot m})$.

1.3 Moment síly vzhledem k nehybné ose



Obr. 6

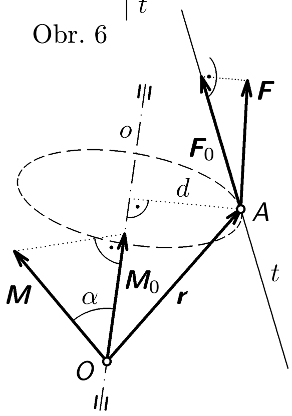
Vedle momentu síly vzhledem k bodu se zavádí ještě *moment síly vzhledem k nehybné ose*. Je mírou otáčivých účinků síly $\boldsymbol{F}$ na těleso, které je otáčivé kolem této nehybné osy. Je to vektor $\boldsymbol{M}_0$, který leží v ose otáčení a má velikost

$$M_0 = F_0 d \,, \tag{7}$$

kde $\boldsymbol{F}_0$ je průmět síly $\boldsymbol{F}$ do přímky t (obr. 6), která je tečnou ke kružnici, jež by opisoval bod A při otáčení tělesa kolem nehybné osy o a d je poloměr této kružnice. Vztah mezi momentem $\boldsymbol{M}$ síly vzhledem k bodu O a momentem $\boldsymbol{M}_0$ téže síly vzhledem k ose o, která bodem O prochází, je zřejmý z obr. 7. Platí

$$M_0 = M \cos\alpha \,, \tag{8}$$

kde α je úhel, který tyto dva vektory svírají.

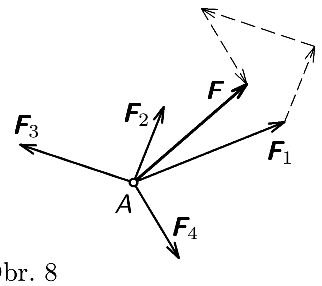


Obr. 7

1.4 Rovinná soustava sil se společným působištěm

Úlohou je najít jedinou výslednici soustavy sil, jejichž účinek na tuhé těleso je stejný, jaký má celá soustava jednotlivých sil. Uvažujme soustavu n sil, které leží v rovině $z = 0$ a které mají společné působiště A. Pokud síly nemají společné působiště, avšak jejich nositelky se protínají v jednom bodě, posuneme jednotlivé síly do tohoto bodu.

a) **Grafické řešení**



Obr. 8

Postupujme podle pravidla o geometrickém sčítání vektorů. Ke konci vektoru první síly připojíme vektor druhé síly atd., až ke konci předposlední síly připojíme vektor poslední síly. Výslednice $\boldsymbol{F}$ je pak určena orientovanou úsečkou vedenou z počátku A ke konci poslední síly. Výslednice tedy uzavírá tento *silový* $n+1$ *úhelník*. Řešení pro $n = 4$ je na obr. 8.

b) **Početní řešení**

Jednotlivé síly rozložíme na kartézské složky a příslušné kartézské složky sečteme (jde o vektory ležící ve směru osy x a y):

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + ... + \boldsymbol{F}_n = (F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx})\,\boldsymbol{i} + (F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny})\,\boldsymbol{j} =$$

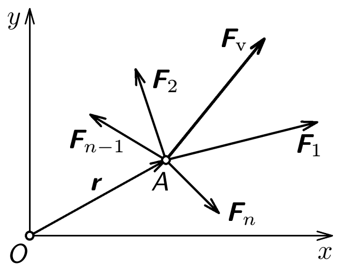
$$= F_x\,\boldsymbol{i} + F_y\,\boldsymbol{j} = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y\,, \tag{9}$$

kde $\boldsymbol{F}_x$, $\boldsymbol{F}_y$ jsou kartézské složky a F_x , F_y kartézské souřadnice výsledné síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}}$. Její polární souřadnice určíme pomocí vztahů (3).

c) **Varignonova věta**

Stanovme nyní moment výslednice soustavy n různoběžných sil, které leží v jedné rovině, např. $z = 0$ (obr. 9). Výslednice podle vztahu (9) je

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_j\,. \tag{10}$$



Obr. 9

Jednotlivé síly a jejich výslednice procházejí společným bodem A, jehož poloha vzhledem k počátku O vztažné soustavy je dána polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$. Obě strany vztahu (10) nyní zleva vektorově vynásobíme $\boldsymbol{r}$ a na pravé straně provedeme rozpis podle distributivního zákona. Tak dostaneme

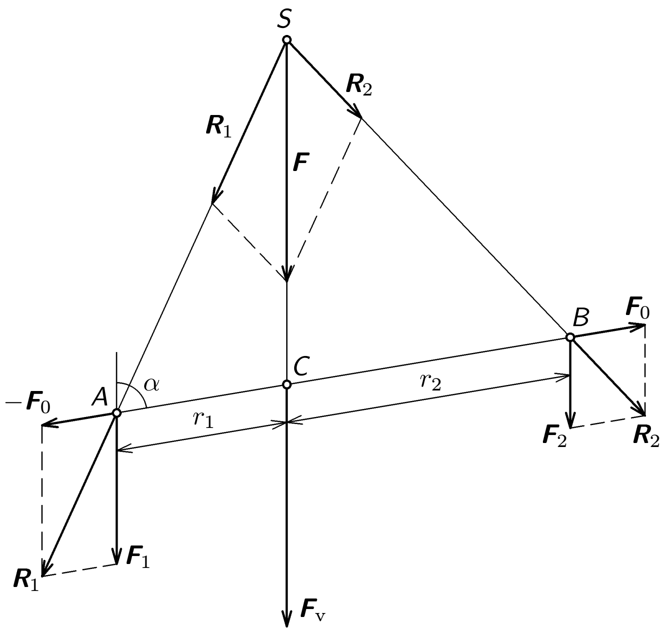
$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_{\mathrm{v}} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_j\,, \quad \text{neboli} \quad \boldsymbol{M}_{\mathrm{v}} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{M}_j\,. \tag{11}$$

Neboli *moment výslednice soustavy sil protínajících se v jednom bodě (A) vzhledem k libovolnému bodu (O) je roven vektorovému součtu momentů složkových sil k témuž bodu (O).*
Tato věta se nazývá *věta Varignonova* podle Francouze Pierra Varignona (1654–1722), který ji poprvé vyslovil.
Je-li výsledná síla soustavy sil se společným působištěm nulová, je nulový i vektorový součet momentů složkových sil vzhledem k libovolnému bodu. Tato poučka obecně neplatí pro soustavu rovnoběžných sil, u níž je nulová výslednice sil $\boldsymbol{F}_\mathrm{v} = \boldsymbol{0}$ (viz odst. 1.5c).

1.5 Obecná rovinná soustava sil

Pro nalezení postupu určení výslednice obecné rovinné soustavy sil, tedy soustavy sil, jejichž působiště nejsou totožná, budeme se nejprve zabývat zvláštním případem dvou rovnobežných sil a zavedeme pojem *silové dvojice.*

a) Soustava dvou rovnoběžných sil



Obr. 10

Mějme dvě rovnoběžné síly $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ podle obr. 10. Úlohu převedeme na soustavu dvou různoběžných sil tak, že k silám připojíme nulový vektor $\boldsymbol{F}_0$, $-\boldsymbol{F}_0$. Tím dostaneme různoběžné síly $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$, které procházejí bodem S. Jejich výslednice

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{v} = \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 = (\boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_0) + (\boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_0) = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \tag{12}$$

má velikost $F_\mathrm{v} = F_1 + F_2$, jejich nositelka je rovnoběžná se silami $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ a prochází bodem C, jehož poloha se určí z podobnosti příslušných trojúhelníků (obr. 10):

$$\frac{r_1}{|SC\,|} = \frac{F_0}{F_1}, \quad \frac{r_2}{|SC|} = \frac{F_0}{F_2}.$$

Odtud

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{F_2}{F_1}\,.$$

Neboli $F_1 r_1 = F_2 r_2$, respektive po vynásobení $\sin\alpha$ dostaneme

$$F_1 r_1 \sin\alpha - F_2 r_2 \sin\alpha = 0, \tag{13}$$

kde $r_1 \sin\alpha = p_1$, $r_2 \sin\alpha = p_2$ jsou ramena sil k momentovému bodu C. Bod C se nazývá *střed rovnoběžných sil*.

b) Momentová věta

Podle vztahu (13) výslednice dvou rovnoběžných sil prochází bodem C, vzhledem k němuž je součet momentů jednotlivých složkových sil nulový. Je to zřejmě proto, že výslednice (12) má vzhledem k tomuto bodu nulové rameno.

Tento poznatek lze zobecnit pro soustavu n různoběžných sil. Zvolíme-li *momentový bod na nositelce jejich výslednice* bude pro moment složkových sil platit

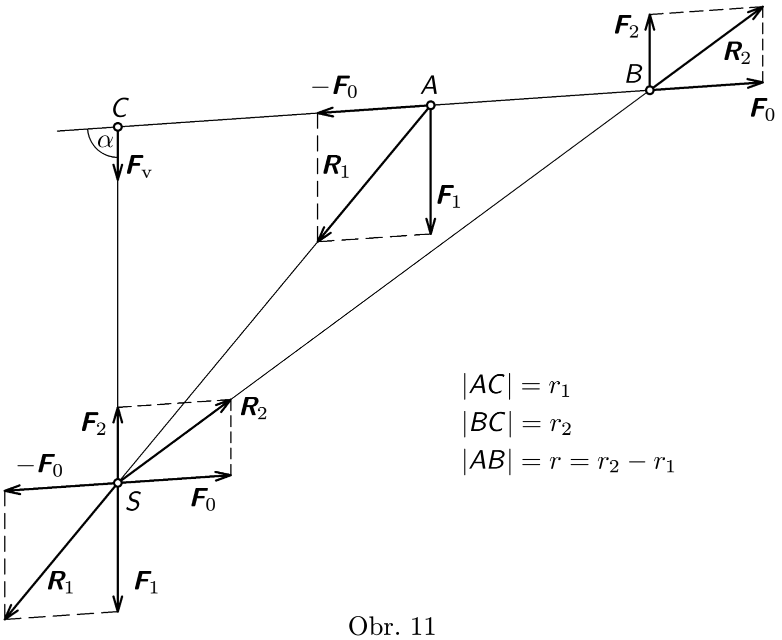
$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{M}_j = \boldsymbol{0}\,. \tag{14}$$

Výsledek (14) se označuje jako *momentová věta*.

Je-li výslednice soustavy *rovnoběžných* sil nulová, nemusí být nulový moment složkových sil, jak uvidíme v následujícím odstavci. S momentovou větou se setkáváme ještě v tomto znění: *Otáčivý účinek sil působících na tuhé těleso otáčivé kolem nehybné osy se ruší, jestliže vektorový součet momentů všech sil vzhledem k ose je nulový vektor*.

c) Silová dvojice a její moment

Vraťme se nyní k soustavě dvou vzájemně rovnoběžných sil, avšak uvažujme síly opačného směru. Při hledání výslednice postupujeme analogicky jako u soustavy rovnoběžných sil stejného směru, tj. problém převedeme zavedením pomocných sil $\boldsymbol{F}_0$, $-\boldsymbol{F}_0$ na problém různoběžných sil. Výsledek řešení je zřejmý z obr. 11.



Obr. 11

Výslednice má velikost

$$F_v = F_1 - F_2 \tag{15}$$

a leží v bodě C mimo úsečku AB na straně větší síly. Vzdálenost r_1 bodu C od bodu A určíme z momentové věty (14), nebo z podobnosti trojúhelníků na obr. 11. Platí

$$F_1 r_1 = F_2 r_2 = F_2(r_1 + r)\,,$$

neboli

$$r_1 = \frac{F_2}{F_1 - F_2} r = \frac{F_2}{F_v} r\,.$$

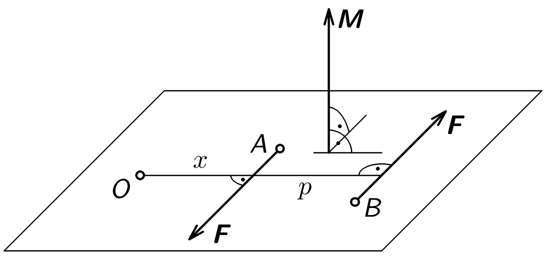
Po vynásobení $\sin\alpha$ dostaneme vztah pro ramena sil

$$p_1 = \frac{F_2}{F_v} p\,. \tag{16}$$

Uvažujme nyní zvláštní případ dvou vzájemně rovnoběžných sil opačného směru a stejné velikosti (obr. 12). Její velikost podle (15) je $F_v = 0$ a její poloha podle (16) je $p_1 \to \infty$. Tato zvláštní soustava se nazývá *silová dvojice.*

Účinek silové dvojice se zřejmě projevuje pouze momentem síly. Vypočteme jeho velikost k libovolně umístěnému (momentovému) bodu $\boldsymbol{O}$ (obr. 12):

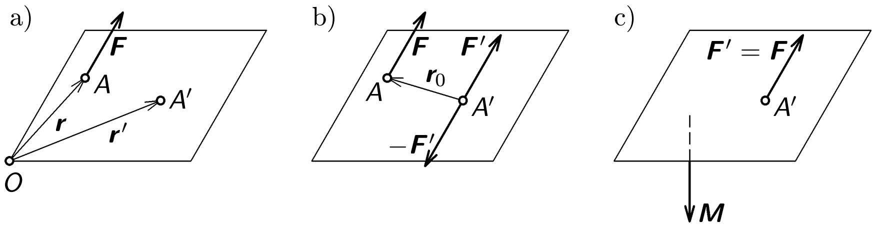
$$M = -xF + (x+p)F = pF\,. \tag{17}$$



Obr. 12

Nezávisí tedy na poloze bodu $\boldsymbol{O}$.
Vektor momentu $\boldsymbol{M}$ silové dvojice je kolmý k rovině, v níž dvojice leží a není vázán k žádnému bodu — je to *vektor volný*. Při zachování směru jej můžeme posunout do libovolného bodu v prostoru.

d) Rovnoběžné posunutí síly do libovolného bodu v tělese



Obr. 13

Působí-li síla $\boldsymbol{F}$ v bodě A tuhého tělesa (obr. 13a), můžeme ji posunout do libovolného bodu A' v tělese tak, že v tomto bodě připojíme k tělesu nulový vektor $\boldsymbol{F}'$, $-\boldsymbol{F}'$, přičemž $F' = F$ (obr. 13b). Vzájemná poloha bodů A, A' je zřejmě určena vztahem $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$. Při rovnoběžném posunutí síly $\boldsymbol{F}$ do bodu A' musíme tedy připojit k síle $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'$ doplňkovou silovou dvojici $\boldsymbol{F}$, $-\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}$. Její moment k libovolnému bodu O je

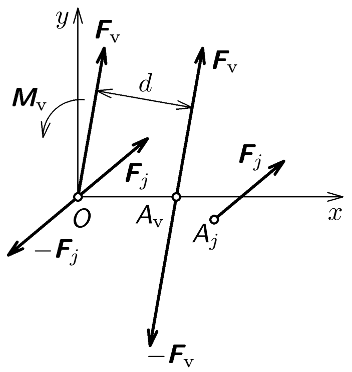
$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}' \times (-\boldsymbol{F}') = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{F}\,, \tag{18}$$

neboli je nezávislý na volbě momentového bodu $\boldsymbol{O}$. Výsledek rovnoběžného posunutí bodu je znázorněn na obr. 13c.

e) Výslednice obecné rovinné soustavy sil

Mějme soustavu n sil, které nemají společné působiště. Pro jednoduchost zvolíme *rovinnou* soustavu a budeme *početním* způsobem hledat její výslednici.

Podstata řešení úlohy je v principu jednoduchá. Postupem uvedeným v předcházejícím odstavci ad d) úlohu převedeme na skládání *různoběžných* vektorů sil a momentů sil. Uvažujme např. obecnou sílu $\boldsymbol{F}_j$, která leží v rovině $z = 0$ v působišti A_j. Tato síla reprezentuje libovolnou sílu z n-tice daných sil. Tyto síly přeneseme do určitého bodu roviny, např. do počátku O (obr. 14). Ke každé přenesené síle musíme při pojit moment $\boldsymbol{M}_j$ příslušné silové dvojice.



Obr. 14

Poté můžeme najít výslednici sil a momentů silových dvojic soustavy:

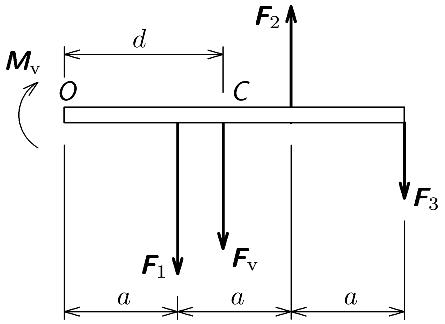
$$\boldsymbol{F}_\mathrm{v} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_j \,, \ \boldsymbol{M}_\mathrm{v} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{M}_j \,. \quad (19)$$

K tomu je třeba připomenout, že v případě rovinné soustavy mají všechny momenty $\boldsymbol{M}_j$ směr kolmý k rovině sil (mají v našem případě směr osy z) a tudíž se skládají skalárně. Pro výsledný moment byl v obr. 14 použit pro jednoduchost symbol obloučku se šipkou, naznačuje směr rotace, kterou by moment síly vyvolal. Tento moment $\boldsymbol{M}_\mathrm{v}$ lze zcela eliminovat vhodným přemístěním výslednice $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$ tak, aby $F_\mathrm{v} d = M_\mathrm{v}$.

Půjde-li naopak o rovinnou *soustavu rovnoběžných sil*, bude úloha snadno řešitelná. Při početním postupu lze jednak využít výše popsané metody s tím, že obě rovnice (19) budou skalární. Jednak lze využít momentové věty (14). Oba postupy uplatníme v následujícím příkladě.

Příklad 1

Určete výslednici sil $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, $\boldsymbol{F}_3$, které působí na tuhý nosník podle (obr. 15). Tíhovou sílu nosníku neuvažujte.



$F_1 = 60$ N,
$F_2 = 40$ N,
$F_3 = 30$ N,
$a = 0,30$ m

Obr. 15

Řešení

a) Dané síly přeneseme do bodu O a najdeme výslednou sílu a výsledný moment silových dvojic:

$$F_{\mathrm{v}} = -F_1 + F_2 - F_3 = -50 \text{ N}$$

$$M_{\mathrm{v}} = -F_1 a + F_2 2a - F_3 3a = -21 \text{ N}\cdot\text{m}\,.$$

Výsledný moment $\boldsymbol{M}_{\mathrm{v}}$ vyrušíme přemístěním výsledné síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}}$ do vzdálenosti d, pro níž platí

$$d = \frac{M_{\mathrm{v}}}{F_{\mathrm{v}}} = \frac{-\,21}{-\,50} \text{ m} = 0{,}42 \text{ m}\,.$$

b) Polohu výslednice lze určit rovněž užitím momentové věty (14), podle níž součet momentů složkových sil vzhledem k bodu (C) ležícímu na výslednici je nulový:

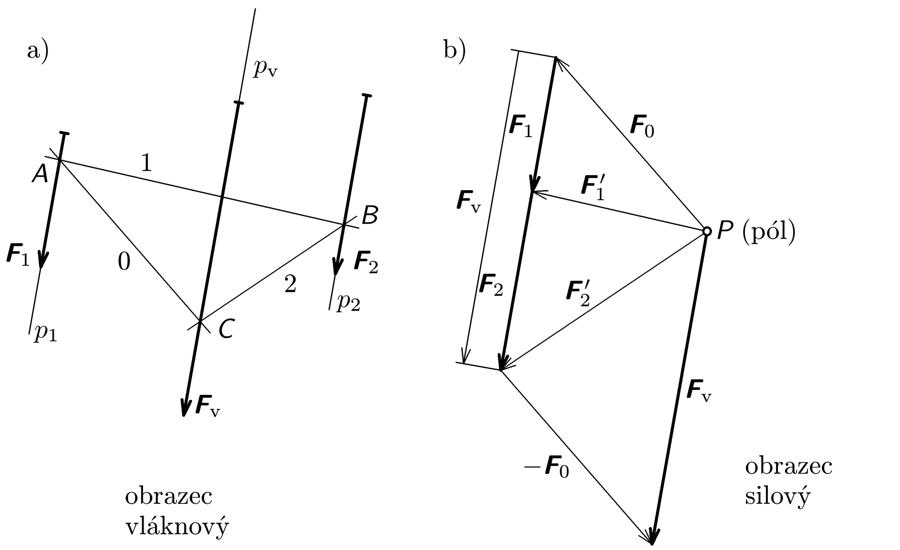
$$F_1(d-a) + F_2(2a-d) - F_3(3a-d) = 0$$

$$d = \frac{F_1 - 2F_2 + 3F_3}{F_1 - F_2 + F_3} a = 0{,}42 \text{ m}\,.$$

1.6 Grafické určení výslednice rovinných soustav sil

Grafické řešení popsané v článku 1.4a (obr. 8) lze použít jen pro případ různoběžných sil. Grafické řešení pro rovnoběžné síly (obr. 10, 11) aplikované na obecnější případy by bylo velmi pracné. Proto byla vypracována *metoda vláknového a silového obrazce.*

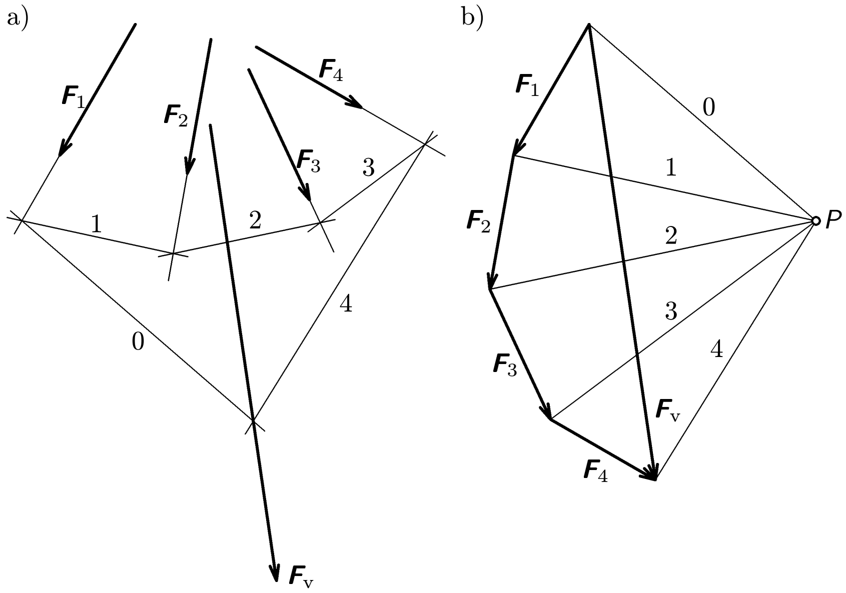
Metodu si ukážeme na konkrétním jednoduchém případě dvou rovnoběžných sil (obr. 16a).



Obr. 16

K soustavě připojíme nulovou soustavu sil $\boldsymbol{F}_0$, $-\boldsymbol{F}_0$ na nositelce 0 směru podstatně odlišného od směru nositelek p_1, p_2. Pracujeme nejprve se silou $\boldsymbol{F}_0$, kterou sečteme s danou silou $\boldsymbol{F}_1$ a dostaneme dílčí výslednici $\boldsymbol{F}_1' = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_1$ (obr. 16b). Nositelka 1 této síly musí procházet průsečíkem A nositelek p_1 a 0 — viz vláknový obrazec (obr. 16a). Nyní se vrátíme do silového obrazce a k síle $\boldsymbol{F}_1'$ přičteme danou sílu $\boldsymbol{F}_2$ a dostaneme dílčí výslednici $\boldsymbol{F}_2' = \boldsymbol{F}_1' + \boldsymbol{F}_2$, jejíž nositelka 2 musí procházet průsečíkem B nositelek 1 a p_2. Nakonec je třeba odečíst vloženou sílu $\boldsymbol{F}_0$, tedy připojit sílu $-\boldsymbol{F}_0$. Tak dostaneme výslednou sílu $\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}} = \boldsymbol{F}_2' - \boldsymbol{F}_0$, která ve vláknovém obrazci musí procházet průsečíkem C nositelek 0, 2. Bod P je význačným bodem silového obrazce; nazývá se *pól*. Celý postup lze formálně zjednodušit jak ukážeme na dalším příkladě.

Mějme soustavu čtyř sil v rovině podle obr. 17. Pomocné síly (vloženou nulovou soustavu sil $\boldsymbol{F}_0$, $-\boldsymbol{F}_0$ a dílčí výslednice) získáme spojením koncových bodů daných s vhodně voleným pólem P v silovém obrazci (označujeme je nyní již jen čísly) a směry těchto sil přenášíme do vláknového obrazce. Na konci postupu již nepřipojujeme sílu $-\boldsymbol{F}_0$, nýbrž použijeme nositelky 0 síly $\boldsymbol{F}_0$, která má stejný směr. Síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}}$ doplňuje příslušný $n+1$ úhelník. Její nositelka prochází průsečíkem nositelek 0, 4 ve vláknovém obrazci.



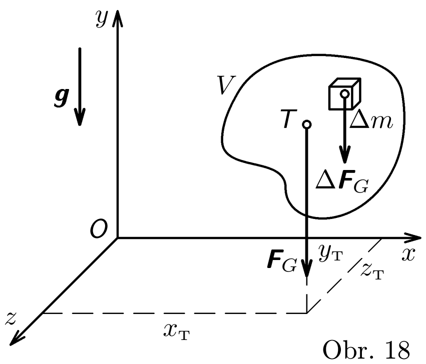
a)
$\boldsymbol{F}_1$
$\boldsymbol{F}_2$
$\boldsymbol{F}_3$
$\boldsymbol{F}_4$
$\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$
0
1
2
3
4
b)
$\boldsymbol{F}_1$
$\boldsymbol{F}_2$
$\boldsymbol{F}_3$
$\boldsymbol{F}_4$
$\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$
P
0
1
2
3
4

Obr. 17

2 Těžiště

2.1 Těžiště tuhého tělesa

Na jednotlivé hmotné elementy Δm tělesa působí v homogenním tíhovém poli Země síly, které jsou vzájemně rovnoběžné. Předpokládáme-li, že těleso je homogenní o hustotě ϱ, bude element tíhové síly $\Delta \boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{g}\Delta m = \boldsymbol{g}\varrho\Delta V$. Celková tíhová síla $\boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{g}m = \boldsymbol{g}\varrho V$ prochází význačným bodem, který se nazývá *těžiště* (tento bod přitom nemusí být součástí tělesa, jak je tomu např. u kruhového prstence).



Obr. 18

Polohu x_{T}, y_{T}, z_{T} těžiště tělesa na obr. 18 určíme podle pravidel pro skládání rovnoběžných sil, přičemž souřadnice x_{T}, z_{T} určíme tak, že tíhové pole necháme působit ve směru osy $-y$ a souřadnici y_{T} tak, že tíhové pole necháme působit ve směru osy x. Užijeme přitom Varignonovu větu, např. pro souřadnici x_{T} bude platit

$$\sum_{(V)} xg\varrho\Delta V = x_{\mathrm{T}} g\varrho V\,,$$

přičemž symbol $\sum\limits_{(V)}$ značí, že součet provádíme přes celý objem tělesa. Po krácení $g\varrho$ vypočteme x_{T}. Tak postupně dostaneme všechny souřadnice těžiště

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{1}{V}\sum_{(V)} x\Delta V, \quad y_{\mathrm{T}} = \frac{1}{V}\sum_{(V)} y\Delta V, \quad z_{\mathrm{T}} = \frac{1}{V}\sum_{(V)} z\Delta V\,. \tag{20}$$

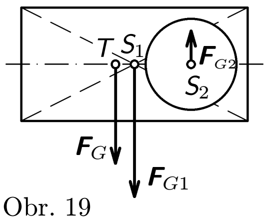
Výpočet podle těchto vzorců bude tím přesnější, čím menší elementy ΔV, které vyplňují celé těleso o objemu V, budeme volit. V limitě $\Delta V \to 0$ vede výpočet na integrování, což přesahuje rámec tohoto textu.

Má-li homogenní těleso rovinu nebo osu souměrnosti, leží těžiště v této rovině nebo na této ose. Má-li homogenní těleso střed souměrnosti, je jeho těžiště totožné s tímto středem. Poloha těžiště od podstavy některých homogenních těles na jejich ose v závislosti na výšce h těchto těles je uvedena v tab.I.

Tab. I.

válec, hranol	n–boký jehlan	kužel	polokoule
$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{3}{8}h = \frac{3}{8}r$

Je-li těleso sestaveno z několika dílčích těles, jejichž hmotnosti $\Delta m = \varrho\Delta V$ a souřadnice jejich těžišť známe, určíme těžiště tělesa užitím vzorců (20).



Obr. 19

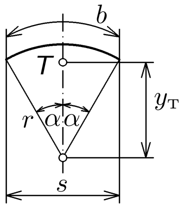
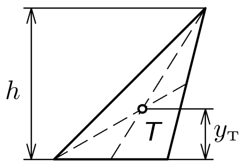
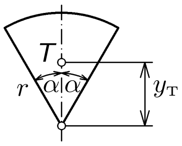
Je-li v tělese dutina nebo otvor, připojíme do těžiště této chybějící části tíhovou sílu opačného směru. Např. v hranolu na obr. 19 je asymetricky vytvořený válcový otvor. Do bodu S_2 tedy připojíme tíhovou sílu $\boldsymbol{F}_{G2}$ opačného směru než má tíhová síla $\boldsymbol{F}_{G1}$. Síla F_{G1} odpovídá celistvému hranolu, $\boldsymbol{F}_G = \boldsymbol{F}_{G1} - \boldsymbol{F}_{G2}$ hranolu s otvorem.

2.2 Těžiště plochy a čáry

Analogicky pojmu těžiště tělesa se zavádí pojem těžiště plochy a těžiště čáry.

Pro výpočet souřadnic *těžiště rovinné plochy* si představme homogenní ploché těleso o ploše základny S a konstantní tloušťce t. Po dosazení do prvních

Tab. II

Kruhový oblouk		$y_T = r\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = r\dfrac{b}{s}$
Půlkruhový oblouk	$\alpha = \pi/2\,,$ $b = \pi r\,,\ s = 2r$	$y_T = \dfrac{2r}{\pi}$
Trojúhelník		$y_T = \dfrac{h}{3}$
Kruhová výseč		$y_T = \dfrac{2r\sin\alpha}{3\alpha}$
Půlkruh	$\alpha = \pi/2$	$y_T = \dfrac{4r}{3\pi}$

dvou vztahů (20) za $V = tS, \Delta V = t\Delta S$ dostaneme

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{1}{S}\sum_{(S)} x\Delta S\,, \quad y_{\mathrm{T}} = \frac{1}{S}\sum_{(S)} y\Delta S\,. \tag{21}$$

Podobně pro výpočet souřadnic *těžiště rovinné čáry* si představme drát konstantního příčného průřezu S velmi malých rozměrů oproti délce l. Pak $V = Sl$, $\Delta V = S\Delta l$ a podle (20) dostaneme

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{1}{l}\sum_{(l)} x\Delta l\,, \quad y_{\mathrm{T}} = \frac{1}{l}\sum_{(l)} y\Delta l\,. \tag{22}$$

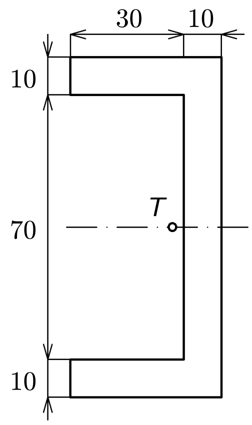
V limitě $\Delta S \to 0$ nebo $\Delta l \to 0$ přecházejí výrazy (21) a (22) opět na integrály. Výsledky řešení pro některé důležité čáry a plochy jsou uvedeny v tab. II.

Příklad 2

Vypočtěte souřadnice těžiště plochy na obr. 20.

Řešení:

Nejprve vhodně zvolíme soustavu souřadnic (viz obr. 21, 22). Plocha je symetrická podle osy x, proto počítáme jen souřadnici x_{T}, neboť $y_{\mathrm{T}} = 0$. Plochu lze rozložit na obdélníky. Je několik možností, zvolíme dvě.



Obr. 20

a) Plochu rozložíme na tři obdélníky (obr. 21).

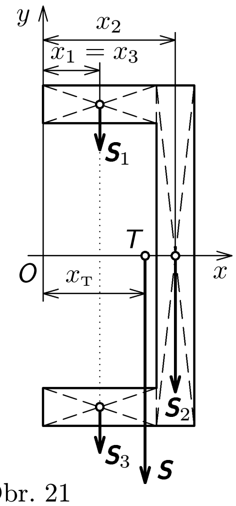
$$S_1 = S_3 = 300\ \mathrm{mm}^2,\ S_2 = 900\ \mathrm{mm}^2,\ S = 2S_1 + S_2 = 1500\ \mathrm{mm}^2,$$

$$x_1 = x_3 = 15\ \mathrm{mm}\,, \quad x_2 = 35\ \mathrm{mm}\,, \quad x_{\mathrm{T}} = \frac{2S_1x_1 + S_2x_2}{S} = 27\ \mathrm{mm}\,.$$

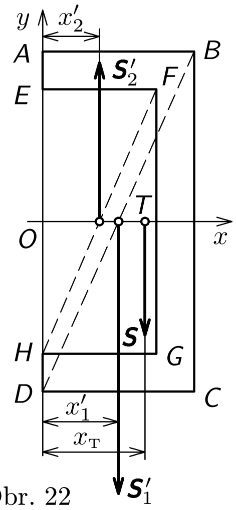
b) Plochu rozložíme na dva obdélníky (obr. 22): od obdélníku *ABCD* plochy S'_1 odečteme obdélník *EFGH* plochy S'_2. Platí

$$S'_1 = 3600\ \mathrm{mm}^2, \quad S'_2 = 2100\ \mathrm{mm}^2, \quad S = S'_1 - S'_2 = 1500\ \mathrm{mm}^2,$$

$$x'_1 = 20\ \mathrm{mm}\,, \quad x'_2 = 15\ \mathrm{mm}\,, \quad x_{\mathrm{T}} = \frac{S'_1x'_1 - S'_2x'_2}{S} = 27\ \mathrm{mm}\,.$$



Obr. 21



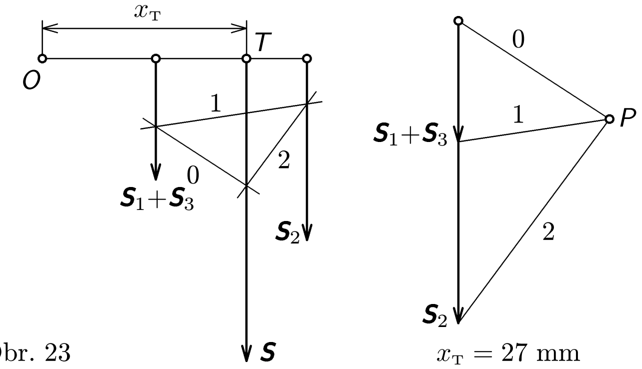
Obr. 22

2.3 Grafické určení těžiště

Protože při hledání souřadnic těžiště jde v podstatě o úlohu nalezení působiště výslednice soustavy rovnoběžných sil v prostoru nebo v rovině, lze pro řešení této úlohy použít grafických metod vypracovaných pro řešení těchto soustav. Pro řešení těžiště osově symetrických těles, plochých těles, ploch a čar lze použít grafického řešení, které je popsáno v článku 1.5. Ukážeme si to na dvou příkladech.

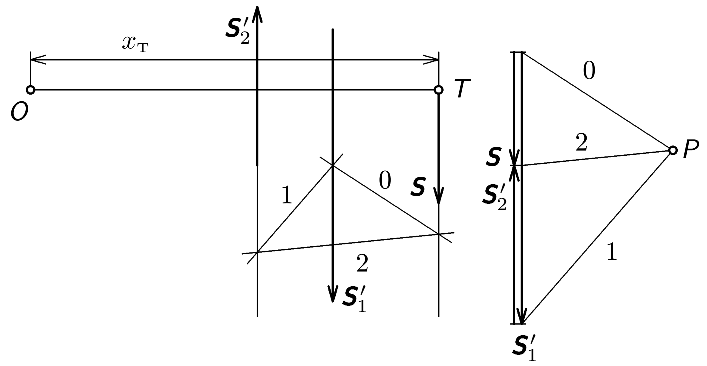
Příklad 3

Nalezněte souřadnici x_{T} těžiště plochy z příkladu 2 grafickou metodou, a to pro případy ad a), ad b) rozkladu plochy.



Obr. 23

$x_{\mathrm{T}} = 27$ mm



Obr. 24

$x_T = 27$ mm

Řešení:

Úlohu převedeme na skládání sil, jejichž velikost je úměrná velikosti příslušných ploch.

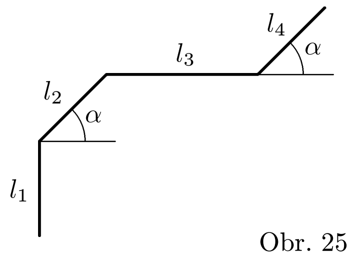
a) Obr. 23

b) Obr. 24

Řešení ad b) je méně přesné, protože se zde uplatňuje rozdíl sil. Proto bylo zvoleno větší měřítko pro délky.

Příklad 4

Určete grafickým řešením souřadnice těžiště lomené čáry podle obr. 25.

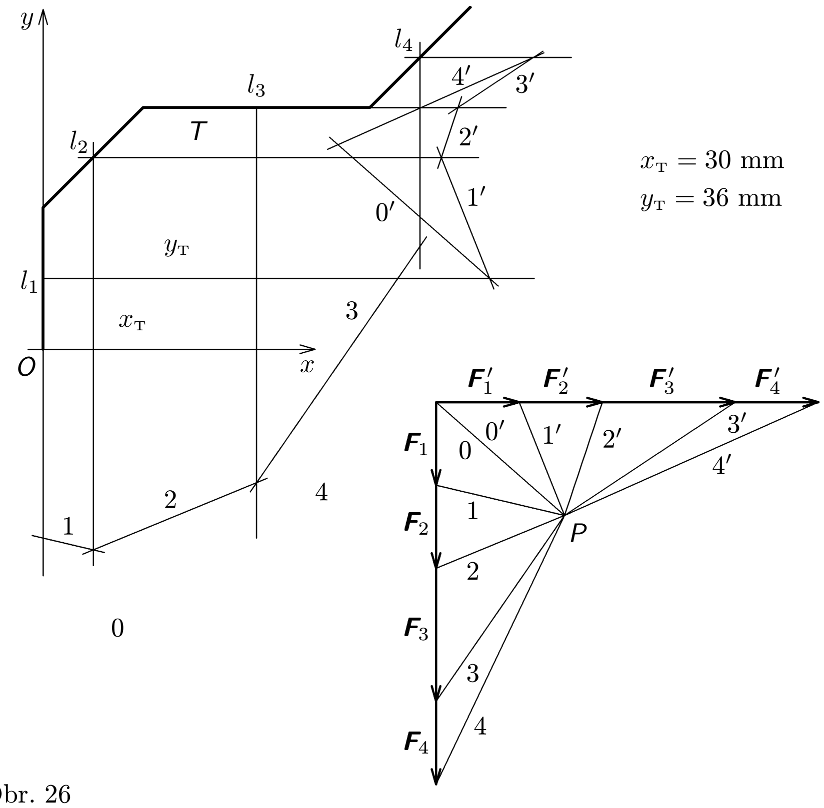


$$l_1 = l_2 = l_4 = 25 \text{ mm}\,,$$
$$l_3 = 40 \text{ mm}\,,$$
$$\alpha = 45^\circ$$

Obr. 25

Řešení:

Nejprve zvolíme soustavu souřadnic (obr. 26). Velikost tíhových sil bude úměrná délkám úseček, jejich působiště bude ve středu úseček. Směr těchto sil bude pro souřadnici x_T v záporném směru osy y, pro y_T ve směru osy x. Silové obrazce spojíme do jednoho obrazce se společným pólem P (viz obr. 26).



$x_{\mathrm{T}} = 30$ mm
$y_{\mathrm{T}} = 36$ mm

Obr. 26

3 Rovnováha a uložení tělesa v rovině

3.1 Podmínky rovnováhy tělesa

Věnujme nejprve pozornost případu tuhého tělesa, které se nachází v inerciální vztažné soustavě a na nějž působí obecná prostorová soustava sil (obecně sil vzájemně mimoběžných). Aby toto těleso bylo v rovnováze, aby tedy existovala vztažná soustava, v níž se nebude pohybovat — ani posouvat, ani otáčet, *musí být výslednice sil působících na těleso nulová a musí být nulová i výslednice momentů sil*. Musí tedy platit

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{F}_j = \boldsymbol{0}\,, \tag{23}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{M}_j = \boldsymbol{0}\,. \tag{24}$$

Tyto dvě vektorové rovnice reprezentují *šest složkových rovnic*. Volné těleso, jak víme z Úvodu, má šest stupňů volnosti a splnění každé z těchto složkových rovnic odebírá tělesu jeden stupeň volnosti. Těleso, které se ve vztažné soustavě nepohybuje, má nula stupňů volnosti.

V této stati, která je jen úvodem do statiky, bude účelné zabývat se pouze řešením případu *rovnováhy tuhého tělesa v rovině*. Pak se v případě obecné soustavy sil v rovině redukuje rovnice (23) na dvě složkové rovnice a rovnice (24) na jednu složkovou rovnici. Budou-li síly působit v rovině $z = 0$, budou mít složkové rovnice rovnováhy tvar

$$\sum_{j=1}^{n} F_{xj} = 0\,, \quad \sum_{j=1}^{n} F_{yj} = 0\,, \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{n} M_{zj} = 0\,. \tag{26}$$

Jde tedy o tři rovnice, které odpovídají tomu, že volné těleso má v rovině tři stupně volnosti. Splnění každé z rovnic (25), (26) odebírá tělesu jeden stupeň volnosti.

Bude-li na těleso působit *jen soustava různoběžných sil*, tedy soustava sil se společným působištěm, bude rovnováhy tělesa dosaženo při splnění podmínek (23), resp. (25). Pro dosažení rovnováhy tělesa zde proto postačí, aby *silový obrazec byl uzavřený*, neboli, aby *výslednice sil byla nulová*. U obecné soustavy sil je to podmínka pouze nutná.

Bude-li na těleso působit jen soustava momentů sil, vyvolaných např. soustavou silových dvojic, pak postačí pro rovnováhu tělesa jen splnění podmínky (24), resp. (26). Pro obecnou soustavu sil je to opět jen podmínka nutná.

Současné splnění obou podmínek (23), (24), resp. (25), (26), dává *podmínku nutnou a postačující* pro případ působení obecné soustavy sil na tuhé těleso.

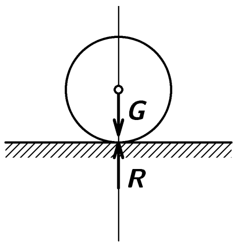
Rovnováhy tuhého tělesa bude dosaženo v těchto dvou případech:

1. Pro dané síly (často označované jako „vtištěné“ síly) obecně působící na těleso budou splněny podmínky (23), (24), neboli výslednice daných sil a jejich momentů bude nulová.

2. Nebudou-li výslednice daných sil a jejich momentů nulové, je nutné tuhé těleso *vhodně uložit* (viz. odst. 3.3). Pak vzniknou v uložení *reakce*, které doplní soustavu daných sil a momentů sil tak, že podmínky (23), (24) budou splněny.

3.2 Některé nutné podmínky rovnováhy sil

a) **Rovnováha dvou sil**



Obr. 27

Dvě síly budou v rovnováze, jen když budou ležet na téže nositelce. Aby to byla podmínka nutná i postačující, musí být tyto síly také stejně velké a vzájemně opačného směru.

Např. volná kulička v tíhovém poli nebude v rovnováze, působením tíhové síly bude padat. Abychom ji uvedli do rovnováhy při zachování působení dané síly $\boldsymbol{G}$, položíme ji na vodorovnou podložku. Ta začne na kuličku působit ve směru svislice silou — reakcí $\boldsymbol{R} = -\boldsymbol{G}$, která ji uvede do rovnováhy (obr. 27).

b) **Rovnováha tří sil v rovině**

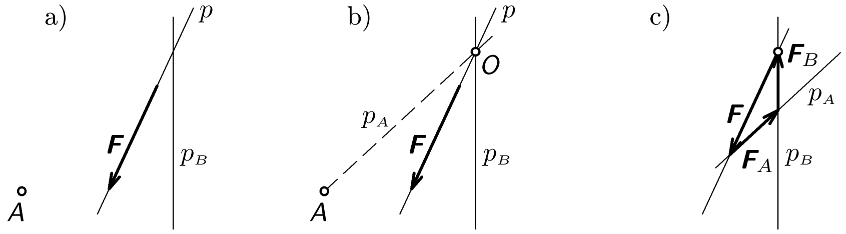
Nutnou podmínkou pro rovnováhu tří různoběžných sil působících v rovině je, *aby tyto síly procházely jedním bodem.* Tato věta má velkou důležitost pro statiku rovinných soustav, jak uvidíme v dalších příkladech a úlohách.

Příklad 5

Danou sílu $\boldsymbol{F}$, která leží na nositelce p, uveďte do rovnováhy dvěma silami, přičemž o jedné víte, že leží na přímce p_B, která je různoběžná s přímkou p a druhá prochází bodem A, který leží v rovině určené přímkami p, p_B. Příklad je konkretizován na obr. 28a.

Řešení

Užijeme větu o třech silách — síly musí procházet průsečíkem O přímek p, p_B (obr. 28b). Tím je dán směr síly F_A — přímka p_A, která je spojnicí bodů A, O. Ze silového obrazce na obr. 28c určíme velikost sil $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$. Silový obrazec je uzavřen — jde o síly v rovnováze.



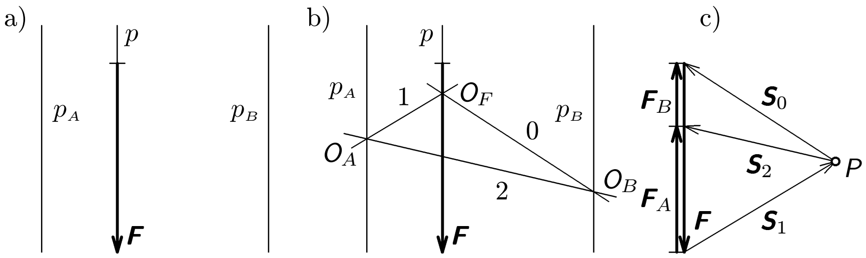
Obr. 28

Příklad 6

Danou sílu $\boldsymbol{F}$, která leží na nositelce p, uveďte do rovnováhy dvěma rovnoběžnými silami $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$, které působí na daných různých přímkách p_A, p_B, přičemž přímky p, p_A, p_B jsou vzájemně rovnoběžné a leží v téže rovině. Situace je konkretizována na obr. 29a.

Řešení

Protože síly $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$ se protínají v nekonečnu, není možné přímo použít větu o třech silách. Sílu $\boldsymbol{F}$ uvedeme do rovnováhy dvěma pomocnými silami $\boldsymbol{S}_0$, $\boldsymbol{S}_1$ podstatně odlišného směru (vhodnou volbou pólu P). Situace je znázorněna na obr. 29b, c a řeší se postupem reciprokým postupu, který byl popsán v čl. 1.6. Ve vláknovém obrazci (obr. 29b) nakreslíme nositelky 0, 1 sil $\boldsymbol{S}_0$, $\boldsymbol{S}_1$ tak, aby se protínaly na nositelce p (síly $\boldsymbol{S}_0$, $\boldsymbol{S}_1$, $\boldsymbol{F}$ jsou v rovnováze — procházejí bodem O_F).



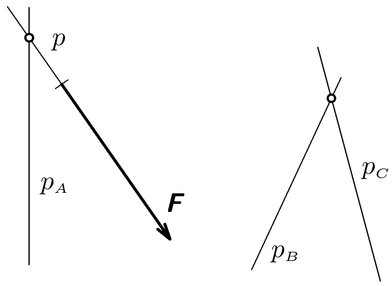
Obr. 29

Nositelka p_A neznámé síly $\boldsymbol{F}_A$ musí procházet bodem O_A, podobně nositelka p_B neznámé síly $\boldsymbol{F}_B$ musí procházet bodem O_B. Vláknový obrazec uzavřeme přímkou 2, která je spojnicí bodů O_A, O_B a udává směr třetí pomocné síly $\boldsymbol{S}_2$. Nyní ve složkovém obrazci (obr. 29c) rozložíme sílu $\boldsymbol{S}_0$ na sílu $\boldsymbol{S}_2$ a hledanou sílu $\boldsymbol{F}_B$. Výslednice pomocných sil $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$ pak dává velikost druhé neznámé síly $\boldsymbol{F}_A$. Tím je úloha vyřešena.

Podobně budeme řešit i problém popsaný v příkladě 5, jestliže průsečík O přímek p, p_B bude mimo list papíru.

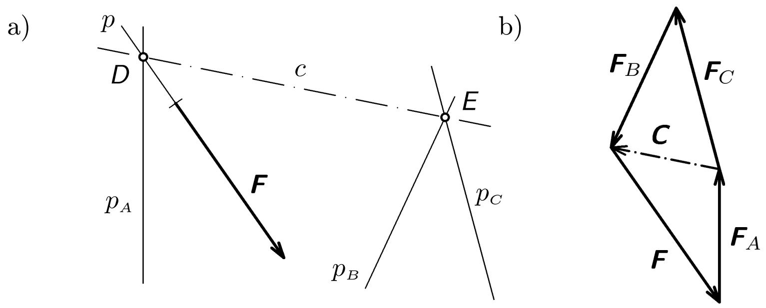
Příklad 7

Danou sílu $\boldsymbol{F}$ na nositelce p uveďte do rovnováhy třemi silami $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{F}_B$, $\boldsymbol{F}_C$, které leží na daných různoběžkách p_A, p_B, p_C bez společného průsečíku, přičemž všechny přímky p, p_A, p_B, p_C leží v jedné rovině. Situace je konkretizována na obr. 30.



Obr. 30

Řešení

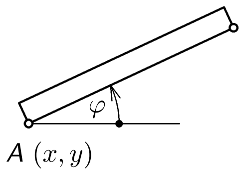


Obr. 31

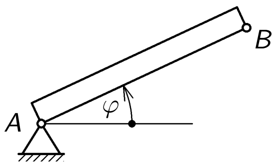
Jde o rovnováhu čtyř sil, kterou převedeme prostřednictvím pomocné Culmannovy síly na rovnováhu dvou trojic sil, tedy na řešení známého problému. Culmannova síla $\boldsymbol{C}$ má směr Culmannovy přímky c, která je spojnicí průsečíků D, E (obr. 31a). Ve složkovém obrazci (obr. 31b) nejprve uvedeme do rovnováhy sílu $\boldsymbol{F}$ silami $\boldsymbol{F}_A$, $\boldsymbol{C}$ a pak rozložíme sílu $\boldsymbol{C}$ na hledané síly $\boldsymbol{F}_B$, $\boldsymbol{F}_C$, které mají společné působiště v bodě E.

3.3 Uložení tělesa v rovině

Volné těleso v prostoru má šest stupňů volnosti, *volné těleso v rovině má tři stupně volnosti*. Poloha tělesa v rovině je jednoznačně určena polohou úsečky, která leží v této rovině (např. polohou úsečky AB na obr. 32). K tomu je zapotřebí tří souřadnic, např. x, y, φ.

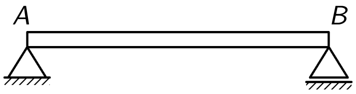


Obr. 32

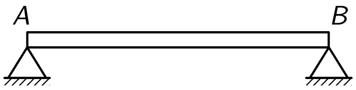


Obr. 33

Pohyblivost volného tělesa můžeme snížit zavedením *vazby*. Zamezíme-li pohybu bodu A (obr. 33), odebereme tělesu v rovině dva stupně volnosti. Těleso bude mít jeden stupeň volnosti — jeho pohyblivost bude popsána změnou jediné souřadnice φ. Pohybu bodu A zamezíme *pevnou podporou* (obr. 33). Zbývající jeden stupeň volnosti odebereme *posuvnou podporou* v bodě B (obr. 34), která zamezí rotaci tělesa kolem bodu A. Pokud bychom v bodě B použili pevnou podporu jako v bodě A, byla by soustava již *staticky neurčitá* (měla by $3 - 2 \cdot 2 = -1$ stupňů volnosti) — viz obr. 35. Takovou soustavu již nelze řešit jen užitím zákonů statiky. Pokud se tato podpora u skutečného tělesa použije, musí se řešení doplnit užitím zákonů pružnosti a pevnosti. Pokud bychom vložili mezi body A, B v obr. 35 ještě podporu posuvnou, byla by soustava již dvakrát staticky neurčitá.

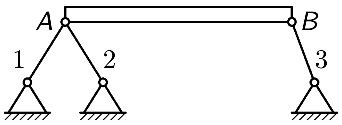


Obr. 34

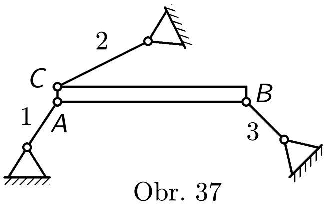


Obr. 35

Pevnou podporu v rovině můžeme realizovat rovněž připojením dvou tuhých prutů do jednoho bodu tělesa, např. v bodě A na obr. 36. Jeden připo-

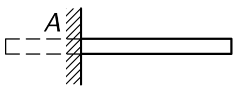


Obr. 36



Obr. 37

jený prut odebere jeden stupeň volnosti — např. v bodě B na obr. 36. Trojnásobné využití této vazby je na obr. 37. O tření v uložení na obr. 33 až 37 se ve statice neuvažuje.



Obr. 38

Existuje ještě vazba, která lokálně odebírá tuhému tělesu všechny stupně volnosti. Je to *vetknutí* (obr. 38). Tuhému tělesu v rovině odebírá tedy tři stupně volnosti, tělesu konajícímu prostorový pohyb odebere šest stupňů volnosti.

3.4 Princip uvolnění z vazby, určování reakcí

Řešení rovnováhy vázaného tělesa (neboli tělesa podrobeného vazbám) převádíme na řešení rovnováhy volného tělesa tím, že je uvolníme z vazby, tj. odstraníme vazby a jejich účinek nahradíme působením pasivních sil, tzv. *reakcí* (nazývají se rovněž *vazbové síly*). Popsaný postup je vyjádřením *principu uvolnění z vazby*.

Reakce se zpravidla označují symbolem $\boldsymbol{R}$. Tyto síly vstupují do podmínek rovnováhy (25), (26) společně s danými silami. Ještě je třeba vědět, jaký směr budou mít reakce u jednotlivých druhů podpor.

1. *Podporu pevnou* (A v obr. 34) nahradíme reakcí $\boldsymbol{R}_A$, která může mít v rovině libovolný směr. Má tedy dvě složky $\boldsymbol{R}_{Ax}$, $\boldsymbol{R}_{Ay}$ (dvě neznámé).

2. *Podporu prutovou* (1, 2, 3 na obr. 36, 37) nahradíme reakcí $\boldsymbol{R}$, která má směr prutu (jedna neznámá — velikost).

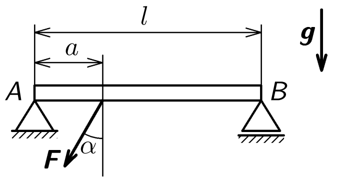
3. *Podporu posuvnou* (B v obr. 34) nahradíme reakcí $\boldsymbol{R}_B$, která má směr *kolmý* na možný směr posuvu tělesa na podpoře (jedna neznámá — velikost).

4. *Vetknutí* (A v obr. 38) v rovinné úloze nahradíme reakcí $\boldsymbol{R}_A$, která může mít v rovině libovolný směr (má dvě složky $\boldsymbol{R}_{Ax}$, $\boldsymbol{R}_{Ay}$) a reakčním momentem $\boldsymbol{M}_R$, který je kolmý k uvažované rovině (celkem tři neznámé).

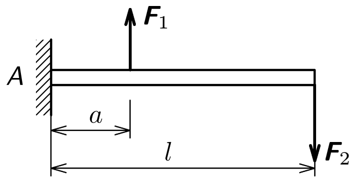
Uplatnění popsaného postupu početního řešení si ukážeme na následujícím příkladě. V dalším příkladě bude užito grafické řešení rovnováhy.

Příklad 8

Určete reakce pro homogenní tuhé nosníky zatížené silami a uložené podle obr. 39 a 40. Nosníky se nacházejí v homogenním tíhovém poli, hmotnost každého z nich je m. Podle zvyklostí volte kladný směr sil dolů.



Obr. 39

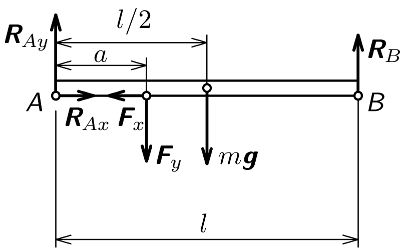


Obr. 40

Řešení

Nosníky nejprve uvolníme z vazby, připojíme reakce a napíšeme podmínky podle (25) a (26). Za momentový bod budeme v obou případech volit bod A. Ve středu nosníků působí tíhová síla $m\boldsymbol{g}$.

a) Nosník z obr. 39.



$$F_x = F \sin\alpha \,,$$
$$F_y = F \cos\alpha$$

Obr. 41

Rovnice rovnováhy:

$$R_{Ax} - F_x = 0 \,,$$
$$-R_{Ay} + F_y + mg - R_B = 0 \,,$$
$$aF_y + \frac{l}{2} mg - lR_B = 0 \,.$$

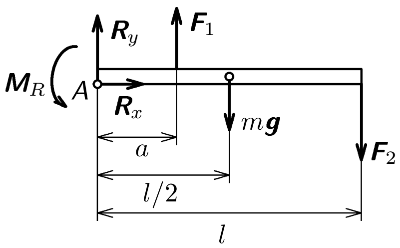
Řešením dostaneme velikost složek reakcí

$$R_{Ax} = F \sin\alpha\,,$$

$$R_B = \frac{aF\cos\alpha}{l} + \frac{mg}{2}\,,$$

$$R_{Ay} = F\cos\alpha - \frac{aF\cos\alpha}{l} + \frac{mg}{2}\,.$$

b) Nosník (krakorec) z obr. 40.



Obr. 42

Rovnice rovnováhy:

$$R_x = 0\,,$$

$$-R_y - F_1 + mg + F_2 = 0\,,$$

$$-M_R - aF_1 + \frac{l}{2}mg + lF_2 = 0\,.$$

Řešením

$$R_x = 0\,,$$

$$R_y = F_2 - F_1 + mg\,,$$

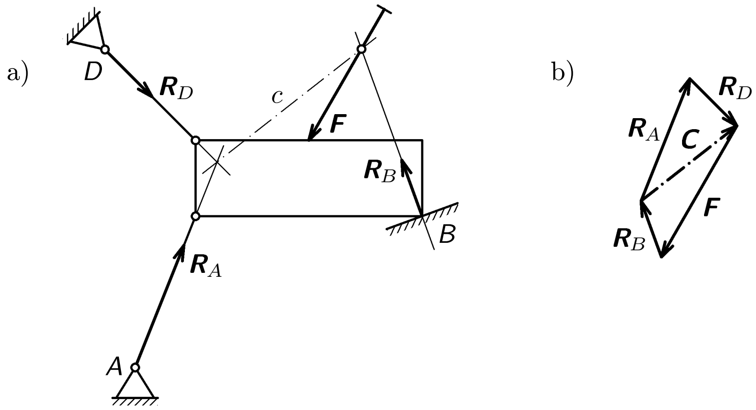
$$M_R = -aF_1 + \frac{mgl}{2} + lF_2\,.$$

Příklad 9

Je dáno těleso zleva uchycené dvěmi prutovými podporami a zprava kluzně podepřené podle obr. 43a. Pro danou sílu $\boldsymbol{F}$ graficky určete příslušné reakce.

Řešení

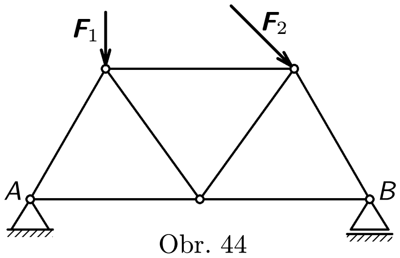
Jde o úlohu rozložit danou sílu $\boldsymbol{F}$ na tři síly (reakce) daných směrů, přičemž směr nositelky $\boldsymbol{R}_B$ je kolmý k podložce B. Řešení provedeme prostřednictvím Culmannovy síly $\boldsymbol{C}$ (viz příklad 7).


a)
D
$\boldsymbol{R}_D$
c
$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{R}_B$
B
$\boldsymbol{R}_A$
A
b)
$\boldsymbol{R}_D$
$\boldsymbol{R}_A$
$\boldsymbol{C}$
$\boldsymbol{F}$
$\boldsymbol{R}_B$

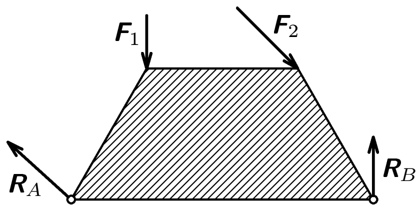
Obr. 43

4 Řešení rovinných prutových soustav

Jako důležitou technickou aplikaci dosud probraných poznatků naznačíme nyní statické řešení *prutových soustav*, tj. soustav složených z jednotlivých prutů, se kterými se setkáváme např. u mostů, jeřábů, stožárů, střešních vazniků, u lešení apod. Pro jednoduchost se budeme zabývat jen rovinnými soustavami. Jednotlivé pruty soustavy se protínají v místech, která se nazazývají *styčníky*. Ve styčnicích jsou pruty zpravidla spojeny prostřednictvím styčníkových plechů, na které jsou pruty přinýtovány nebo přivařeny, případně jsou zde spojeny klouby. Pro statické řešení budeme *prutovou soustavu* definovat jako *soustavu složenou z tuhých prutů zanedbatelné hmotnosti, které jsou navzájem spolu spojeny ideálními klouby* (v nichž není tření) *ve styčnicích* (obr. 44).



Obr. 44



Obr. 45

Při řešení prutové soustavy musí být splněny tyto podmínky:

1. Prutová soustava musí být dokonale tuhá, tj. pruty musí tvořit staticky určité obrazce, jimiž jsou trojúhelníky (obr. 44).

2. Vnější dané síly působí jen ve styčnicích (obr. 44).

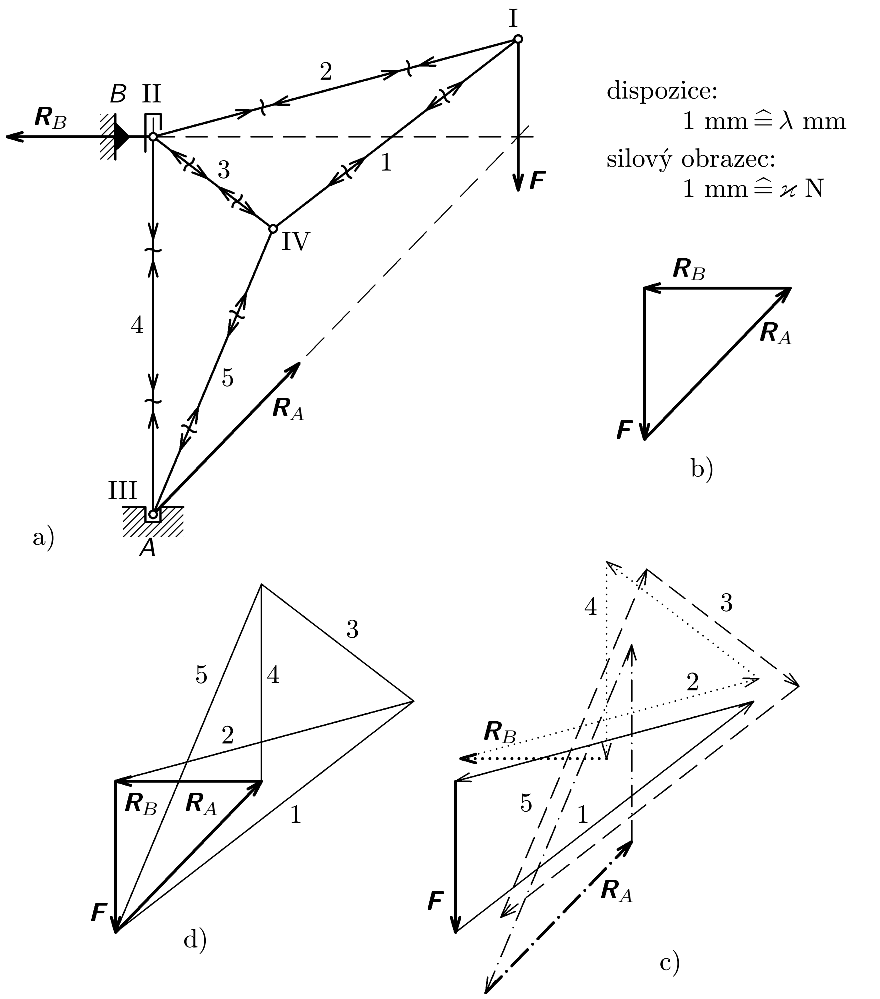
3. V jednotlivých prutech působí jen vnitřní síly; tj. na uvolněných prutech musí být rovnováha sil. Protože vnější síly působí jen ve styčnicích, leží nositelky sil, které pruty přenášejí, v ose prutů. Vnitřní síly namáhají pruty buď na tah nebo na tlak.

4. Vůči vnějším silám se prutová soustava chová jako tuhé těleso (obr. 45). Reakce proto určujeme jako u nosníků (viz čl. 3.4).

Grafický způsob řešení, který je za uvedených předpokladů velmi jednoduchý, si ukážeme na příkladech.

Máme např. určit síly v prutech konzolového jeřábu (obr. 46a) zatíženého ve styčníku I. silou $\boldsymbol{F}$ a uloženého ve styčnicích II. a III. Nejprve je nutné zvolit měřítko dispozice, tj. měřítko nákresu jeřábu tak, že 1 mm nákresu odpovídá λ mm ve skutečnosti a dále měřítko sil tak, že 1 mm silového obrazce odpovídá

$\varkappa$ newtonů (N). Při řešení nejprve určíme známým postupem reakce $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$ (obr. 46 a,b).



Obr. 46

Základní myšlenkou řešení vnitřních sil v prutech je, že *musí být v rovnováze síly působící na každý jednotlivý styčník*. Přitom si uvědomíme, že nositelky sil v prutech leží na osách prutů a že ve styčnicích se protínají v jednom bodě. Pro každý styčník lze tedy určit dvě neznámé síly v prutech. Z požadavku, že silový obrazec musí být uzavřen, dostaneme grafické řešení všude tam, kde ve styčníku nepůsobí více než dvě prutové síly.

V našem případě lze tudíž začít styčníkem I nebo III. Vyjdeme ze styčníku I a nakreslíme příslušný silový trojúhelník (plně vytažený trojúhelník v obr. 46c). *Při kreslení silového obrazce zásadně připojujeme síly za sebou v takovém pořadí, v jakém následují za sebou při oběhu kolem styčníku.* Oběh volíme např. ve směru chodu ručiček na hodinách.

Tak máme vyřešen styčník I. Síly 1 a 2 na obr. 46c jsou síly, kterými působí pruty 1 a 2 na styčník, aby jej uvedly do rovnováhy. Naopak styčník působí podle principu vzájemného působení na pruty silami opačného směru (obr. 46a). Prut 1 je tedy namáhán na tlak (budeme definovat, že síla má zápornou hodnotu), prut 2 je namáhán na tah (budeme definovat, že síla má kladnou hodnotu). Do dispozice (obr. 46a) nakreslíme šipky příslušných sil.

Nyní můžeme postoupit do styčníku II. nebo IV. Zvolme styčník II., kde sílu v prutu 2 již známe. Nakreslíme silový obrazec (tečkovaný v obr. 46c) a vyznačíme směry sil v dispozici. Nyní postoupíme do styčníku III. (čerchovaný silový obrazec). Silový obrazec pro styčník IV. (čárkovaný) kreslíme jen pro kontrolu, protože síly jsou již určeny z rovnováhy ostatních styčníků.

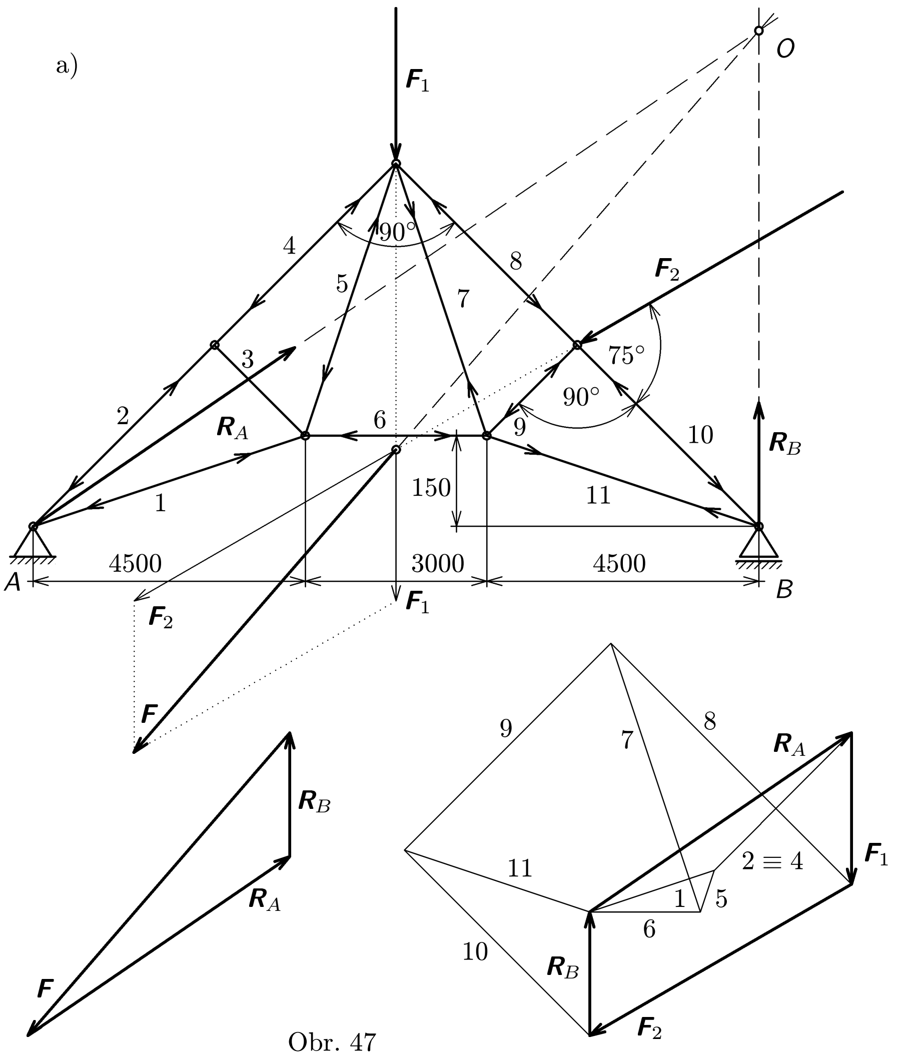
Jak si můžeme všimnout, není nutné při kreslení silových obrazců síly v prutech překreslovat, ale lze nakreslit jediný obrazec (obr. 46d), kterému se říká *Cremonův silový obrazec*. Směry vnitřních sil, tj. sil v prutech, se do tohoto obrazce nevyznačují, ale kreslí se přímo do dispozice. Při praktickém řešení se v dispozici nevyznačují dvojice šipek směrů vnitřních sil, jak je tomu v obr. 46a. *Vyznačují se jen směry vnitřních sil, kterými působí prut na styčník.* Tak již je to provedeno v řešení následujícího příkladu 10 a v řešení úlohy 21.

Příklad 10

Grafickou metodou určete reakce $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$ a síly v prutech prutové soustavy z obr. 47a. Jsou dány velikosti sil $F_1 = 12{,}5$ kN, $F_2 = 25{,}0$ kN a jejich směr.

Řešení

Nejprve graficky určíme reakce $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_B$ na výslednou vnější sílu $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$. Poté budeme postupně určovat síly v prutech Cremonovým silovým obrazcem. Můžeme postupovat buď od styčníku v podpoře A, nebo od styčníku v podpoře B. Výsledky řešení jsou uvedeny v tabulce, přičemž tahové zatížení prutu je označeno znaménkem + a tlakové zatížení znaménkem −. Zajímavé je, že pro dané vnější síly není prut 3 zatížen (nemusel by tam tudíž ani být).



Obr. 47

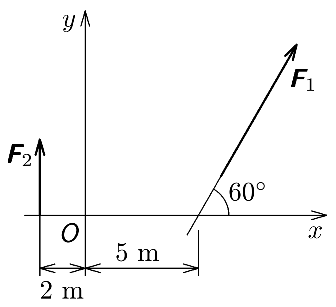
dáno: $F_1 = 12,5$ kN , $F_2 = 25,0$ kN
řešením – reakce: $R_A = 26,5$ kN , $R_B = 10,0$ kN

dispozice:
1 mm $\widehat{=}$ 125 mm
silový obrazec:
1 mm $\widehat{=}$ 625 N

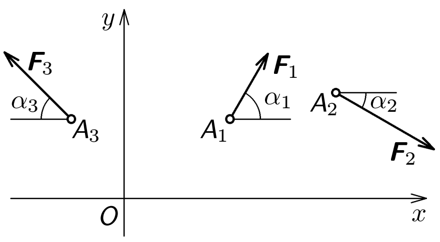
prut	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F/kN	-10,7	-15,8	0	-15,8	-3,5	-9,2	+24,2	-29,0	-24,3	-22,5	+16,8

5 Úlohy

1. Je dána soustava sil podle obr. 48, kde $F_1 = 200$ N, $F_2 = 100$ N. Vypočtěte moment sil vzhledem k počátku O vztažné soustavy. Grafickou metodou určete výslednici sil a výpočtem ověřte platnost Varignonovy věty pro daný příklad.



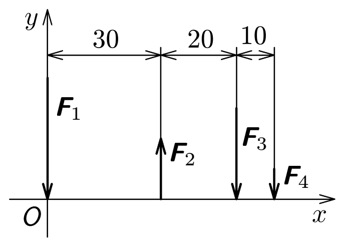
Obr. 48



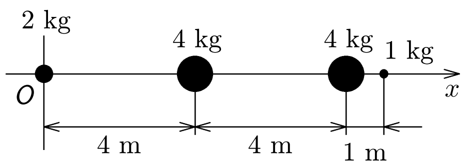
Obr. 49

2. Je dána rovinná soustava sil podle obr. 49, kde $F_1 = 20$ N, $F_2 = 30$ N, $F_3 = 25$ N, $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 30°$, $\alpha_3 = 45°$ a působiště mají souřadnice A_1 (2,0; 1,5) m, A_2 (4,0; 2,0) m, A_3 (−1,0; 1,5) m. Početní metodou určete velikost a směr výslednice. Stanovte rovněž polohu bodu, v němž její nositelka protíná osu x.

3. Je dána rovinná soustava podle obr. 50, kde $F_1 = 4F_4$, $F_2 = 2F_4$, $F_3 = 3F_4$ a $F_4 = 10$ N. Grafickou metodou určete velikost výslednice a polohu její nositelky.



Obr. 50

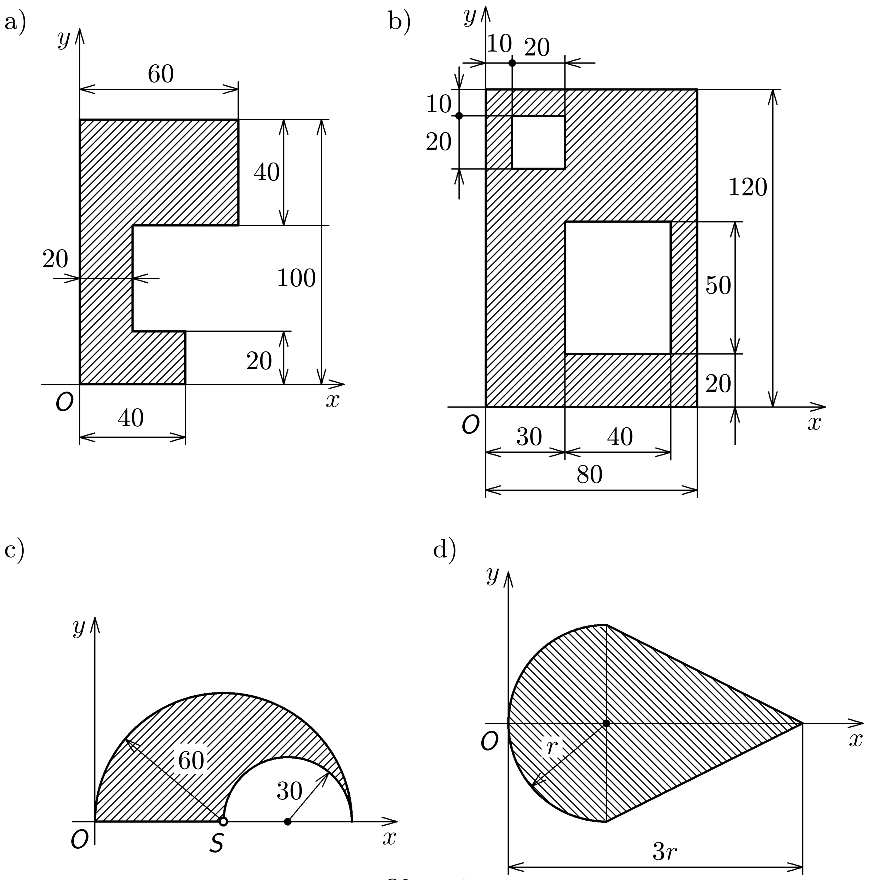


Obr. 51

4. Určete polohu těžiště diskrétní soustavy hmotných bodů ležících na ose x

podle obr. 51.

5. Určete polohu těžiště rovinných obrazců znázorněných na obr. 52 a, b, c, d.



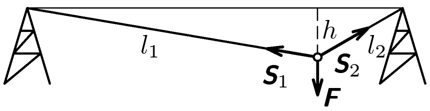
Obr. 52

6. Vypočtěte polohu těžiště čáry z příkladu 4.

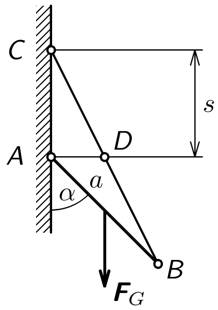
7. Ověřte výsledek pro polohu těžiště půlkruhu z tab. II. proužkovou metodou. Plochu půlkruhu přitom rozdělte na šest proužků stejné šířky a řešte graficky i početně.

8. Ověřte výpočtem výsledek pro polohu těžiště homogenního kužele a homogenní polokoule z tab. I. Užijte metody dělení daného tělesa tak, že jeho výšku rozdělíte na n stejných dílků. Volte $n = 4$ a $n = 8$ a porovnejte přesnost řešení. Výsledek v tab. I. platí pro limitní případ $n \to \infty$.

9. Určete grafickým řešením a výpočtem síly $\boldsymbol{S}_1$ a $\boldsymbol{S}_2$ v obou částech lana, které nese sedačku lanové dráhy podle obr. 53. Je dáno: $F = 10$ kN, $l_1 = 3$ m, $l_2 = 1$ m, $h = 0{,}5$ m.



Obr. 53

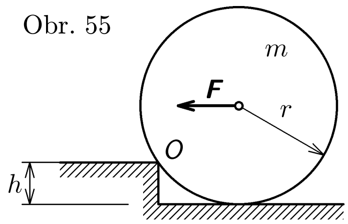


Obr. 54

10. Homogenní tyč AB je podle obr. 54 jedním koncem opřena o dokonale hladkou stěnu a druhým koncem zavěšena na laně BC. Vypočtěte jaká vzdálenost $|AC| = s$ přísluší rovnovážné poloze soustavy. Určete rovněž sílu $\boldsymbol{S}$ v laně a reakci $\boldsymbol{R}$ stěny v bodě A. Je dáno: délka tyče $|AB| = a = 4$ m, $\alpha = 45°$, $F_G = 100$ N.

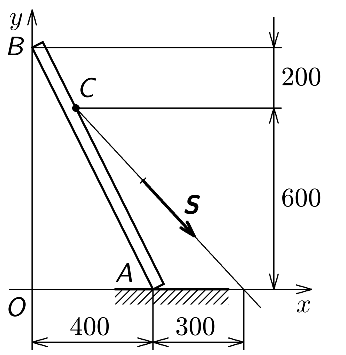
11. Jakou sílu musíme vyvinout, abychom překulili válec o hmotnosti m a o poloměru r přes překážku výšku h $(h < r)$ podle obr. 55.

Obr. 55

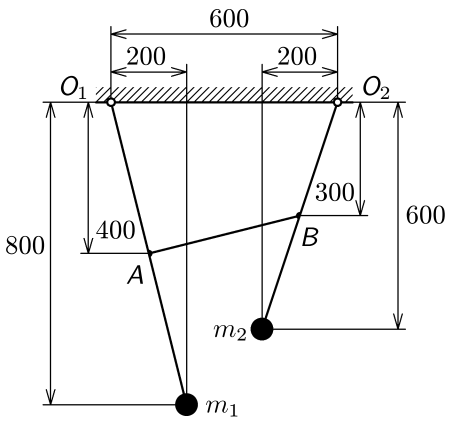


12. Jakou silou $\boldsymbol{S}$ musíme táhnout za lano, abychom v tíhovém poli udrželi rovnováhu přímé homogenní tyče zanedbatelné tloušťky o hmotnosti $m = 20$ kg opřené spodním koncem A o drsnou podlahu podle obr. 56. Řešte graficky. Zkontrolujte zda nedojde k prokluzu tyče, je-li součinitel smykového tření $f = 0{,}4$.

13. Mějme soustavu dvou spřažených kyvadel, která se v tíhovém poli nacházejí v rovnovážné poloze podle obr. 57. Bodová hmotnost m_1 je neznámá, $m_2 = 5$ kg, hmotnost ramen a hmotnost vlákna je zanedbatelná. Určete hmotnost m_1 a sílu $\boldsymbol{S}$ napínající v rovnovážné poloze vlákno uchycené v bodech A, B kyvadel.

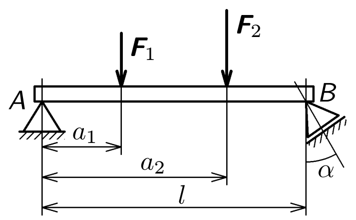


Obr. 56

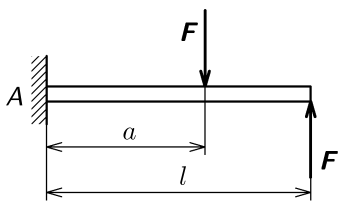


Obr. 57

14. Vypočtěte reakce tuhých nosníků zanedbatelné hmotnosti a zatížené obecně zadanými silami podle obr. 58 a 59.



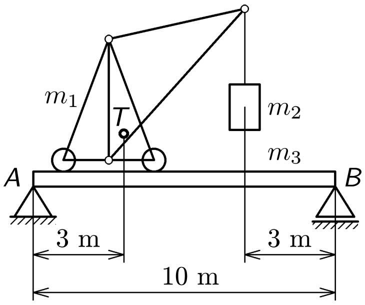
Obr. 58



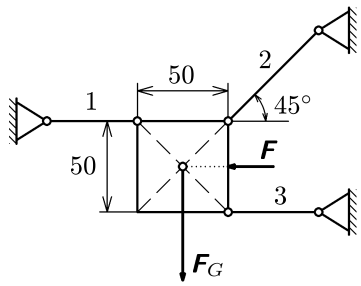
Obr. 59

15. Určete reakce homogenního nosníku–jeřábové dráhy–nesoucí jeřáb o hmotnosti $m_1 = 4000$ kg se zavěšeným břemenem o hmotnosti $m_2 = 2000$ kg (obr. 60). Poloha těžiště T nezatíženého jeřábu je vyznačena. Hmotnost jeřábové dráhy $m_3 = 2000$ kg. Pro jednoduchost uvažujte $g = 10\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

16. Určete reakce v prutech 1, 2, 3 soustavy podle obr. 61. Je dáno $F = 200$ N, $F_G = 500$ N.

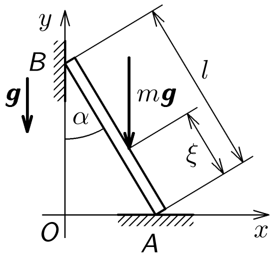


Obr. 60



Obr. 61

17.



Obr. 62

Člověk o hmotnosti m vystupuje po žebříku (uvažujte, že se žebříku dotýká bodově). Žebřík v bodě A stojí na vodorovné drsné podložce, s níž má koeficient smykového tření f a v bodě B se dotýká svislé dokonale hladké stěny, s níž svírá úhel α (obr. 62). Žebřík má délku l a zanedbatelnou hmotnost. Určete reakce v bodech A, B pro případ obecné polohy člověka ve vzdálenosti ξ od bodu A. Jaká podmínka musí platit pro součinitel f, aby nedošlo k prokluzu žebříku po podlaze v žádné poloze člověka?

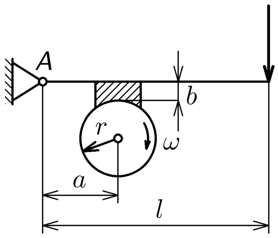
18. Na obr. 63 je znázorněna brzda k měření výkonu motoru. Síla $\boldsymbol{F}$ působí prostřednictvím páky a špalíku na buben o poloměru r, který se otáčí úhlovou rychlostí ω. Koeficient smykového tření mezi bubnem a špalíkem je f. Vypočtěte reakci v bodě A a výkon P motoru.

19. Na obr. 64 je schéma zatěžovacího zařízení. Graficky určete síly $\boldsymbol{S}_1$ až $\boldsymbol{S}_7$ v prutech a síly, kterými je stlačována krychle při dané vnější síle o velikosti $F = 50$ kN.

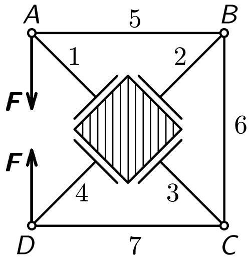
20. Je dán příhradový nosník podle obr. 65 zatížený ve styčníku II. silou o velikosti $F = 80$ kN. Grafickým postupem určete:

a) Reakce v podporách A, B.

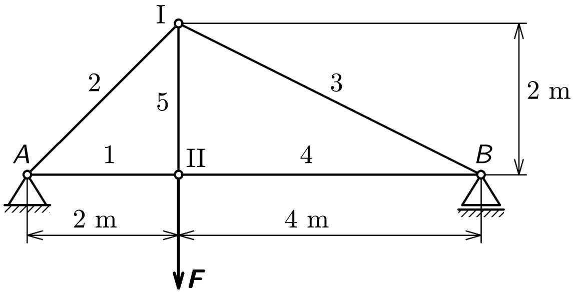
b) Velikost a směr sil v prutech 1 až 5.



Obr. 63



Obr. 64

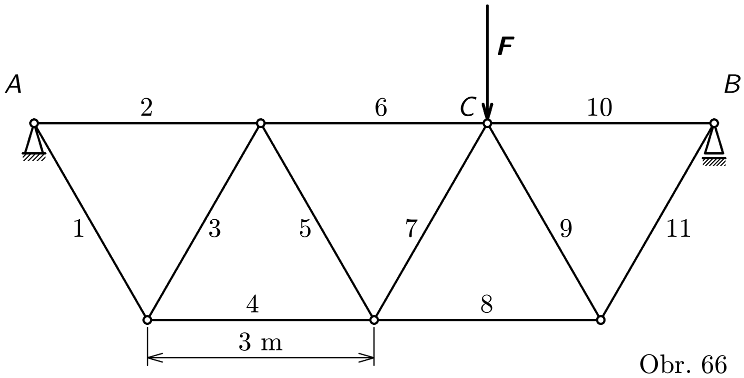


Obr. 65

21. Prutová soustava mostního jeřábu podle obr. 66 je zatížena ve styčníku C silou $\boldsymbol{F}$, jejíž velikost je $F = 60$ kN a jejíž nositelka je kolmá na spojnici styčníků A, B. Prutová soustava je vytvořena jako soustava pěti rovnostranných trojúhelníků, každý o základně 3,00 m. Určete grafickým postupem:

a) Reakce $\boldsymbol{R}_A$, $\boldsymbol{R}_A$ v podporách.

b) Velikost a směr sil v prutech 1 až 11.



Obr. 66

Výsledky úloh

1. $M_{\mathrm{v}} = 666\ \mathrm{N{\cdot}m}$, $F_{\mathrm{v}} = 291\ \mathrm{N}$

2. $F_{\mathrm{v}} = 27{,}1\ \mathrm{N}$, $\alpha_{\mathrm{v}} = 47°30'$, $x_{\mathrm{v}} = -4{,}175\ \mathrm{m}$

3. $F_{\mathrm{v}} = 60\ \mathrm{N}$, $x_{\mathrm{v}} = 27\ \mathrm{mm}$

4. $x_{\mathrm{T}} = 5{,}2\ \mathrm{m}$

5. a) $x_{\mathrm{T}} = 24\ \mathrm{mm}$, $y_{\mathrm{T}} = 58\ \mathrm{mm}$
b) $x_{\mathrm{T}} = 38\ \mathrm{mm}$, $y_{\mathrm{T}} = 62\ \mathrm{mm}$
c) $x_{\mathrm{T}} = 50\ \mathrm{mm}$, $y_{\mathrm{T}} = 29{,}7\ \mathrm{mm}$
d) $x_{\mathrm{T}} = 1{,}19r$, $y_{\mathrm{T}} = 0\ \mathrm{mm}$

6. $x_{\mathrm{T}} = 29{,}5\ \mathrm{mm}$, $y_{\mathrm{T}} = 36{,}1\ \mathrm{mm}$

9. $S_1 = 13{,}6\ \mathrm{kN}$, $S_2 = 15{,}5\ \mathrm{kN}$

10. Jde o rovnováhu tří sil: $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{R}$. Protože $\boldsymbol{R}$ musí být kolmá ke stěně (tření je nulové), musí nositelky těchto sil procházet bodem D, ležícím ve středu úsečky BC. Pak

$$s = a\cos\alpha = 2{,}83\ \mathrm{m}\,,\ R = F_G\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} = 50\ \mathrm{N}\,,$$

$$S = \sqrt{R^2 + F_G^2} = 112\ \mathrm{N}\,.$$

11. Z rovnováhy momentu sil k bodu O je

$$F = mg\frac{\sqrt{2rh - h^2}}{r - h}\,.$$

12. Jde o rovnováhu tří sil. Síla v laně vychází o velikosti $S = 183\ \mathrm{N}$. Aby nedošlo k proklouznutí, musí být $R_{Ay}f > R_{Ax}$. Vychází $R_{Ay}f = 129\ \mathrm{N}$, $R_{Ax} = 127\ \mathrm{N}$ a k proklouznutí tedy nedojde.

13. Výpočtem z podmínek rovnováhy $m_1 = 7{,}73\ \mathrm{kg}$, $S = 36{,}8\ \mathrm{N}$.

14. Nosník z obr. 58: Reakce $\boldsymbol{R}_B$ má směr kolmý k podložce podpory B.

$$R_{\mathrm{A}x} = (a_1F_1 + a_2F_2)\frac{\operatorname{tg}\alpha}{l}\,,\ R_{\mathrm{A}y} = F_1 + F_2 - \frac{a_1F_1 + a_2F_2}{l}\,,$$

$$R_B = \frac{a_1 F_1 + a_2 F_2}{l \cos\alpha} \,.$$

Nosník z obr. 59: $R = 0\,,\ M_R = (a - l)F\,.$

15. $R_A = 44\ \mathrm{kN}\,,\ R_B = 36\ \mathrm{kN}\,.$

16. $R_1 = R_3 = 150\ \mathrm{N}\,,\ R_2 = 707\ \mathrm{N}\,.$

17. $R_{\mathrm{A}y} = mg\,,\ R_{\mathrm{A}x} = R_B = mg\frac{\xi}{l}\operatorname{tg}\alpha\,,\ f \geq \operatorname{tg}\alpha\,.$

18.

$$R_{\mathrm{A}x} = F\frac{fl}{a + fb}\,,\ R_{\mathrm{A}y} = F\left(\frac{l}{a + fb} - 1\right)\,,$$

$$P = F\frac{\omega f l r}{a + fb}\,.$$

19. Postupně řešíme rovnováhu tří sil v kloubech *A*, *B*, *C*, *D*. Je $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = 70\ \mathrm{kN}$. To jsou současně síly, kterými je stlačována krychle. Dále $S_5 = S_6 = S_7 = 50\ \mathrm{kN}$.

20. a) $R_A = 53{,}3\ \mathrm{kN}\,,\ R_B = 26{,}7\ \mathrm{kN}\,,$
b)

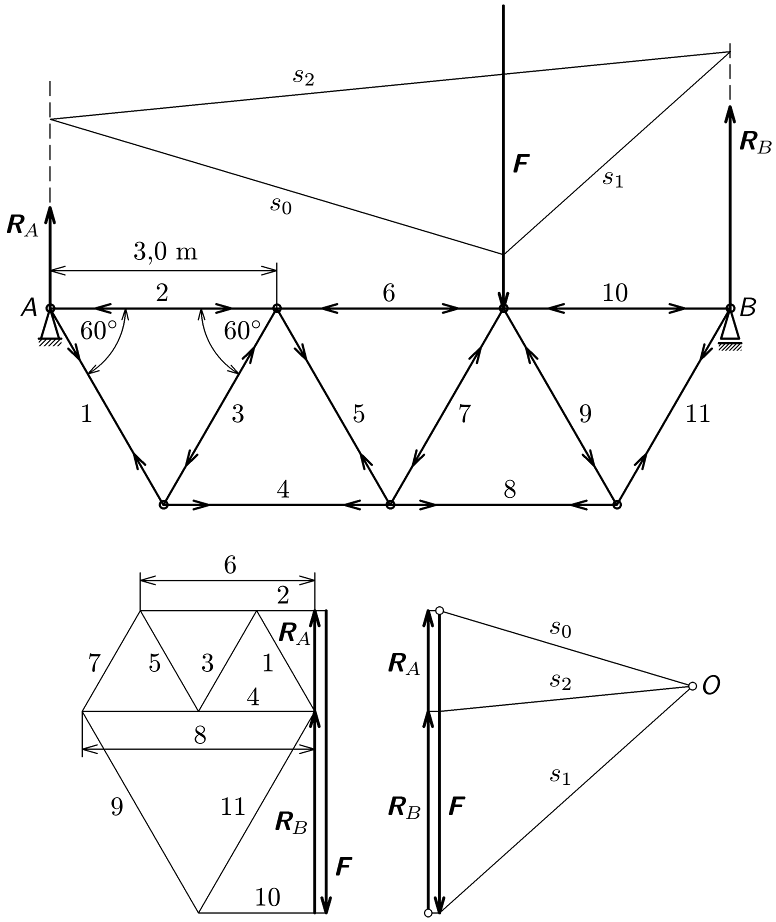
$$S_1 = 75{,}5\ \mathrm{kN}\ (\mathrm{tlak})\,, S_2 = S_4 = 53{,}0\ \mathrm{kN}\ (\mathrm{tah})\,,$$

$$S_3 = 59{,}0\ \mathrm{kN}\ (\mathrm{tlak})\,, S_5 = 80{,}0\mathrm{kN}\ (\mathrm{tah})\,.$$

21. Viz obr. 67.

prut	1	2	3	4	5	6
zatíž./kN	23,2	−11,6	−23,2	23,2	23,2	−34,8

prut	7	8	9	10	11
zatíž./kN	−23,2	46,4	−46,4	−23,2	46,4



dispozice: 10 mm $\widehat{=}$ 1 m
silový obrazec: 1 mm $\widehat{=}$ 1,5 kN

dáno: $F = 60$ kN
řešením—reakce:
$R_A = 20$ kN, $R_B = 40$ kN

Obr. 67

Literatura

[1] Baník, I., Baník, R., Zámečník, J.: Fyzika netradične, Mechanika. Alfa, Bratislava 1990

[2] Brdička, M., Hladík, A.: Teoretická mechanika. Academia, Praha 1987

[3] Horák, Z., Krupka, F., Šindelář.: Technická fyzika. SNTL, Praha 1961

[4] Juliš, K., Tepřík, O., Slavík, A.: Statika. SNTL, Praha 1987

[5] Trkal, V.: Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa. Nakl. ČSAV, Praha 1956

[6] Vybíral, B.: Teoretická mechanika, 1. a 2. díl. Gaudeamus, Hradec Králové 1992