Přenos tepla

Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku

Ivo Volf – Miroslava Jarešová – Miroslav Ouhrabka

Obsah

Úvod

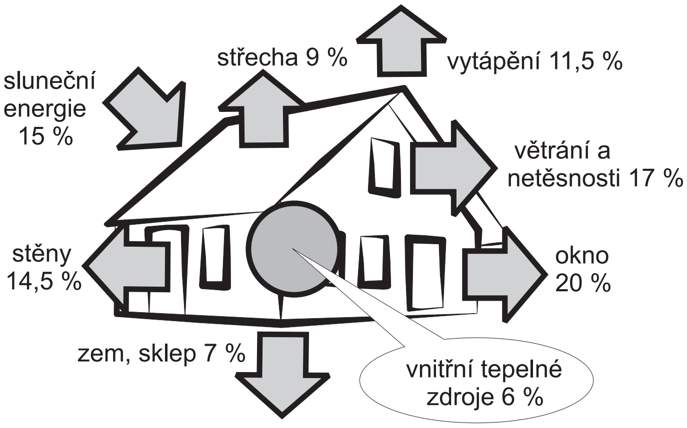
Milí čtenáři,

předkládáme vám nový studijní text, který se tentokrát zabývá problematikou zařazenou do termiky. Termika nepatří mezi ty partie fyziky, které by považovali za oblíbené jak studenti, tak vyučující. Pro učitele je výklad tepelných jevů opravdovým oříškem. Je totiž založen na výkladu dvou základních pojmů, které se promítají do celého textu: teplota a teplo. Termodynamická teplota patří mezi základní fyzikální veličiny, a proto je její výklad velmi složitý. Učitel by měl začít tělesnými pocity člověka a skončit pochopením klasických i moderních metod měření a přístrojového vybavení, jež je pro měření potřebné; často musí pro výklad měření teploty užít jevů, o nichž se žáci zatím neučili. Stejně tak teplo, často v obecné řeči zaměňované za teplotu („tady je teplo"), jež se měřilo v 19. století nejprve v kaloriích a potom v joulech, se obtížně vykládá. Celkové pojetí přešlo od fluidové teorie kalorické na konci 18. století přes první termodynamický zákon, mechanický ekvivalent tepla a tepelný ekvivalent práce až k dnešnímu společnému výkladu tří pojmů: mechanická práce, teplo a změna vnitřní energie.

Pro studenty je tak problematika náročná na pochopení, výklad musí být provázen mnoha pokusy, a na ně ve škole příliš času nezbývá. K tomu všemu ještě přistupuje současná dvojitá výuka o teplotě a teple – na základě pozorovaných a měrných jevů jsou ve fyzice vyvozeny zákony, které postupně vytvořily termodynamiku. Ta shrnuje fenomenologický pohled na tepelné děje. Současně v 19. století vznikl druhý pohled na stejné jevy – pohled molekulové fyziky s využitím statistických metod.

Náš text bude pracovat s pojmy teplota a teplo jako s fenomenologickými veličinami – teplo vystupuje jako jedna z příčin změny vnitřní energie tělesa a teplota je základní fyzikální veličina.

Položme si nyní otázku: proč vlastně tento text vznikl? Vznikl nejen proto, aby doplnil učivo středoškolské fyziky, ale také proto, že s teplem bychom také měli umět hospodařit. Dobře hospodařit – to však nejde bez pochopení základních fyzikálních poznatků a závislostí, které s tím souvisejí. Podíváme-li se např. do [1], což jeden z mnoha materiálů publikovaných elektrárenskou společností ČEZ, je zde uveden následující odstavec: „Energetické ztráty při bydlení souvisejí bezprostředně s vlastnostmi obydlí i se způsoby jeho užívání. Když si představíme byt jako určitý obestavěný objem, pak je zřejmé, že základním problémem budou tepelné ztráty. Záleží na tom, *jak je byt proti vnějšku izolován* a kolik jeho povrchů je přímo ochlazováno dotykem s vnějším, většinou chladnějším ovzduším. *Záleží rovněž na tvaru a členitosti stavby*, protože kompaktní hmota má menší povrch a je méně ochlazována. Tepelné ztráty jsou také podstatně ovlivněny velikostí a uspořádáním otvorů oken a dveří, majících většinou mnohem horší izolační vlastnosti, a samozřejmě i zvyklostmi větrání.“ Podívejme se nyní na model takového rodinného domu z hlediska tepelné bilance (obr. 1).



Obr. 1 Energetická bilance rodinného domu[1]

Na první pohled je vidět, že ve všem je fyzika. Kdo ví, jak vhodným způsobem vytvořit fyzikální modely popisující tepelné ztráty, tak také pak bude vědět, co má udělat, aby tyto ztráty snížil. A to je také jeden z hlavních cílů tohoto studijního textu – naučit se provádět alespoň přibližné výpočty různých tepelných ztrát pomocí vytvořených modelů.

Vzhledem k tomu, že termika prošla dlouhým historickým vývojem, zařadili jsme na úvod studijního textu také její historii. Na ni pak již navazuje další výklad – rozšíření učiva termiky probíraného na střední škole v hodinách fyziky. Výklad je doplněn mnoha řešenými úlohami i úlohami k samostatnému řešení. Nové poznatky jsou formulovány na co nejnižší úrovni matematických znalostí, aby byly přístupné studentům 2. ročníku střední školy. Na konci některých kapitol je však uveden „Doplněk“ – ten již není povinnou součástí studijního textu – je určen pro zájemce, který již ovládá základy vyšší matematiky (anebo by se s ní teprve chtěl seznámit prostřednictvím studijních textů Matematika pro řešitele FO, které jsou ke stažení na Internetu – na stránkách fyzikální olympiády, a pak si již dodatky mohl s porozuměním přečíst).

[1] Tento obrázek byl převzat a upraven na základě informací uvedených v [1].

1 Pohled do historie termiky

Období předklasické termiky je možno zařadit do období starověkého Řecka. Předklasická termika spočívala na pevných základech termometrie a kalorimetrie. Za celá staletí se podařilo získat jen několik elementárních poznatků o tepelných jevech. Za nejdůležitější z nich se již ve starověku považoval oheň a také umění ho získat. *Hérakleitos* (540 – 480 př.n.l.) považoval oheň za základní pralátku, ze které vše vzniká a v níž vše zaniká – svět je proces neustálé změny ohně ve věci a věci v oheň. Další řecký filozof *Aristoteles* (384 – 322 př.n.l.) již mluvil o ohni v souvislosti s pohybem. Rozlišoval pohyb přirozený a násilný, přirozený pohyb pak vede těleso (živly – vzduch, voda, země, oheň) po vertikální přímce na své přirozené místo v kosmu: vzduchu a ohni přitom odpovídá pohyb nahoru, zemi a vodě zase naopak shora dolů. Aristoteles kromě těchto živlů zavedl ještě pátý živel – éther (aither). Z něj jsou stvořena nebeská tělesa, a také vyplněn prostor, ve kterém tato tělesa obíhají. Základní vlastností étheru je jeho neměnnost; neměnné je proto jak nebe, tak nebeské sféry. Zde je možno vidět již prvopočátky snahy mluvit o tepelném proudění. Aristoteles také tvrdil, že teplo se může získat pohybem (třením), ale samo o sobě není pohybem. Toto tvrzení je možno již považovat za jeden z prvopočátků kinetické teorie látek – teplo je projevem vnitřního pohybu molekul a atomů tělesa. Poznatky na této úrovni nebyly překonány asi po 2000 let.

Ve 3. až 2. století př.n.l. žil fyzik a vynálezce *Filón Byzantský*, který zkonstruoval vzduchový termoskop – přístroj k indikaci tepelných stavů (předchůdce teploměru). Teprve o 1500 let později *G. Galilei* (1564 – 1642) pokračoval za pomoci termoskopu v rozvíjení termometrie. Tedy Galilei nevynalezl teploměr, jak se někdy mylně uvádí, ale navazoval již na práci Filóna. Galilei však ještě nerozlišoval pojmy teplo a teplota.

Termika jako novověká věda vznikla na počátku 17. století. Badatelé se v té době již spolehlivě naučili měřit teplotu, a tím byly položeny základy termometrie. V 18. století se již začala rozvíjet kalorimetrie, došlo k odlišení pojmů teplo a teplota.

Mezi úspěchy klasické termiky lze považovat vytvoření teplotních stupnic. Byly sestrojeny teploměry, jejichž stupnice byly pojmenovány na počest jejich tvůrců: *D. G. Fahrenheit* (1686 – 1736), *R. A. Réaumur* (1683 – 1757), *A. Celsius* (1701 – 1744).

Jako velmi důležité se v té době ukázalo vyslovení zákonů zachování hmotnosti a energie. Zákony formuloval *A. L. Lavoisier* (1743 – 1794), který se zabýval především procesem hoření, a *M. V. Lomonosov* (1711 – 1765), který jako první vyslovil domněnku, že tepelné jevy jsou především projevem pohybu drobných částic, z nichž je látka složena, dále experimentálně prokázal platnost zákona zachování hmoty. Zde je opět na místě dodat, že se pojetí těchto učenců v jistém smyslu velmi podobalo Hérakleitovu učení. Pokud bychom nahradili slovo „oheň“ slovem „energie“, mohli bychom Hérakleitovy výroky považovat téměř slovo od slova za vyjádření dnešního pojetí. Velmi výstižně srovnává řeckou filozofii s představami moderní přírodovědy *W. Heisenberg* ve [2]: Energie je opravdu látka, z níž jsou vytvořeny všechny elementární částice, všechny atomy a tudíž všechny věci vůbec, a současně je energie rovněž hybnou silou. Energie je substance, neboť její celkový součet se nemění a elementární částice lze z této substance skutečně vytvořit, jak je zřejmé z mnoha experimentů, při nichž elementární částice vznikají. Energie se může přeměňovat v pohyb, v teplo, ve světlo a v napětí. Energii lze tedy považovat za příčinu všech proměn ve světě.

Také *G. W. Richmann* (1711 – 1753) (první oběť elektrických výzkumů – byl zabit při experimentech kulovým bleskem[2]) se zabýval tepelnými vlastnostmi látek, vyráběl i termometrické přístroje. Jeho kalorimetrická rovnice je také určitým vyjádřením zákona zachování energie. Vedením tepla se zabývala i celá řada dalších fyziků, např. i *H. Cavendish* (1731 – 1810).

Od konce 17. století se při řešení fyzikálních úloh začal s úspěchem používat infinitezimální počet. Tato metoda umožnila přechod od makroskopického pohledu na přírodní jevy k detailnějšímu pohledu na přírodu. Velkým stimulem se také ukázal vynález parního stroje, avšak do poloviny 19. století neexistovala uspokojivá teorie umožňující vysvětlení tepelných jevů.

V roce 1777 *G. V. Scheele* (1742 – 1786) vyslovil hypotézu o existenci světelných paprsků, které se mohou šířit prostorem, což bylo také experimentálně prokázáno. Studovaly se rovněž i jevy odrazu a pohlcování tepelných paprsků. *J. Harrison* (?1694 – 1776) se již zabýval změnami rozměrů těles v závislosti na teplotě s cílem, aby vytvořil co nejpřesnější hodiny, které by těmto teplotním změnám podléhaly co nejméně. Po objevu infinitezimálního počtu publikoval *J. B. Fourier* (1768 – 1830) v roce 1822 svoje *Théorie analytique de chaleur*, kde popisuje na základě infinitezimálních úvah, že tok tepla mezi dvěma blízkými místy v tělese je úměrný extrémně malému rozdílu jejich teplot. Nemalou zásluhu na dalším vývoji má také *L. Euler* (1707 – 1783) svou rovnicí pro proudění.

K dalšímu vývoji došlo v 19. století, kdy bylo možné redukovat teorii tepla na mechaniku za předpokladu, že teplo je ve skutečnosti komplikovaným statistickým pohybem nejmenších částic daného tělesa. Po tom, co došlo ke spojení pojmů matematické teorie pravděpodobnosti s pojmy newtonovské mechaniky, podařilo se Clausiovi, Gibbsovi a Boltzmannovi ukázat, že základní zákony tepla se dají vyložit jako statistické zákony plynoucí z aplikace newtonovské

[2] Toto však není historicky zcela objasněno, mohlo také jít pouze o výboj způsobený úderem blesku do okolí laboratoře.

mechaniky na velmi komplikované mechanické systémy. Přesněji řečeno *R. J. Clausius* (1822 – 1888), který je považován za zakladatele termodynamiky, v roce 1850 formuloval v dnešním tvaru první a druhý zákon termodynamiky, v roce 1854 zavedl pojem kruhových, v roce 1862 nevratných procesů a v roce 1865 pojem entropie. *J. W. Gibbs* (1839 – 1903) zase přispěl především do teoretických základů chemické termodynamiky. Známý je pojem Gibbsova energie, pravidlo fází a teorie termodynamických potenciálů. *L. Boltzmann* (1844 – 1906) popsal v teorii plynů základní rozdíl mezi ději mechanickými a tepelnými. Mechanické děje jsou v podstatě vratné, tj. každý může probíhat i v obráceném směru. Tepelné pochody jsou však nevratné. Boltzmann je spoluobjevitelem Stefanova–Boltzmannova zákona o intenzitě vyzařování a objevitelem zákona o záření černého tělesa. V neposlední řadě nelze také nepřipomenout práce *W. Thomsona* (lorda Kelvina) (1824 – 1907), který se také věnoval výzkumům na poli termodynamiky. Vytvořil absolutní termodynamickou stupnici. Thomson došel k závěru, že musí existovat dolní hranice ochlazení těles, tj. přirozená teplotní nula[3]. Zjistil, že tato absolutní nula odpovídá v Celsiově teplotní stupnici hodnot 273,15 °C.

V našem výčtu osobností by však neměla chybět ani jména *S. Carnota* (1796 – 1832), známý je především Carnotův cyklus a *R. Mayera* (1814 – 1878) – Mayerův vztah.

Vraťme se však zpátky a podívejme se na historický vývoj popisu tepelného záření černého tělesa. První zmínky o tepelném záření je možno nalézt již ve druhé polovině 18. století. Další vývoj nastal díky pracem *G. Kirchhoffa* (1824 – 1887), který vysvětlil vztah mezi emisí a absorpcí záření, založil spektrální analýzu látek a definoval pojem černého tělesa. Další vývoj pak nastal, když byl zaveden *model absolutně černého tělesa* jako dokonalého zářiče. Německý fyzik *W. Wien* (1864 – 1928) si v roce 1893 všiml, že vyšší teplotě bude odpovídat kratší vlnová délka odpovídající maximu, energie normované vyzařovaného záření a formuloval *Wienův posunovací zákon*. O další popis vyzařování černého tělesa s využitím klasické fyziky se pokoušeli také již výše zmiňovaní fyzikové *J. Stefan* (1835 – 1893) a *L. Boltzmann*, kteří odvodili *Stefanův-Boltzmannův zákon*. Dospěli však pouze k přibližným výsledkům stejně jako *J. Strutt* (Lord *Rayleigh*) (1842 – 1919) a *J. Jeans* (1877 – 1948), kterým se podařilo odvodit v roce 1900 zákon popisující záření černého tělesa, který však platil pouze v dlouhovlnné oblasti spektra. Výše uvedené nedostatky odstranil teprve *M. Planck* (1858 – 1947), a to tak, že nejprve zavedl pojem kvanta záření. V roce 1900 pak publikoval rovnici, která popisuje záření absolutně černého tělesa ve

[3]Takto se to běžně uvádí ve většině učebnic. Poznatek, že musí existovat teplota, pod níž nelze žádnou látku ochladit, však vyslovil již na začátku 18. století *G. Amontons* (1663 – 1705).

všech oblastech spektra elektromagnetického vlnění. Rok 1900 je také možno považovat za určitý mezník ve vývoji fyziky – a to je vznik kvantové fyziky. S jejím použitím pak bylo možno objasnit mnoho jevů, se kterými si klasická fyziky nevěděla rady.

Po objevu speciální teorie relativity se však došlo k závěru, že i když se teorie tepla dala spojovat s mechanikou prostřednictvím statistické mechaniky, přece jen ji nelze dost dobře považovat za část mechaniky, a to z toho důvodu, že fenomenologická teorie tepla používá celou řadu pojmů, které nemají žádný protějšek v ostatních oblastech fyziky (např. teplo, entropie, volná energie, ...). Pokud bychom od fenomenologického popisu přešli ke statistickému a považovali teplo za energii, která je statisticky rozdělena do mnoha stupňů volnosti systému podmíněných atomární strukturou hmoty, pak teorie tepla nesouvisí s mechanikou o nic víc než s elektrodynamikou nebo s některou jinou částí fyziky. Centrální pojem statistického výkladu nauky o teple je pojem pravděpodobnosti, který dále ve fenomenologické teorii souvisí s pojmem entropie. Vedle toho má ale ve statistické teorii tepla také význam energie, o čemž nás přesvědčuje již dříve zmiňovaný Planckův zákon. Zákon dobře souhlasil s experimentem, ale přitom zároveň „bořil“ dosavadní představy klasické fyziky, protože byl odvozen za předpokladu, že změny energie systému nejsou spojitě se měnící fyzikální veličinou.

Není bez zajímavosti, že v roce 1924 vyšel indický fyzik *S. Bose* (1894 – – 1974) z předpokladu, že rovnovážné tepelné záření je ideálním plynem ultrarelativistických částic – fotonů. Svým statistickým popisem pak dospěl k Planckovým výsledkům jinou cestou. Následné Einsteinovo zobecnění tohoto postupu přivedlo k formulaci *Boseho-Einsteinovy statistiky* udávající rozdělení částic ideálního plynu bosonů podle energie. Druhou kvantovou statistiku Fermiho-Diracovu formulovali nezávisle na sobě *E. Fermi* (1901 - 1954) (pro elektrony) a *P. A. M. Dirac* (1902 – 1984) (pro ideální plyn libovolných fermionů), který rovněž podrobně vyjasnil její souvislost s kvantovou mechanikou (1926).

2 Kalorimetrická rovnice

S kalorimetrickou rovnicí jste se již seznámili v hodinách fyziky. Nyní si jenom stručně shrneme její použití.

Jestliže potřebujeme ochladit horkou vodu, můžeme k tomu užít některého z následujících způsobů: přidat určitý objem studené vody nebo přidat několik kostek ledu, popř. počkat určitou dobu, až voda vychladne. Ve všech případech říkáme, že se snížila teplota vody a horká voda některým z těchto způsobů předala teplo svému okolí.

Jestliže k tělesu o hmotnosti m_1, měrné tepelné kapacitě c_1 a teplotě t_1 dáme do tepelného kontaktu těleso o hmotnosti m_2, měrné tepelné kapacitě c_2 a teplotě t_2, potom se po určité době teplota vyrovná na hodnotu t, pro niž platí $t_1 < t < t_2$ (je-li $t_1 < t_2$) nebo $t_1 > t > t_2$ (pro $t_1 > t_2$). Nechť $t_1 > t_2$. Potom teplejší těleso (tj. těleso o vyšší teplotě t_1) předá teplo $Q_1 = c_1 m_1 (t_1 - t)$ tělesu chladnějšímu a chladnější těleso přijme teplo $Q_2 = c_2 m_2 (t - t_2)$ od teplejšího tělesa. Z rovnosti tepla přijatého a odevzdaného (neboť soustavu těles považujeme za ideálně izolovanou) plyne vztah

$$c_1 m_1 (t_1 - t) = c_2 m_2 (t - t_2).$$

Odtud můžeme určit výslednou hodnotu teploty

$$t = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2},$$

popřípadě můžeme stanovit další veličiny (původní teplotu, měrné tepelné kapacity apod.).

Příklad 1 – přítok vody do bazénu

V lázních provádějí rehabilitační cvičení v bazénu o rozměrech dna 300 cm × ×400 cm, voda se do něj napouští do výšky 120 cm. Voda se vyměňuje vždy přes noc, a to dvakrát týdně. Když nechají přitékat studenou vodu o teplotě 15 °C, naplní se bazén za 3 hodiny, když nechají přitékat teplou vodu o teplotě 75 °C, naplní se za 8 hodin. Za jak dlouho se bazén naplní, když přitékají studená i teplá voda současně? Jaká bude výsledná teplota vody v bazénu? Měrná tepelná kapacita vody je $c = 4\,200\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$.

Řešení

Objem vody je $V = 30 \cdot 40 \cdot 12\ \mathrm{l} = 14\,400\ \mathrm{l}$, její hmotnost $m = 14{,}4 \cdot 10^3\ \mathrm{kg}$. Studená voda přitéká s objemovým tokem $Q_{\mathrm{V1}} = \dfrac{14\,400\ \mathrm{l}}{180\ \mathrm{min}} = 80\ \mathrm{l \cdot min^{-1}}$, teplá voda s $Q_{\mathrm{V2}} = 30\ \mathrm{l \cdot min^{-1}}$. Celkový objemový tok je $Q_{\mathrm{V}} = 110\ \mathrm{l \cdot min^{-1}}$, τ je doba nutná k naplnění bazénu. Pro výměnu tepla platí

$$Q_{\mathrm{V1}} \tau c (t - t_1) = Q_{\mathrm{V2}} \tau c (t_2 - t),$$

a tedy výsledná teplota vody v bazénu je

$$t = \frac{Q_{V1}t_1 + Q_{V2}t_2}{Q_{V1} + Q_{V2}} = 31{,}4\ ^\circ\mathrm{C};$$

tedy nezávisí na době, po kterou voda přitéká.

Bazén se naplní za dobu $\tau = \dfrac{V}{Q_V} = 131$ min $= 2$ h 11 min.

Příklad 2 – ohřívání vody v bazénu

Během provozu se teplota vody v bazénu za 6 hodin snížila na 24 °C a bylo nutné teplotu vody zase zvýšit během technické přestávky dlouhé 2 hodiny. Jaký příkon musí mít zahřívací zařízení při účinnosti 84 %?

Řešení

Je nutné zajistit dodání tepla $Q = cm\Delta t = 4\,200 \cdot 14\,400 \cdot 7{,}4\ \mathrm{J} = 4{,}48 \cdot 10^8\ \mathrm{J}$, a to během 2 hodin, tj. výkon ohřívacího zařízení musí být

$$P = \frac{Q}{\tau} = \frac{4{,}48 \cdot 10^8}{7\,200}\ \mathrm{W} = 62{,}2\ \mathrm{kW}.$$

To při účinnosti 0,84 představuje příkon 74,1 kW (elektrický výkon anebo jiný výkon ohřívače).

Ještě by nás mohlo zajímat, jaký tepelný výkon musí mít zahřívací zařízení, aby se původní teplota udržovala průběžně:

$$P = \frac{cm\Delta t}{\tau} = \frac{4\,200 \cdot 14\,400 \cdot 7{,}4}{6 \cdot 3\,600}\ W = 20{,}7\ \mathrm{kW}.$$

Zařízení by při průběžném ohřevu muselo mít výkon zhruba 21 kW, příkon 24,7 kW.

Příklad 3 – rychlovarná konvice

V zimě nabral turista do rychlovarné konvice vodu s ledem o teplotě 0 °C, vody bylo 900 g, ledu 600 g. Za jak dlouho se bude voda vařit při středním výkonu konvice 2,0 kW a účinnosti 85 %? Měrná tepelná kapacita vody je $c = 4\,200\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, měrné skupenské teplo tání ledu je $l_t = 332\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$.

Řešení

Hmotnost vody je $m_1 = 0{,}90$ kg, hmotnost ledu $m_2 = 0{,}60$ kg, teploty $t_1 = t_2 = 0$ °C, výsledná teplota $t = 100$ °C, účinnost $\eta = 0{,}85$, hledanou dobu označíme τ. Teplo na roztání ledu je $Q_2 = m_2 l_t$, teplo na ohřátí vody je $Q_1 = c(m_1 + m_2)(t - t_1)$. Odtud dostaneme kalorimetrickou rovnici

$$P\tau\eta = m_2 l_t + c(m_1 + m_2)(t - t_1),$$

z čehož
$$\tau = \frac{m_2 l_\mathrm{t} + c(m_1 + m_2)(t - t_1)}{P\eta} = 488\ \mathrm{s} = 8{,}1\ \mathrm{min}.$$
Voda se bude vařit asi za 8 minut.

Příklad 4 – pavilon tropických hadů

V pavilonu tropických hadů je třeba udržovat stálou teplotu 27 °C. Uzavřené terárium má rozměry 400 cm × 500 cm × 200 cm. Kdyby nefungovalo zahřívací zařízení, během 3,0 hodin klesne teplota na 21 °C. Hustota vzduchu je $\varrho = 1{,}165\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, měrná tepelná kapacita vzduchu je $c = 1000\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$. Jaký musí být příkon zařízení v teráriu?

Řešení

Objem terária je $V = 40 \times 50 \times 20\ \mathrm{l} = 40\,000\ \mathrm{l} = 40\ \mathrm{m^3}$. Hmotnost vzduchu je $m = V \cdot \varrho = 46{,}6\ \mathrm{kg}$, úbytek tepla je $Q = cm\Delta t = 280\ \mathrm{kJ}$, nutný příkon ohřívacího zařízení pak je $P = \dfrac{Q}{t} = 25{,}9\ \mathrm{W}$. Požadovaný výkon ohřívacího zařízení bude asi 26 W. Ve skutečnosti bude ohřev probíhat s výkonem větším a zahřívací zařízení bude krokově regulováno termostatem.

Úlohy k samostatnému řešení – 1

Úloha 1 – plechová vana

Do vany přitéká horká voda o teplotě 80 °C s objemovým tokem $8\ \mathrm{l \cdot min^{-1}}$ a studená voda o teplotě 15 °C s objemovým tokem $12\ \mathrm{l \cdot min^{-1}}$. Na koupání je vhodné napustit 160 l vody. Plechová vana má hmotnost 40 kg, počáteční teplota vany je 20 °C a měrná tepelná kapacita materiálu vany je $460\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$. Jaká je výsledná teplota vody?

Úloha 2 – rychlovarná konvice

Podle technických údajů se do rychlovarné konvice vejde maximálně 1,7 l vody a zahřívání probíhá s příkonem 1 800 až 2 200 W a účinností 85 %. Do konvice nalijeme 1,2 l vody o teplotě 15 °C. Za jak dlouho se začne voda vařit?

Úloha 3 – pokusy s parafinem

Při pokusech máme 200 g parafinu o teplotě 20 °C. Víme, že parafin taje při teplotách (49 až 54) °C, měrné skupenské teplo tání parafinu je $147\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1}}$, měrná tepelná kapacita parafinu je 3,24 $\mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$. Jak velké teplo je třeba dodat parafinu, aby roztál?

Úloha 4 – zahřívání parafinu

Toto zahřívání (viz Úloha 3) provedeme tak, že parafin nasypeme do tlustostěnné kovové misky a tu pak vložíme do 1,8 l vody o teplotě 60 °C. Roztaje parafin?

3 Zdroje tepla, paliva

V praxi se používají různé zdroje tepla. Varná konvice je příkladem elektrického zahřívacího systému, kam patří i průtokové ohřívače vody, elektrická přítopová zařízení včetně akumulačních kamen, různých teplovzdušných větráků aj. Kromě toho řada zahřívacích systémů používá paliv k přímému hoření (kamna na pevná, kapalná paliva a plyn). Z hlediska termiky nás zajímá *výhřevnost H paliva*, jejíž hodnotu najdeme v tabulkách. Teplo získané dokonalým spálením paliva o hmotnosti m stanovíme podle definice $Q = m \cdot H$, avšak každé zahřívací zařízení má účinnost $\eta < 1$. Potom získáme teplo $Q_1 = \eta \cdot m \cdot H$.

Příklad 5 – tepelná elektrárna

Menší tepelná elektrárna má výkon 340 MW a spaluje méněhodnotné uhlí o výhřevnosti 13 $\mathrm{MJ \cdot kg^{-1}}$. Určete spotřebu uhlí připadajícího na 1 kWh odevzdanou z této elektrárny a denní (24 hodin) spotřebu uhlí, víte-li, že elektrárna pracuje trvale na 80 % jmenovitého výkonu. Účinnost elektrárny je 36 %.

Řešení

Na výrobu 1 kWh spotřebujeme uhlí o hmotnosti m_1; teplo získané dokonalým spálením uhlí je $Q = m_1 H$. Spálení je však nedokonalé, takže platí $Q_1 = m_1 H \eta$, kde $\eta = 0{,}36$. Potom $m_1 H \eta = 1$ kWh, odkud $m_1 = 0{,}77$ kg.

Denní spotřebu uhlí stanovíme pomocí 80 % výkonu, tj. $0{,}80\, P\tau = mH\eta$, z čehož

$$m = \frac{0{,}80 P\tau}{H\eta} = 5\,022 \text{ tun.}$$

Na jeden vagon můžeme naložit 40 tun uhlí, do elektrárny přijede denně 126 vagonů s uhlím.

Příklad 6 – jízda automobilu

Když jede automobil rychlostí 90 km $\cdot$ h^{-1}, má spotřebu 6,8 litru na 100 kilometrů trasy. Benzin má výhřevnost 46 MJ $\cdot$ kg^{-1}, z čehož pouze 22 % připadne na mechanickou práci nutnou k udržení rychlosti. Hustota benzinu je 700 kg $\cdot$ m^{-3}. Jak velký je výkon automobilu a jaká je tažná síla motoru?

Řešení

Označíme dané veličiny: $v = 90$ km $\cdot$ h^{-1} $= 25$ m·s^{-1}, $s = 100$ km $= 1{,}0 \cdot 10^5$ m, $V = 6{,}8$ l, $H = 46$ MJ $\cdot$ kg^{-1}, $\eta = 22$ % $= 0{,}22$, $\varrho = 700$ kg $\cdot$ m^{-3}. Spálením benzinu získáme teplo $Q = V\varrho H$. Trasu $s = 1{,}0 \cdot 10^5$ m urazí stálou rychlostí v za dobu $\tau = \dfrac{s}{v}$, takže výkon je $P = \dfrac{\eta V\varrho H v}{s} = 12{,}0$ kW. Tažná síla $F =$ $= \dfrac{\eta V\varrho H}{s} = 482$ N.

Příklad 7 – výkon lokomotivy vlaku

Při stálé rychlosti 54 km $\cdot$ h^{-1} táhne lokomotiva nákladní vlak, přičemž překonává valivý odpor a odpor vzduchu. Odhadněme tahovou sílu lokomotivy na 50 kN. Celková účinnost parní lokomotivy je maximálně 12,5 %, elektrické 60 %, ale účinnost elektrárny je menší než 35 %. Odhadněte výkon lokomotivy, spotřebu standardního paliva o výhřevnosti 29,4 MJ $\cdot$ kg^{-1} za dobu jízdy 30 minut a úsporu paliva, způsobenou užíváním elektrické trakce.

Řešení

Vlak se pohybuje stálou rychlostí $v = 15$ m·s^{-1}. K překonání celkového odporu proti pohybu vyvíjí tažnou sílu $F = 50$ kN, takže stálý výkon je roven $P = Fv = 750$ kW. Za dobu $\tau = 1800$ s vykoná tažná síla práci $W = P\tau =$ 1 350 MJ. Spotřeba uhlí při účinnosti $\eta = 12{,}5$ % $= 0{,}125$ se stanoví z rovnice $P\tau = W = m\eta H$, tj. $m = \dfrac{W}{\eta H} = 370$ kg.

V elektrárně spotřebují na stejnou práci méně standardního paliva; celková účinnost je $\eta_1 = 0{,}35 \cdot 0{,}60 = 0{,}21$, tedy $m_1 = \dfrac{W}{\eta_1 H} = 220$ kg. Úspora paliva činí 150 kg, tj. téměř 41 %. Elektrická trakce má však také další, převážně ekologické přednosti.

Úlohy k samostatnému řešení – 2

Úloha 5 – atomová elektrárna

Atomová elektrárna má celkový výkon 1 000 MW a pracují v ní 4 bloky po 250 MW, z nichž jsou neustále v provozu tři (na zbylém se provádí údržba). Když byla uvedena do provozu, nahradila tepelnou, ekologicky méně výhodnou elektrárnu, jež na výrobu 1 kWh potřebovala 400 g standardního paliva o výhřevnosti 30 MJ $\cdot$ kg^{-1}. Kolik uhlí se uspoří za běžný měsíc práce (30 dní)?

Úloha 6 – jízda automobilu

Aerodynamická odporová síla, jíž při jízdě rychlostí 90 km $\cdot$ h^{-1} působí vzduch na automobil, představuje hodnotu 400 N. Předpokládejme, že velikost odporové síly závisí na druhé mocnině rychlosti. Jak se změní spotřeba benzínu určená v litrech na 100 km, když se rychlost automobilu zvětší na 108 km $\cdot$ h^{-1}?

Úloha 7 – zahřívání vzduchu

Porovnejte spotřebu standardního paliva, které se spotřebuje při zahřátí vzduchu ve třídě z teploty 12 °C na 22 °C, jsou-li rozměry třídy 7,2 m $\times$ 10,8 m $\times$ $\times$3,2 m, měrná tepelná kapacita vzduchu $c_\mathrm{v} = 1$ kJ $\cdot$ kg^{-1} $\cdot$ K^{-1} a hustota vzduchu je 1,2 kg $\cdot$ m^{-3} za níže uvedených podmínek: a) dříve, když se užívalo kamen s účinností 4 % nebo b) dnes, když se může používat elektrické zahřívací zařízení s účinností 95 % (účinnost elektrárny je 36 %).

4 Přenos tepla

Přenos nebo také sdílení tepla je složitý děj. Při jeho popisu zavádíme řadu zjednodušení, která nám pak usnadní tvorbu modelů pro matematický popis sledovaných dějů. Sdílení tepla pak můžeme zhruba rozčlenit: tepelná výměna vedením (kondukcí), tepelná výměna prouděním (konvekcí) a tepelná výměna sáláním (zářením, radiací).

Při *vedení tepla* částice látky v oblasti s vyšší teplotou předávají část své střední energie prostřednictvím vzájemných srážek částicím v místech s nižší teplotou, tj. majícím nižší střední energii. Při tomto procesu se však částice nepřemísťují, ale kmitají kolem svých rovnovážných poloh. S šířením tepla prostřednictvím vedení se nejčastěji můžeme setkat v tělesech z pevných látek, jejichž různé části mají rozdílné teploty. Teplo se může šířit vedením také v kapalinách a plynech. Zde se však především uplatňuje přenos tepla *prouděním*. Obecně je možno říci, že šíření tepla prouděním (se změnou teploty se také mění hustota, což vyvolává proudění) je téměř vždy spojeno se šířením tepla vedením.

Přenos tepla *zářením* spočívá ve vysílání záření a jeho následném pohlcování, jež vede ke zvýšení vnitřní energie v látce, která záření absorbuje.

Přenos tepla v reálných situacích v různých zařízeních je obvykle kombinací dvou nebo i všech tří uvedených způsobů. My se však při vytváření modelových situací budeme snažit každý daný případ popisovat pomocí způsobu, který bude převažovat. Naše modely budou zjednodušené, ale pouze natolik, aby pokud možno co nejvýstižněji popisovaly danou situaci a vyhovovaly výsledkům zjištěným z měření.

Protože prostup tepla připomíná průtok vody potrubím nebo náboje vodičem, je zde možno nalézt řadu analogií. Z tohoto hlediska lze vedení tepla rozdělit také na:

- ustálené (stacionární) vedení tepla; při ustáleném vedení je teplotní rozdíl mezi jednotlivými částmi tělesa stálý, tj. nezávisí na čase,
- neustálené (nestacionární) vedení tepla; při neustáleném vedení postupně dochází k postupnému vyrovnávání teplotních rozdílů mezi jednotlivými částmi tělesa.

V tomto textu se budeme zabývat pouze ustáleným vedením tepla. Naše zjednodušené modely, které budeme používat, budou nejjednoduššími výsledky postupů, ke kterým se dospělo řešením diferenciálních rovnic (Fourierova rovnice vedení tepla), ale také i použitím statistických metod (odvození Stefanova-Boltzmannova) zákona. Až budete na vysoké škole, a budete používat vyšší matematiku, seznámíte se s metodami řešení problémů spojených s vedením tepla podrobněji. Jak jsme slíbili v úvodu, bude v textu několik nepovinných doplňků, které poskytnou alespoň první náhled do metod, jak se k těmto problémům přistupuje pomocí vyšší matematiky.

4.1 Přenos tepla vedením

Přenos (také sdílení) tepla vedením spočívá v přenosu tepla ve směru klesající teploty; tedy ději způsobených interakcí mezi bezprostředně sousedícími částicemi v daném tělese. V kapalinách a plynech se k tomuto sdílení tepla připojuje také sdílení tepla prouděním a u látek, které částečně propouštějí záření (např. sklo), také sdílení tepla sáláním. Při početním řešení sdílení tepla je třeba použít dva zákony:

1. základní zákon vedení tepla, který vyjadřuje závislost mezi tepelnými toky a teplotními spády;
2. zákon zachování energie, který bychom použili na tepelné jevy.

Podle dvou zákonů se pak konstruují *parciální diferenciální rovnice* pro rozdělení teplot v tělesech. S tímto postupem se setkáte až později, při studiu na vysoké škole. V této části se zaměříme především na *Fourierův zákon*, který je považován za základní zákon vedení tepla. Zákon vyplývá z experimentálně zjištěných skutečností.

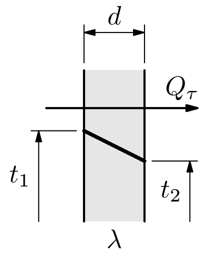
J. B. Fourier (1768 – 1830) při svých pokusech a měřeních zjistil, že teplo prošlé tělesem, izotropním v každém místě (tj. homogenním a izotropním vzhledem k přenosu tepla), je přímo úměrné teplotnímu spádu, době a průtokové ploše kolmé na směr teplotního toku.

4.1.1 Průchod tepla jednoduchou rovinnou stěnou

Budeme uvažovat rovinnou desku o stálé tloušťce d, jejíž konce jsou udržovány na konstantních teplotách t_1, t_2 ($t_1 > t_2$) (obr. 2).

Předpokládejme, že deska je homogenní a izotropní, a proto proudí teplo jen kolmo k povrchovým plochám. Velikost tepelného toku Q_τ procházejícího plochou S povrchu desky, je pak dána vztahem

$$Q_\tau = \frac{\lambda}{d}(t_1 - t_2)S = \frac{\lambda S \Delta t}{d}, \qquad (1)$$



Obr. 2 Jednoduchá stěna

kde λ označuje *součinitel tepelné vodivosti* materiálu desky. Jednotkou λ je $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$.
Ukažme si nyní použití vztahu (1) při řešení konkrétních úloh.

Příklad 8 – chata 1

Dřevěná chata má tři stěny, strop a podlahu dobře izolovány. Jen jedna stěna, v níž je krb, je cihlová. Má rozměry: šířka stěny 4,5 m, výška 2,8 m, tloušťka 30 cm. Součinitel teplotní vodivosti materiálu cihel je 0,60 $\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Uvnitř chaty se udržuje teplota 20 °C, vně je −10 °C. Určete únik tepla za dobu 10 hodin a minimální výkon zahřívacího zařízení, jež udržuje stálou teplotu.

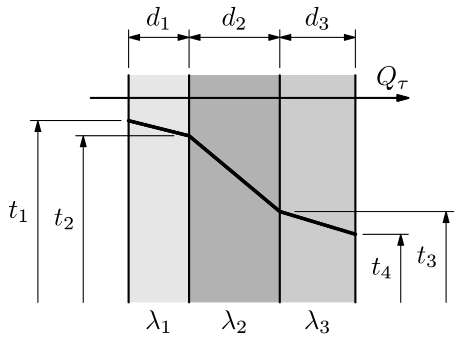
Řešení

Únik tepla určíme ze vztahu $Q = Q_\tau \cdot \tau = \dfrac{\lambda S\ \Delta t}{d}\tau = 27{,}2$ MJ. Minimální příkon pak je $P = \dfrac{Q}{\tau} = Q_\tau = \dfrac{\lambda S\ \Delta t}{d} = 756$ W.

Nyní si představme situaci, že bychom chtěli snížit tepelné ztráty při průchodu tepla touto stěnou, a to tak, že z obou stran stěny uděláme omítku. Stěna se po této úpravě již bude skládat z více vrstev. My si dále ukážeme, jak počítat tepelný tok v tomto případě.

4.1.2 Průchod tepla složenou rovinnou stěnou

V praktickém životě se můžeme setkat se situací, že máme rovinnou stěnu složenou z několika vrstev různé tloušťky a různé tepelné vodivosti při stejné průtokové ploše (obr. 3). Odvodíme vztah pro tepelný tok při průchodu tepla touto stěnou.



Obr. 3 Složená stěna

Napíšeme rovnice pro tepelné toky procházející jednotlivými vrstvami:

$$Q_{\tau 1} = \frac{\lambda_1}{d_1} S(t_1 - t_2), \tag{2}$$

$$Q_{\tau 2} = \frac{\lambda_2}{d_2} S(t_2 - t_3), \tag{3}$$

$$Q_{\tau 3} = \frac{\lambda_3}{d_3} S(t_3 - t_4). \tag{4}$$

Protože ustálený tepelný tok procházející všemi stěnami má stejnou velikost, tj. $Q_{\tau 1} = Q_{\tau 2} = Q_{\tau 3} = Q_\tau$, můžeme rovnice (2), (3), (4) postupně přepsat do tvarů

$$t_1 - t_2 = \frac{Q_\tau}{\lambda_1 S} d_1,$$

$$t_2 - t_3 = \frac{Q_\tau}{\lambda_2 S} d_2,$$

$$t_3 - t_4 = \frac{Q_\tau}{\lambda_3 S} d_3.$$

Po sečtení těchto rovnic dostaneme vztah

$$t_1 - t_4 = \frac{Q_\tau}{S} \left(\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} \right).$$

Z tohoto vztahu nyní vyjádříme Q_τ a obdržíme

$$Q_\tau = \frac{t_1 - t_4}{\dfrac{d_1}{\lambda_1} + \dfrac{d_2}{\lambda_2} + \dfrac{d_3}{\lambda_3}} S. \tag{5}$$

Protože jednotlivé sčítance ve jmenovateli zlomku vyjadřují tepelné odpory jednotlivých vrstev, značí součet $R = \dfrac{d_1}{\lambda_1} + \dfrac{d_2}{\lambda_2} + \dfrac{d_3}{\lambda_3}$ celkový *tepelný odpor* složené stěny. Často se také používá zjednodušení $k = \dfrac{1}{R}$, kde k definuje *součinitel prostupu tepla stěnou*, tj.

$$k = \frac{1}{\dfrac{d_1}{\lambda_1} + \dfrac{d_2}{\lambda_2} + \dfrac{d_3}{\lambda_3}}. \tag{6}$$

Pak můžeme vztah (5) zjednodušit na tvar

$$Q_\tau = k(t_1 - t_4)S. \tag{7}$$

Tento postup uvedený na příkladu tří vrstev lze dále zobecnit pro n vrstev; pak platí

$$Q_\tau = k(t_1 - t_{n+1})S, \tag{8}$$

kde

$$k = \frac{1}{\dfrac{d_1}{\lambda_1} + \dfrac{d_2}{\lambda_2} + \ldots + \dfrac{d_n}{\lambda_n}}. \tag{9}$$

V následující situaci si ukážeme, jak odvozené vztahy používáme při řešení problému.

Příklad 9 – chata 2

Aby se v příkladu 8 ztráty tepla zmenšily, byla cihlová stěna nahozena z vnějšku speciální omítkou tloušťky $d_1 = 5$ cm se součinitelem $\lambda_1 = 0{,}25\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$, cihlová stěna má $\lambda_2 = 0{,}60\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ a vnitřní omítka o tloušťce $d_3 = 2$ cm má součinitel $\lambda_3 = 0{,}70\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Jak se zmenšily ztráty a musí být nyní výkon zahřívacího zařízení?

Řešení

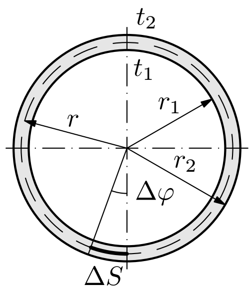
Do vztahu (5) dosadíme za $t_1 = 20\ {}^\circ\mathrm{C}$, $t_4 = -10\ {}^\circ\mathrm{C}$. Další údaje dosazujeme dle zadání příkladů 8, 9. Dostaneme $Q = Q_\tau \cdot \tau = 18{,}7$ MJ, výkon $P = \dfrac{Q}{\tau} = Q_\tau = 519$ W.

Doposud jsme se zabývali situacemi, kdy teplo prostupovalo rovinnými stěnami, v praxi se ale také velmi často setkáváme s prostupem tepla stěnou potrubí. V další části si ukážeme, jak postupovat v tomto případě.

4.1.3 Průchod tepla jednoduchou válcovou stěnou (potrubím)

a) Tenkostěnné potrubí

Zvolíme element ΔS plochy podle obr. 5 (tuto plošku budeme při našich úvahách považovat za rovinnou). Označíme-li L délku potrubí, pak můžeme psát $\Delta S = Lr\Delta\varphi$, kde $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{n}$, kde n je počet dílků, $r = \dfrac{r_1 + r_2}{2}$ je střední hodnota poloměru. Potom $\Delta S = Lr\dfrac{2\pi}{n}$. Tepelný tok celou plochou pak dostaneme jako součet n toků jednotlivými ploškami.



Obr. 5 Tenkostěnné potrubí

S použitím vztahu (1) dostaneme

$$Q_\tau = n \cdot \frac{\lambda}{r_2 - r_1} \cdot (t_1 - t_2) \cdot L\frac{r_1 + r_2}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}.$$

po úpravě

$$Q_\tau = \pi\frac{r_1 + r_2}{r_2 - r_1}\lambda L(t_1 - t_2). \tag{10}$$

Získaný výsledek odpovídá situaci, jako kdybychom celý válec rozbalili do roviny a získali rovinnou desku o rozměrech L a $2\pi r = \pi(r_1 + r_2)$ a tloušťce $d = r_2 - r_1$.

Poznámka

Tento odvozený vzorec je přibližný a dá se velmi dobře použít pro potrubí s tenkými stěnami, tj. když $\dfrac{r_2}{r_1} < 1{,}5$ (pak je pro $\dfrac{r_2}{r_1} = 1{,}5$ chyba výpočtu 1,2 %).

b) Tlustostěnné potrubí

V případě, že potrubí je tlustostěnné, tj. $\dfrac{r_2}{r_1} > 1{,}5$, je možno pomocí vyšší matematiky odvodit přesný vztah

$$Q_\tau = \frac{2\pi\lambda L}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}(t_1 - t_2). \tag{11}$$

Odvození vztahu (11) bude pro zájemce ukázáno v Doplňku 1 na konci této podkapitoly 4.1.

4.1.4 Průchod tepla složenou válcovou stěnou

Při odvozování příslušného vztahu bychom postupovali analogicky jako ve 4.1.2. Pro válcovou stěnu složenou z n vrstev bychom mohli psát

$$Q_\tau = \frac{2\pi L(t_1 - t_{n+1})}{\frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{r_3}{r_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{r_{n+1}}{r_n}}. \tag{12}$$

Příklad 10 – izolované potrubí

Potrubí o vnitřním průměru 160 mm a tloušťce stěny 5 mm má dvě izolační vrstvy. Tloušťka první vrstvy je $d_1 = 30$ mm, druhé $d_2 = 50$ mm. Určete tepelné ztráty na 1 m potrubí. Tepelná vodivost stěny potrubí $\lambda_1 = 60\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$, tepelná vodivost první izolace je $\lambda_2 = 0{,}15\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$, tepelná vodivost druhé izolace je $\lambda_3 = 0{,}10\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$. Vnitřní povrchová teplota potrubí je $t_1 = 300\ {}^\circ\mathrm{C}$, vnější povrchová teplota izolace je $t_4 = 50\ {}^\circ\mathrm{C}$. Jak se změní ztráty potrubí, zaměníme-li pořadí izolačních vrstev?

Řešení

Při řešení použijeme vztah (12), který přepíšeme na tvar pro tři vrstvy, tj.

$$Q_\tau = \frac{2\pi L(t_1 - t_4)}{\frac{1}{\lambda_1}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\lambda_2}\ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{\lambda_3}\ln\frac{r_4}{r_3}}.$$

Do tohoto vztahu pak dosadíme $r_1 = 80$ mm, $r_2 = 85$ mm, $r_3 = 115$ mm, $r_4 = 165$ mm, $L = 1$ m. Po dosazení dostaneme $Q_\tau = 279{,}2$ W. Na 1 m délky potrubí jsou tedy ztráty 279,2 W.

Pokud bychom zaměnili pořadí izolačních vrstev (proveďte sami), zvýší se ztráty na $Q'_\tau = 289{,}2$ W, tj. o 3 % původní hodnoty (před záměnou pořadí vrstev).

Další úloha je složitější, jedná se o úlohu z 28. ročníku FO – – domácí kolo – 7. úloha kategorie B.

Příklad 11 – dálkový teplovod

Dálkovým teplovodem délky $L = 10$ km o vnitřním poloměru potrubí $r_1 = 40$ cm je vedena horká voda z teplárny do sídliště a ochlazená voda zpět.

Potrubí je izolováno vrstvou tepelné izolace tloušťky $d = 15$ cm a měrné tepelné vodivosti $\lambda = 0{,}080\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Na výstupu z teplárny je teplota vody $t_1 = 130\ {}^\circ\mathrm{C}$, na vstupu je teplota vracející se vody $t_2 = 60\ {}^\circ\mathrm{C}$.

a) Jakou rychlostí proudí voda v potrubí a jaký je objemový tok vody v potrubí, dodává-li teplárna tepelný výkon $Q_\tau = 80$ MW?

b) Jaký je rozdíl tlaků na vstupu a výstupu čerpadla, je-li jeho měrná práce $w = 820\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$ (tj. práce potřebná na přečerpání 1 kg vody)?

c) Jaká je účinnost přenosu tepla s ohledem na ztráty tepla vedením izolační vrstvou do okolí, předpokládáme-li teplotu pláště v obou směrech $t_3 = 20\ {}^\circ\mathrm{C}$?

d) Jaký pokles teploty vody na trase ke spotřebiteli představuje tepelná ztráta?

Pro zjednodušení výpočtu v částech a), b) zanedbáváme pokles teploty podél trasy. Uvažte, zda tato zjednodušení ovlivní výsledky. Řešte nejprve obecně, potom pro dané hodnoty; hustota vody je $\varrho = 1\,000\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, měrná tepelná kapacita vody $c = 4\,200\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$.

Řešení

a) Označíme m hmotnost vody, která proteče potrubím za dobu τ. Potom platí

$$cm(t_1 - t_2) = Q_\tau \tau.$$

Tuto rovnici můžeme přepsat pomocí objemu a vyjádřit objemový tok vody, tj.

$$c\varrho V(t_1 - t_2) = Q_\tau \tau,$$

z čehož

$$Q_\mathrm{v} = \frac{V}{\tau} = \frac{Q_\tau}{c\varrho(t_1 - t_2)} = 0{,}272\ \mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}.$$

Potom rychlost proudění $v = \dfrac{Q_\mathrm{v}}{S} = \dfrac{Q_\mathrm{v}}{\pi r_1^2} = 0{,}54\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

b) Když čerpadlo vyčerpá vodu o hmotnosti m, jejíž objem označíme V, o výškový rozdíl Δh, vykoná práci

$$mw = mg\Delta h.$$

Protože rychlost vody se nemění, platí podle Bernoulliho rovnice

$$\Delta p = \varrho g \Delta h = \frac{m}{V} g \Delta h = \frac{mw}{V} = w\varrho = 8{,}2 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}.$$

c) Plášť izolační vrstvy má střední poloměr $r = r_1 + \dfrac{d}{2}$ a délku L, má tedy povrch $2\pi r L = \pi(2r_1 + d)L$. Na trase od teplárny k sídlišti se za dobu τ odvede teplo

$$Q_1 = \pi(2r_1 + d)L\lambda\frac{t_1 - t_3}{d}\tau.$$

Obdobně na trase od sídliště k teplárně se odvede do okolí teplo

$$Q_2 = \pi(2r_1 + d)L\lambda\frac{t_2 - t_3}{d}\tau.$$

Ztrátě tepla odpovídá ztrátový výkon

$$P_\mathrm{z} = \frac{Q_1 + Q_2}{\tau} = \frac{\pi(2r_1 + d)L\lambda(t_1 + t_2 - 2t_3)}{d} = 2{,}76\ \mathrm{MW}.$$

Účinnost přenosu

$$\eta = \frac{Q_\tau - P_\mathrm{z}}{Q_\tau} = 0{,}97, \text{ tedy } \eta = 97\ \%.$$

d) Označíme t_1' teplotu vody přitékající do sídliště. Potom platí

$$Q_1 = cm(t_1 - t_1').$$

Po dosazení za Q_1 a zavedení objemového toku je

$$t_1 - t_1' = \frac{\pi(2r_1 + d)L\lambda(t_1 - t_3)\varrho}{Q_\mathrm{V} c d} = 1{,}53\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Poznámka

1. Toto je případ *tenkostěnného potrubí*, o němž jsme v odstavci 4.1.3 psali. V příkladu 11 jistě platí, že $\dfrac{r_1 + d}{r_1} = \dfrac{40 + 15}{40} = 1{,}375 < 1{,}5$. Proto také bylo možno při řešení této úlohy použít v případě výpočtu tepelných ztrát vzniklých vedením vztah pro přibližné výpočty odpovídající vztahu (10).
2. V úloze jsme uvažovali pouze tepelné ztráty vedením. Ve skutečnosti víme, že v teplovodu vznikají také tepelné ztráty prouděním a zářením, které jsme však při řešení úlohy neuvažovali.

Doplněk 1

a) Analýza prostupu tepla u trubek

U trubkových stěn, které mají malou tloušťku ve srovnání s vnitřním průměrem, lze počítat přenos tepla pomocí vzorce pro rovinnou stěnu, kterou bychom získali rozvinutím střední kružnice válcové stěny, tj. (10). V porovnání s přesným vzorcem (11) (hodnotu jsme označili Q_τ') činí chyba:

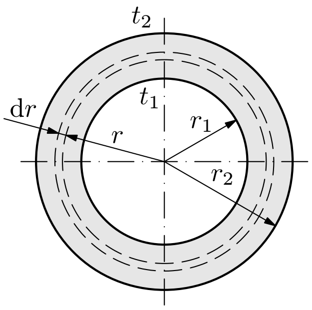
$$\frac{Q'_\tau - Q_\tau}{Q'_\tau} = 1 - \frac{Q_\tau}{Q'_\tau} = 1 - 0{,}5\frac{\frac{r_2}{r_1}+1}{\frac{r_2}{r_1}-1}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Po dosazení $\frac{r_2}{r_1} = 1{,}5$ dostaneme již dříve uvedenou chybu 1,2 %. Přenos tepla u trubek s $\frac{r_2}{r_1} < 1{,}5$ je tedy možno počítat pomocí přibližného vzorce (10).

b) Odvození vztahu (11) pomocí vyšší matematiky

Toto odvození je určeno pro zájemce, kteří se již seznámili s vyšší matematikou, přesněji s řešením úloh pomocí diferenciálních rovnic. Odvození vztahu (11) vychází z předpokladu, že se teplota mění jen v radiálním směru, $\lambda = konst.$ (obr. 6). Vytkněme si ve vzdálenosti r od podélné osy válce válcovou vrstvu o tloušťce dr. Tepelný tok Q_τ, který proteče touto vrstvou, je podle Fourierova zákona

$$Q_\tau = -\lambda S\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = -\lambda \cdot 2\pi r L\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r},$$



Obr. 6 K odvození vztahu (11)

znaménko minus je zde proto, že ve směru od středu velikost poloměru r narůstá, zatímco velikost teploty ve válci se zvětšující se vzdáleností od středu klesá. Separací proměnných a následnou integrací přes celou tloušťku stěny obdržíme

$$\mathrm{d}t = -\frac{Q_\tau}{2\pi\lambda L}\frac{\mathrm{d}r}{r},$$

$$t = -\frac{Q_\tau}{2\pi\lambda L}\ln r + C. \tag{13}$$

Použijeme okrajové podmínky: pro $r = r_1$ je $t = t_1$ a obdobně pro $r = r_2$ je $t = t_2$. Dosadíme-li tyto podmínky do (13), dostaneme dvě rovnice

$$t_1 = -\frac{Q_\tau}{2\pi\lambda L}\ln r_1 + C,$$

$$t_2 = -\frac{Q_\tau}{2\pi\lambda L}\ln r_2 + C.$$

Po vzájemném odečtení těchto dvou rovnic dostaneme

$$t_1 - t_2 = \frac{Q_\tau}{2\pi\lambda L}(\ln r_2 - \ln r_1) = \frac{Q_\tau}{2\pi\lambda L}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Hledaný tepelný tok pak bude

$$Q_\tau = \frac{2\pi\lambda L}{\ln\dfrac{r_2}{r_1}}(t_1 - t_2),$$

což je již dříve uvedený vztah (11).

4.2 Přenos tepla prouděním

S přenosem tepla prouděním se setkáváme v praktickém životě velmi často, ať už jde o volné proudění v atmosféře, či k tepelnému přenosu při obtékání nějakých těles. V současné době se také dostává do popředí, jak nejlépe vyřešit problém dobrého chlazení uvnitř počítače. S tímto problémem je možno se blíže seznámit např. v [16].

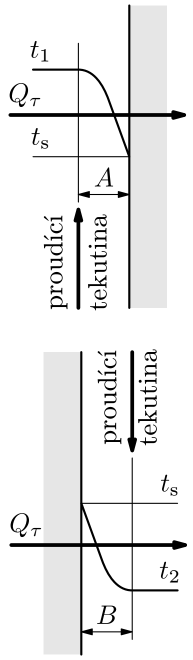
Ke sdílení (přenosu) tepla prouděním dochází například při styku kapaliny nebo plynu s pevnou stěnou. Při tom dochází k ochlazování nebo ohřívání tenké vrstvy tekutiny při stěně (podle toho, je-li teplota stěny vůči tekutině vyšší nebo nižší). Vzniklý rozdíl teplot vrstev pak způsobuje *přirozené proudění* (obr. 7). Na obr. 7 značí A oblast sdílení tepla prouděním[4] z tekutiny do stěny, B značí oblast sdílení tepla prouděním ze stěny do tekutiny.

Rovnice, která vyjadřuje tepelný tok při sdílení tepla prouděním, je dána vztahem

$$Q_\tau = \alpha S \Delta t,$$

kde Q_τ označuje tepelný tok ve wattech, S označuje plochu stěny v m^2, Δt označuje rozdíl teplot ohřívané (ochlazované) tekutiny v kelvinech, α je *součinitel přestupu tepla* ve $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$.

Součinitel α přestupu tepla udává tepelný tok přestupující z kapaliny do stěny (nebo naopak), je-li $S = 1\ m^2$, $\Delta t = 1$ K za dobu 1 sekundy. Velikost součinitele α přestupu tepla nelze obecně vyjádřit jednoduchým početním vztahem, ale je nutné ho pro různé situace počítat, velmi často odhadovat empiricky.



Obr. 7 Sdílení tepla prouděním

[4] Je však nutné si uvědomit, že formulace „sdílení tepla prouděním“ není fyzikálně příliš přesná, ale představuje často používaný termín. Z fyzikálního hlediska je třeba toto formulovat jiným způsobem, a to tak, že neproudí teplo, ale látka s vyšší teplotou, u níž pak dochází k setkání s okolními tělesy, jež zahřívá. Proudí tedy ne teplo, ale médium. V dalším textu tedy pod pojmem proudění tepla budeme rozumět zkrácené vyjádření situace, že toto proudění je způsobeno nějakým médiem.

Je to dáno tím, že velikost α je ovlivněna celou řadou faktorů jako je rychlost proudění tekutiny, tvar, rozměry, tepelná vodivost, tlak, drsnosti stěn, ... atd. Pro jednoduché případy však stačí α pro zadané podmínky vyhledat v odborné literatuře.

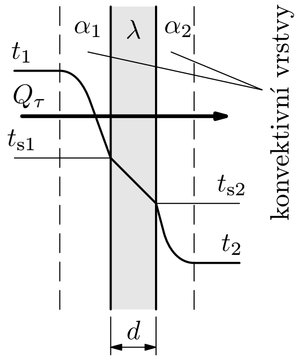
4.2.1 Vedení a prostup tepla rovinnou stěnou

V této části odvodíme vztah pro prostup tepla stěnou. Budeme předpokládat, že teplota před stěnou i za ní je ustálená a že je konstantní i tepelný tok.

Mezi prvním prostředím (α_1) a stěnou dochází ke sdílení tepla prouděním, ve stěně dochází k přenosu tepla vedením (λ) a ze stěny do druhého prostředí opět prouděním (α_2). Ze zákona zachování energie platí

$$Q_{\tau 1} = Q_{\tau 2} = Q_{\tau 3} = Q_\tau,$$

kde $Q_{\tau 1} = \alpha_1 S(t_1 - t_{s1})$, $Q_{\tau 2} = \dfrac{\lambda}{d} S(t_{s1} - t_{s2})$, $Q_{\tau 3} = \alpha_2 S(t_{s2} - t_2)$.



Obr. 8 Vedení a prostup tepla rovinnou stěnou

Z uvedených rovnic nyní vyjádříme teplotní rozdíly, pak tyto rovnice sečteme. Dostaneme

$$\begin{aligned} t_1 - t_{s1} &= \frac{Q_\tau}{\alpha_1 S}, \\ t_{s1} - t_{s2} &= \frac{Q_\tau d}{\lambda S}, \\ t_{s2} - t_2 &= \frac{Q_\tau}{\alpha_2 S}, \end{aligned}$$

po sečtení $t_1 - t_2 = \dfrac{Q_\tau}{S}\left(\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{d}{\lambda} + \dfrac{1}{\alpha_2}\right)$.

Nyní opět vyjádříme $Q_\tau = \dfrac{t_1 - t_2}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \dfrac{d}{\lambda} + \dfrac{1}{\alpha_2}} S$, což je tepelný tok při celkovém prostupu tepla stěnou s konvektivním obložením.

Poznámka

Analogickým způsobem bychom mohli odvodit vzorec pro celkový prostup tepla stěnou skládající se z n vrstev. Výsledný vztah pro Q_τ by pak měl tvar

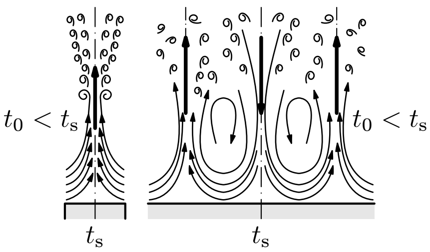
$$Q_\tau = \frac{t_1 - t_2}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{d_i}{\lambda_i} + \dfrac{1}{\alpha_2}} S,$$

kde můžeme označit výraz $\dfrac{1}{\alpha_1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{d_i}{\lambda_i} + \dfrac{1}{\alpha_2} = \dfrac{1}{k}$, kde k je *celková tepelná vodivost stěny*. Vztah pro Q_τ lze pak zjednodušit na tvar

$$Q_\tau = k(t_1 - t_2)S.$$

Podívejme se nyní na problém několika zahřátých (chladných) rovinných desek při samovolném proudění. Do této oblasti patří např. obor celé topné techniky, ale i případy, v nichž dochází ke ztrátám tepla do okolí. V těchto situacích se také může uplatnit vliv sálání, o kterém se zmíníme později (s tím pak musíme počítat zvlášť). Přirozeného proudění je nejprve jednoznačně laminární.

S rostoucí výškou topné plochy však dochází k tomu, že proudění začíná být čím dál více vírové, až nakonec přejde v proudění turbulentní (případně se také může oddělit od stěny – obr. 9). K turbulentnímu proudění také dochází při větších teplotních rozdílech mezi deskou a tekutinou (pro $\Delta t > 15$ °C). Z tohoto důvodu není v těchto případech součinitel α přestupu tepla konstantní.



Obr. 9 Proudění u zahřátých rovinných desek konečných (vlevo) a nekonečných (vpravo) rozměrů při samovolném proudění

Výše popsanou situaci si nyní ilustrujme příkladem.

Příklad 12 – okna

Majitel měl na chatě „jednoduchá" okna o rozměrech 60 cm × 120 cm, sklo o tloušťce 3 mm má součinitel $\lambda = 0{,}75\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Aby zlepšil tepelnou izolaci, rozhodl se sklo zdvojit. Na jednom okně odstranil tmel a přidal sklo těsně na sklo již existující. Jeho syn však umístil sklo na rám tak, že vznikla vzduchová mezera o tloušťce 4 cm. Jak se změnila tepelná izolace v prvním a jak ve druhém případě. Uvažujte, že $\alpha = 20\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$, je stejně velké pro všechna prostředí.

Řešení

Původní bylo vedení tepla, tj. $Q_{\tau 0} = \lambda \frac{S}{d} \Delta t$, po první úpravě přibližně $Q_{\tau 1} = \lambda \frac{S}{2d} \Delta t$. Tedy tok tepla se snížil na polovinu původního, neboť se dvojnásobně zvětšila tloušťka skla. Tato úvaha však není správná, protože se v ní neuvažuje s prouděním. Tedy lépe bychom měli pro původní stav psát

$$Q_{\tau 0} = \frac{S\Delta t}{\frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha}} = \frac{S\Delta t}{\frac{2}{\alpha} + \frac{d}{\lambda}}.$$

Po zdvojnásobení skla dostaneme

$$Q_{\tau 1} = \frac{S\Delta t}{\frac{2}{\alpha} + \frac{2d}{\lambda}}.$$

$$\text{Poměr } p_1 = \frac{Q_{\tau 1}}{Q_{\tau 0}} = \frac{\frac{2}{\alpha} + \frac{d}{\lambda}}{\frac{2}{\alpha} + \frac{2d}{\lambda}} = \frac{\frac{2\lambda}{\alpha} + d}{\frac{2\lambda}{\alpha} + 2d} < 1.$$

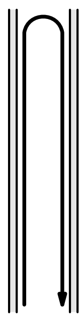
Po další úpravě okna

$$Q_{\tau 2} = \frac{S\Delta t}{\frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha}} = \frac{S\Delta t}{\frac{4}{\alpha} + \frac{2d}{\lambda}}.$$

Poměr

$$p_2 = \frac{Q_{\tau 2}}{Q_{\tau 0}} = \frac{\frac{2}{\alpha} + \frac{d}{\lambda}}{2\left(\frac{2}{\alpha} + \frac{d}{\lambda}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Druhý způsob je ekonomičtější.



Obr. 10 Model proudění uvnitř zdvojeného okna

Poznámka

Takto se provádělo zateplování oken v dřívějších dobách. Dnes se už používá celá řada moderních a efektivních metod – k jejich pochopení však je třeba důkladně znát fyzikální základy o sdílení tepla. Bližší informace o novějších metodách zateplování oken je možno nalézt např. na *http://www.tospur.cz* nebo na *http://www.atypcentrum.cz/zateplovani-oken.html*.

4.2.2 Ustálený prostup a vedení tepla válcovou stěnou

Jsou-li r_1 a r_2 vnitřní a vnější poloměry potrubí, můžeme analogicky jako pro prostup rovinnou stěnou (s užitím vztahu (11) a obdobně dle vztahu (12)) psát

$$Q_\tau = \frac{(t_1 - t_2)L}{\frac{1}{2\pi r_1 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi r_2 \alpha_2}}. \tag{14}$$

Doplněk 2

Ze vzorce (14) je vidět, že při zvětšení vnějšího poloměru r_2 trubky se zvětší tepelný odpor $\frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1}$ vrstvy a zmenší se tepelný odpor $\frac{1}{2\pi r_2 \alpha_2}$ přestupu tepla na vnějším povrchu trubky. Existuje tedy nějaký optimální průměr $(r_2)_{\mathrm{opt}}$, při němž je celková tepelná vodivost

$$k = \frac{1}{\frac{1}{2\pi r_1 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi r_2 \alpha_2}}$$

největší, a tím také největší prostup tepla[5]. Extrémní hodnotu poloměru r_2 určíme derivací výrazu podle proměnné r_2 ($r_2 > r_1$ při $r_1, r_2 \neq 0$, $r_1 = konst.$)

$$\frac{1}{2\pi r_1 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi r_2 \alpha_2}.$$

Tuto derivaci pak položíme rovnou nule, tj.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_2}\left[\frac{1}{2\pi r_1 \alpha_1} + \frac{1}{2\pi\lambda}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi r_2 \alpha_2}\right] = \frac{1}{2\pi\lambda r_1}\frac{r_1}{r_2} - \frac{1}{2\pi\alpha_2 r_2^2} = 0.$$

Dostaneme

$$(r_2)_{\mathrm{opt}} = \frac{\lambda}{\alpha_2}.$$

Tento vztah definuje *Biotovo kritérium*

$$(Bi)_{\mathrm{opt}} = \frac{\alpha_2}{\lambda} = 1,$$

pro $(r_2)_{\mathrm{opt}}$. Je-li $r_2 < (r_2)_{\mathrm{opt}}$ způsobuje zvětšení tloušťky trubkové stěny zvýšení prostupu tepla.

Pro ocelové trubky s $\lambda = 60\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ při $\alpha_2 = 10\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ (což odpovídá přestupu trubek při volném proudění vzduchu) je optimální hodnota r_2 značně velká: $(r_2)_{\mathrm{opt}} = 6$ m.

Při velmi intenzivní výměně tepla ocelových trubek s okolním prostředím $\alpha_2 = 10^4\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ (což odpovídá přestupu tepla u trubek při nuceném proudění vody) je optimální poloměr malý $(r_2)_{\mathrm{opt}} = 6$ mm.

[5] Pod pojmem optimální budeme chápat situaci, kdy dochází k největšímu prostupu tepla – pak dochází k nejlepšímu chlazení.

Pro tepelnou izolaci s $\lambda = 0{,}1\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ při $\alpha_2 = 10\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$ je $(r_2)_{\mathrm{opt}} = 10$ mm. Při poloměrech válcových izolačních obalů menších než $(r_2)_{\mathrm{opt}}$ ztrácí tepelná izolace svoji úlohu a při zvětšení tloušťky izolačního obalu se prostup tepla zvětšuje. (Tento případ odpovídá izolaci elektrických vodičů.)

4.2.3 Přestup tepla u těles ohřívaných elektricky

Při průchodu elektrického proudu vodičem vzniká *Joulovo teplo*

$$P = Q_\tau = RI^2,$$

které zde normujeme na dobu 1 sekundy.
Pro vodiče s konstantním příčným řezem S, délce L a měrném elektrickém odporu ϱ_{el} se elektrický odpor určuje podle vztahu

$$R = \varrho_{\mathrm{el}} \frac{L}{S}.$$

Se zvýšením teploty se elektrický odpor těles zvětšuje a obvykle platí

$$R = R_0(1 + \alpha_{\mathrm{el}} t),\ \text{kde } [t] = 1\ {}^\circ\mathrm{C},\ R = R_0 \text{ pro } t = 0\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

Pokud bychom výše uvedený vztah vyjádřili pomocí měrného elektrického odporu ϱ_{el}, dostaneme

$$\varrho_{\mathrm{el}} = \varrho_{\mathrm{el0}}(1 + \alpha_{\mathrm{el}} t). \tag{15}$$

S použitím výše uvedených vztahů je tepelný tok zdrojů při elektrickém ohřevu ve vodiči dán vztahem

$$Q_\tau = \varrho_{\mathrm{el}} \frac{L}{S} I^2, \tag{16}$$

kam bychom za ϱ_{el} dosadili ze vztahu (15).
Přestup tepla se zdroji elektrického ohřevu pro vodiče s konstantním příčným řezem se určí podle vztahu

$$Q_\tau = S_0 \alpha (t_{\mathrm{s0}} - t_0) = 2\pi r L \alpha (t_{\mathrm{s0}} - t_0),$$

kde $t_{\mathrm{s0}} - t_0$ je rozdíl teploty t_{s0} povrchu vodiče a teploty t_0 okolního prostředí.

Při stacionárním ději je přestup tepla v rovnováze s vývinem tepla ze zdrojů elektrického ohřevu, tj. můžeme psát

$$\varrho_{\mathrm{el}} \frac{L}{S} I^2 = 2\pi r L \alpha (t_{\mathrm{s0}} - t_0), \tag{17}$$

z čehož

$$t_{\mathrm{s0}} = t_0 + \frac{\varrho_{\mathrm{el}}}{S \cdot 2\pi r \alpha} I^2.$$

Z podmínky pro přípustnou teplotu ohřátí vodiče ($t_{\mathrm{s0}} = t_{\mathrm{max}}$) se určí přípustná hodnota proudu procházejícího vodičem

$$I_{\mathrm{max}} = \sqrt{(t_{\mathrm{max}} - t_0) \frac{2\pi r \alpha S}{\varrho_{\mathrm{el}}}} = \sqrt{(t_{\mathrm{max}} - t_0) \frac{2\pi^2 \alpha r^3}{\varrho_{\mathrm{el}}}}, \tag{18}$$

kam jsme za S dosadili $S = \pi r^2$ pro vodiče o kruhovém průřezu.

Příklad 13 – tavná pojistka 1

Tavná pojistka je tvořena měděným vodičem bez izolace, jehož příčným řezem je kruh o poloměru $r = 0{,}05$ mm. Okolí vodiče pojistky tvoří vzduch, vodič není v uzavřeném obalu. Teplo, vzniklé průchodem elektrického proudu, proudí do okolí, $\alpha = 20\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$. Teplota tání mědi $t_\mathrm{t} = 1\,083\ °\mathrm{C}$, měrný elektrický odpor mědi při teplotě 20 °C je $\varrho_{\mathrm{el}0} = 17{,}8 \cdot 10^{-9}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$, $\alpha_\mathrm{el} = 4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K^{-1}}$. Určete, jaký maximální proud může téci pojistkou, aby se nepřetavila. Při řešení uvažujte, že teplo je z pojistky odváděno pouze prouděním.

Řešení

Použitím vztahu (15) odhadneme měrný elektrický odpor mědi při teplotě tání, tj. $\varrho_\mathrm{el} = 9{,}35 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$. Pak do vztahu (18) dosadíme $t_{\mathrm{s}0} = t_\mathrm{t}$. Pro proud I_max pak dostaneme

$$I_\mathrm{max} = \sqrt{(t_\mathrm{t} - t_0)\frac{2\pi^2 \alpha r^3}{\varrho_\mathrm{el}}} = 0{,}75\ \mathrm{A}.$$

Pojistka se přepálí, bude-li jí procházet proud 0,75 A.

Poznámka

Ve skutečnosti může touto pojistkou procházet proud o něco větší, protože kromě proudění zde rozhoduje také vliv *záření*, což si ukážeme v další části. Rovněž je třeba si také uvědomit, že pojistka v příkladu 13 je model – skutečné pojistky představují uzavřený prostor.

4.3 Sdílení tepla sáláním (zářením)

Sálání souvisí se změnami vnitřní energie tělesa a následně těleso vydává záření. Toto záření je pak vysíláno ve formě elektromagnetických vln do prostoru, který těleso obklopuje. Dopadne-li toto záření na nějaké jiné těleso a dojde-li k pohlcení tohoto záření, zvýší se vnitřní energie tohoto tělesa. Souhrnně se vzájemné sálání a pohlcování při dvou nebo i více tělesech s různými teplotami nazývá *sdílení tepla sáláním*. Schematicky lze tyto děje znázornit takto:

Zářící těleso	→	Záření	→	Zvětšení vnitřní energie absorbujícího tělesa

Obr. 11 Sdílení tepla sáláním

Sálání je přirozená vlastnost těles a můžeme říci, že při něm každé těleso vysílá záření. Dopadne-li toto záření na jiné těleso, je částečně pohlceno, část se odráží a část prochází tělesem. Pohlcené záření způsobuje zvýšení vnitřní energie tělesa, odražené záření dopadá na jiná tělesa a procházející záření přechází na jiná tělesa.

Pohltivost a odrazivost záření u tělesa závisí především na jakosti povrchu a také na barvě povrchu. V praxi má tento poznatek význam především při konstrukci různých zařízení, např. bílé chladničky a mrazáky (aby se co nejvíce záření odrazilo), v létě nosíme především světlé oblečení. Chceme-li naopak, aby se co nejvíce záření pohltilo, volíme černou barvu povrchu. Předchozí poznatky lze označit jako empirické. Ve skutečnosti je radiodistribuce záření velmi složitý problém kvantové mechaniky.

Pokud např. budeme stát v létě na poledním slunci, pocítíme velmi silné zahřívání, což je mj. způsobeno tím, že pohlcujeme tepelné záření od Slunce. Co je však důležité si uvědomit, že pro přenos tepla zářením není potřeba žádné hmotné prostředí, protože jde o elektromagnetické vlnění.

Označíme-li P_{r} výkon vyzařujícího předmětu ve wattech, S obsah plochy povrchu tohoto předmětu v m^2 a T teplotu předmětu v kelvinech, platí

$$P_{\mathrm{r}} = \sigma\varepsilon S\, T^4,$$

kde $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-4}$ je tzv. *Stefanova-Boltzmannova konstanta*, ε označuje emisivitu předmětu. Hodnota ε závisí na materiálu tělesa a platí $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Je-li $\varepsilon = 1$, hovoříme o *černém tělese* (teoretický model), nebo dokonalém zářiči.

Kromě vyzařování může předmět také pohlcovat záření z jiného tepelného zdroje majícího teplotu T_0. Platí analogický vztah

$$P_{\mathrm{a}} = \sigma\varepsilon S\, T_0^4.$$

V reálných situacích často však nastává obojí: předmět o teplotě T vyzařuje energii do svého okolí a současně energii z okolí přijímá např. od jiného předmětu o teplotě T_0. Celkový výkon P (pokud nepočítáme s odrazem záření $\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{a}}$) odevzdaný tepelným zářením je pak dán vztahem

$$P = P_{\mathrm{r}} - P_{\mathrm{a}} = \sigma\varepsilon S(T^4 - T_0^4).$$

V našich dalších úvahách se již budeme zabývat pouze zářením absolutně černého tělesa, tj. dokonalým zářičem, pro který $\varepsilon = 1$ dle definice.

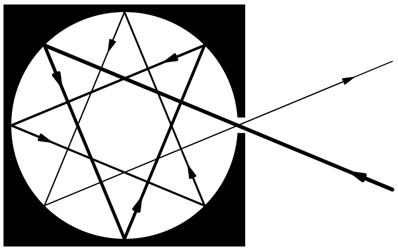
4.3.1 Tepelné záření černého tělesa

V předchozím výkladu jsme konstatovali, že pro výkon záření černého tělesa $(\varepsilon = 1)$ platí Stefanův-Boltzmannův zákon

$$P = \sigma T^4 S.$$

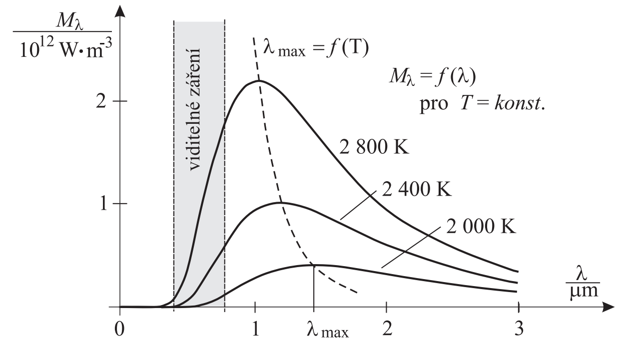
Podívejme se nyní na černé těleso podrobněji. Na prvním místě je třeba uvést, že černé těleso představuje pouze určitý fyzikální model. Základní požadavek kladený na tento model je, že černé těleso pohlcuje veškeré záření, které na toto těleso dopadá. Nedochází zde k žádnému odrazu záření.

Za jeden z nejvýstižnějších modelů černého tělesa se považuje dutina, jejíž vnitřní povrch je pokryt např. sazemi. Po vniku elektromagnetického záření do dutiny, se při opakovaných odrazech od stěny dutiny veškeré záření pohltí (obr. 12). Otvor takto vzniklé dutiny se nám pak jeví jako černé těleso, tedy jako dokonalý zářič při dané teplotě T.



Obr. 12 Model černého tělesa

Při určité teplotě T vyzařuje černé těleso do okolí elektromagnetické vlnění všech vlnových délek (vlnění však nejsou tímto tělesem vyzařována se stejnou intenzitou). Nejlépe je to vidět graficky: na vodorovnou osu grafu vynášíme vlnovou délku λ zdroje záření, na svislé ose pak je funkce $M_\lambda = f(\lambda, T)$, *spektrální hustota vyzařování*. Různé křivky pak odpovídají různým teplotám zdroje.



Obr. 13 Rozdělení energie ve spektru černého tělesa

Graf ukazuje, že při vyšší teplotě je celková energie záření větší (zvětšuje se plocha vymezená grafem funkce $M_\lambda = f(\lambda, T)$). Největší hodnota M_λ se pak posouvá ke kratším vlnovým délkám. Vlnová délka $\lambda_{\max}$ pak odpovídá maximální hodnotě spektrální hustoty vyzařované při dané teplotě, dokonalého zářiče. Z grafu je vidět, že $\lambda_{\max}$ se zmenšuje při nárůstu T.

Na konci 19. století rakouský fyzik *W. Wien* objevil závislost $\lambda_{\max}$ a T (spojnice vrcholů křivek), *Wienův posunovací zákon*

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

kde b je konstanta $b = 2{,}8979 \cdot 10^{-3}$ m $\cdot$ K $\doteq 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ m $\cdot$ K.

V dalším vývoji se pak fyzici pokusili nalézt vztah pro funkci M_λ. Hledanou funkci nakonec nalezl německý fyzik *M. Planck*, *Planckův vyzařovací zákon*

$$M(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}.$$

My se však touto závislostí zabývat nebudeme (přesahovalo by to plánovaný rozsah tohoto studijního textu). Lze ji i s důsledky nalézt ve vysokoškolských učebnicích fyziky.

Nyní se již podíváme na řešení úloh týkajících se záření černého tělesa.

Příklad 14 – teplota sluneční fotosféry

Určete, jaká je teplota sluneční fotosféry, když předpokládáte, že ve slunečním spektru připadá Wienovo maximum na vlnovou délku $\lambda = 480$ nm. Předpokládejte, že fotosféra Slunce vyzařuje jako absolutně černé těleso.

Řešení

Z Wienova posunovacího zákona $\lambda = \dfrac{b}{T}$ vyjádříme teplotu T a dosadíme, tj.

$$T = \frac{b}{\lambda} = \frac{2{,}89 \cdot 10^{-3}}{480 \cdot 10^{-9}}\ \mathrm{K} = 6\,000\ \mathrm{K}.$$

V praxi takto teplotu fotosféry nelze určovat, neboť polohu $\lambda_{\max}$ nelze ve spektru hvězd spolehlivě určit.

Příklad 15 – planetka

a) S použitím údaje o teplotě fotosféry Slunce z předchozího příkladu určete teplotu povrchu rychle se otáčející planetky. Úhlový průměr Slunce pozorovaný z planetky je $\alpha = 1{,}5°$. Předpokládejte, že planetka nemá žádné vnitřní zdroje tepla.

b) Určete, jak by se musela změnit vzdálenost planetky od Slunce, aby teplota jejího povrchu poklesla o 100 K.

Řešení

a) Budeme uvažovat, že planetka i fotosféra Slunce vysílají i přijímají záření jako černá tělesa. Označíme teplotu fotosféry Slunce T_0, poloměr Slunce R, poloměr planetky r, teplotu povrchu planetky T a vzdálenost mezi Sluncem a planetkou d. Úhlový průměr Slunce pak je roven $\alpha = \dfrac{2R}{d}$. Na planetku dopadá část tepelného záření vyzařovaného fotosférou Slunce, která je rovna $\dfrac{\pi r^2}{4\pi d^2}$, což odpovídá tepelnému výkonu, přijímaného planetkou od fotosféry Slunce, tj.

$$P = 4\pi R^2 \cdot \sigma T_0^4 \cdot \frac{r^2}{4d^2}.$$

Takový výkon pak musí vysílat i povrch planetky, přičemž budeme uvažovat, že díky rychlému otáčení a dobré tepelné vodivosti je teplota T povrchu planetky rovnoměrně rozložena. Proto také můžeme psát

$$P = 4\pi r^2 \cdot \sigma T^4.$$

Z rovnosti výkonů pak dostaneme

$$4\pi R^2 \cdot \sigma T_0^4 \cdot \frac{r^2}{4d^2} = 4\pi r^2 \cdot \sigma T^4,$$

po úpravě

$$T^4 = T_0^4 \cdot \left(\frac{2R}{d}\right)^2 \cdot \frac{1}{16},$$

z čehož

$$T = \frac{1}{2} T_0 \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2} \cdot 6\,000 \cdot \sqrt{1{,}5 \cdot \frac{\pi}{180}}\ \mathrm{K} = 485{,}4\ \mathrm{K}.$$

b) Na základě řešení úlohy a) můžeme psát

$$T - \Delta T = \frac{1}{2} T_0 \sqrt{\frac{2R}{d'}} = \frac{1}{2} T_0 \sqrt{\frac{2R}{d}} \cdot \sqrt{\frac{d}{d'}},$$

po úpravě

$$T - \Delta T = T \cdot \sqrt{\frac{d}{d'}},$$

z čehož

$$d' = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\Delta T}{T}\right)^2} \cdot d = 1{,}59\, d.$$

Vzdálenost by se musela zvětšit o 59 % původní vzdálenosti.

4.3.2 Průchod elektrického proudu vodičem

V části 4.2.3 jsme se zabývali problémem přestupu tepla u těles ohřívaných elektricky. V této části jsme však uvažovali, že teplo je z vodiče odváděno pouze prouděním.

V následujícím příkladu zkusíme problém chlazení tohoto vodiče řešit z hlediska, že vodič vysílá tepelné záření do okolí jako černé těleso.

Příklad 16 – tavná pojistka 2

Uvažujme vodič z Příkladu 13. Také uvažujme, že proudění v okolí vodiče je možno zanedbat, a že vodič teplo sálá. Určete, jaký největší proud může vodičem procházet, aby se nepřetavil. Získaný číselný výsledek pak porovnejte s výsledkem v Příkladu 13 a proveďte diskusi výsledku.

Řešení

Podle vztahu (16) je tepelný tok zdrojů při elektrickém ohřevu ve vodiči o kruhovém průřezu

$$Q_\tau = \varrho_{\mathrm{el}} \frac{L}{S} I^2 = \varrho_{\mathrm{el}} \frac{L}{\pi r^2} I^2.$$

Výkon odevzdaný tepelným zářením je dán vztahem

$$P = \sigma S_0 (T^4 - T_0^4) = \sigma \cdot 2\pi r L (T^4 - T_0^4),$$

kde T označuje teplotu vodiče, T_0 teplotu okolního prostředí. V rovnovážném stavu platí $P = Q_\tau$, po dosazení dostaneme

$$\sigma \cdot 2\pi r L (T^4 - T_0^4) = \varrho_{\mathrm{el}} \frac{L}{\pi r^2} I^2.$$

Chceme-li určit maximální hodnotu proudu, který může procházet vodičem, pak do výše uvedeného vztahu dosadíme za $T = T_{\mathrm{t}}$, potom $I = I_{\max}$, a z takto vzniklé rovnice vyjádříme $I_{\max}$. Obdržíme

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{2\sigma\pi^2 r^3 (T_{\mathrm{t}}^4 - T_0^4)}{\varrho_{\mathrm{el}}}} = 2{,}25 \text{ A}.$$

Diskuse získaného výsledku:

- Hodnota proudu, při níž dojde k přepálení vodiče, pokud bychom uvažovali pouze proudění, vyšla 0,75 A.
- Pokud bychom uvažovali pouze tepelné záření, pak dostaneme výsledek 2,25 A. Tato hodnota se podstatně více blíží skutečnosti.
- Experimentálně zjištěná hodnota proudu u vodiče o průměru 0,1 mm, při níž dojde k přepálení vodiče, je 2,5 A.

Na základě diskuse zkusme vytvořit model, v němž budeme uvažovat obojí: záření i proudění. Pak můžeme napsat rovnici

$$\varrho_{\mathrm{el}} \frac{L}{\pi r^2} I_{\max}^2 = 2\pi r L \alpha (T_{\mathrm{t}} - T_0) + \sigma (T_{\mathrm{t}}^4 - T_0^4) 2\pi r L.$$

Po vyjádření $I_{\max}$ a dosazení dostaneme

$$I_{\max} = \sqrt{\frac{2\pi^2 r^3}{\varrho_{\mathrm{el}}} \left[\alpha (T_{\mathrm{t}} - T_0) + \sigma (T_{\mathrm{t}}^4 - T_0^4)\right]} = 2{,}37 \text{ A}.$$

Tento výsledek již podstatně více odpovídá výsledku získanému na základě experimentu.

Úlohy k samostatnému řešení – 3

Úloha 8 – cihlová zeď

Kolik tepla Q projde vedením za hodinu cihlovou zdí tloušťky 50 cm, jestliže vnější teplota je -10 °C a vnitřní je 22 °C? Stěna má rozměry 3 m × 5 m a je postavena a) z pálených plných cihel ($\lambda_0 = 0{,}87\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$), b) z dutých cihel ($\lambda_2 = 0{,}56\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$).

Úloha 9 – izolovaná cihlová zeď

Cihlovou zeď z úlohy 8 opatříme zevnitř izolací ze skleněné vaty o tloušťce $d_2 = 5$ cm ($\lambda_2 = 0{,}046\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$), zvenku omítkou o tloušťce $d_3 = 2$ cm ($\lambda_3 = 0{,}87\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$). Jak se změní teplo, které projde touto stěnou? Určete také teploty na rozhraní jednotlivých vrstev. Řešte opět pro případy a) i b) jako v úloze 8.

Úloha 10 – kotel

Jaký tepelný tok projde plochou (kterou budeme považovat za rovinnou) o obsahu 1 dm^2 kotle při přechodu tepla ocelovou stěnou ($\lambda = 47\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$) o tloušťce $d = 5$ mm z kouřových plynů o teplotě $t_1 = 500$ °C do vroucí vody $t_2 = 100$ °C pro $\alpha_1 = 20\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ (kouřové plyny),
$\alpha_2 = 2400\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$, je-li stěna

a) z obou stran čistá,

b) z jedné strany znečištěna kotelním kamenem ($\lambda_1 = 0{,}8\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$) o tloušťce vrstvy $d_1 = 2$ mm,

c) z jedné strany znečištěna vrstvou sazí ($\lambda_2 = 0{,}08\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$) o tloušťce vrstvy $d_2 = 1$ mm,

d) znečištěna z jedné strany kotelním kamenem a z druhé vrstvou sazí.

Porovnejte jednotlivé situace.

Úloha 11 – trubkový výměník

V trubkovém výměníku se ohřívá vzduch pomocí kondenzující páry. Součinitel přestupu tepla na straně vzduchu je $\alpha_1 = 50\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$, na straně páry $\alpha_2 = 6\,000\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$. Teplotní rozdíl je $\Delta t = 50$ °C, tepelný odpor stěny měděné trubky $\lambda = 394\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$. Vnější poloměr trubky $r_2 = 0{,}01$ m, tloušťka stěny $d = 1{,}5$ mm. Vzduch proudí vně trubek. Vypočtěte tepelný tok Q_τ odpovídající jedné trubce.

Úloha 12 – kosmická loď

Kosmická loď kulového tvaru se pohybuje kolem Slunce po kruhové trajektorii. Kosmonauti, kteří se nacházejí na kosmické lodi, vidí Slunce pod úhlem 30'. Teplota fotosféry Slunce je 6 000 K, kosmickou loď považujte za černé těleso. Určete teplotu povrchu kosmické lodi.

Úloha 13 – Sluneční fotonové záření

Sluneční záření, které dopadá kolmo na 1 m^2 rovinné plochy ve vakuovém prostoru ve vzdálenosti 1 AU od středu Slunce, má výkon 1 365 W. Slunce můžeme považovat za dokonale černé těleso, které pohlcuje veškeré elektromagnetické záření, které na ně dopadá, a vydává pouze záření vlastní. Průměr sluneční fotosféry vidí pozorovatel na povrchu Země pod úhlem 32', poloměr Země je 6 371 km, 1 AU = $149{,}6 \cdot 10^6$ km.

a) Stanovte celkový zářivý výkon L Slunce.

b) Stanovte teplotu T_s sluneční fotosféry.

c) Určete energetický příjem slunečního záření dopadajícího na Zemi za jeden den a za jeden rok (365,25 dne).

d) V současné době se hovoří o projektu, při němž by na Sahaře měla být instalována elektrárna ze solárních článků: předpokládejme, že na povrch Země dopadne po průchodu atmosférou 40 % záření, které se dostalo na hranici atmosféry. Budeme uvažovat, že existující solární články mají účinnost 12 %. Jak velký maximální výkon P_max by měly solární články s plošným obsahem 1 km^2?

e) Na oběžnou dráhu okolo Země vyšleme družici kulového tvaru tak, aby byla nepřetržitě ozářena Sluncem. Družice bude mít dobrou tepelnou vodivost a její nátěr bude mít vlastnosti blížící se vlastnostem povrchu dokonale černého tělesa. Určete její teplotu T_z. Záření Země dopadající na družici zanedbejte.

f) Určete teplotu T_m stejné družice obíhající okolo Marsu, je-li jeho střední vzdálenost od Slunce 1,52 AU.

g) V jakých mezích se mění teplota družic Země a Marsu z úloh e), f), je-li číselná výstřednost trajektorií obou planet po řadě $\varepsilon_\mathrm{z} = 0{,}017$; $\varepsilon_\mathrm{m} = 0{,}093$?

Doplněk 3

Doposud jsme se zabývali situací ustáleného stavu. Podívejme se nyní na situaci, kdy zahřáté těleso chladne. Zde už se neobejdeme bez vyšší matematiky, a proto byla tato úloha zařazena do nepovinného doplňku.

Příklad 17 – vlákno žárovky

Wolframové vlákno laboratorní žárovky, které má poloměr $r = 0{,}1$ mm, se rozžhaví průchodem elektrického proudu na teplotu $t_1 = 2\,800$ °C. Vypočtěte, za jakou dobu po vypnutí proudu klesne teplota vlákna o 2 500 °C. Předpokládejte, že vlákno září jako osamocené vakuové absolutně černé těleso (tak tomu ve skutečnosti není). Hustota wolframového vlákna je $\varrho = 19\,300\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, měrná tepelná kapacita wolframu je $c = 134\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$.

Řešení

Když vlákno s povrchem $S = 2\pi rL$ září jako absolutně černé těleso, pak vyzáří energii

$$P\mathrm{d}\tau = \sigma T^4 \cdot 2\pi rL\mathrm{d}\tau.$$

Za dobu $\mathrm{d}\tau$ poklesne teplota vlákna z teploty T na teplotu $T - \mathrm{d}T$ a vlákno vyzáří energii

$$P\mathrm{d}\tau = -cm\mathrm{d}T,$$

Za předpokladu stacionárního stavu (tj. stavu, v němž lze stále hovořit o teplotě)

$$\sigma T^4 \cdot 2\pi rL\mathrm{d}\tau = -c\varrho\pi r^2 L\mathrm{d}T.$$

Po úpravě je

$$\mathrm{d}\tau = -\frac{c\varrho r}{2\sigma}\frac{\mathrm{d}T}{T^4}.$$

Po integraci

$$\int_0^\tau \mathrm{d}\tau = -\frac{c\varrho r}{2\sigma}\int_{T_1}^{T_2}\frac{\mathrm{d}T}{T^4},$$

tj.

$$\tau = \frac{c\varrho r}{6\sigma}\left(\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3}\right).$$

Po dosazení číselných hodnot $T_1 = 3\,073$ K, $T_2 = 573$ K dostaneme odhad pro hledanou dobu $\tau = 4$ s.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. Neuvažujeme-li plechovou vanu, je doba naplnění 8 minut a výsledná teplota 41 °C, tepelná kapacita vany je 18,4 kJ · K^{-1}, ohřívání změní výsledné hodnoty nepatrně.
2. Voda se začne vařit za 3,8 až 4,7 minuty, střední hodnota 4,2 minuty.
3. K roztání parafinu je třeba teplo 48,2 kJ až 51,4 kJ.
4. Index v – voda, index p – parafin. Kalorimetrická rovnice je $m_\mathrm{v}c_\mathrm{v}(t_2 - t_\mathrm{t}) = $ $= L_\mathrm{t} + c_\mathrm{p}m_\mathrm{p}(t_\mathrm{t} - t_1)$, z čehož $t_\mathrm{t} = \dfrac{m_\mathrm{v}c_\mathrm{v}t_2 + m_\mathrm{p}c_\mathrm{p}t_1 - m_\mathrm{p}l_\mathrm{t}}{m_\mathrm{v}c_\mathrm{v} + m_\mathrm{p}c_\mathrm{p}} = 53{,}3$ °C. Je-li $t_\mathrm{t} \geq 53{,}3$ °C, všechen parafin neroztaje, je-li 49 °C $\leq t_\mathrm{t} <$ 53,3 °C, všechen parafin roztaje.
5. Celková spotřeba tepelné elektrárny by byla 216 000 tun uhlí, tj. 5 400 vagónů za měsíc.
6. Práce vykonaná motorem při rychlosti v_1 je dána vztahem $W_1 = \dfrac{1}{2}C\varrho S v_1^2 s$, obdobně práce při rychlosti v_2. Změnu spotřeby určíme vztahem $\left(\dfrac{v_1}{v_2}\right)^2 = 1{,}44$.
7. Teplo k ohřátí vzduchu 3,0 MJ, s kamny 2,54 kg a v elektrárně 0,30 kg.
8. a) $Q_{\tau 1} = 835{,}2$ W; $Q_1 = Q_{\tau 1} \cdot \tau = 3$ MJ; b) $Q_{\tau 2} = 537{,}6$ W; $Q_2 = 1{,}9$ MJ.
9. Prošlé teplo a) $Q_1' = 1{,}0$ MJ; b) $Q_2' = 0{,}86$ MJ. Teploty na rozhraní jednotlivých vrstev určíme užitím vztahů (2) až (5). a) $Q_{\tau a} = 285$ W, potom $t_2 = t_1 - \dfrac{Q_{\tau a}d_2}{\lambda_2 S} = 1{,}3$ °C, $t_3 = -9{,}6$ °C; b) $Q_{\tau b} = 240$ W; $t_2 = 4{,}6$ °C, $t_3 = -9{,}7$ °C.
10. a) $Q_{\tau 1} = 79$ W; b) $Q_{\tau 2} = 75\ \mathrm{W} = 0{,}95\,Q_{\tau 1}$; c) $Q_{\tau 3} = 63\ \mathrm{W} = 0{,}80\,Q_{\tau 1}$; d) $Q_{\tau 4} = 61\ \mathrm{W} = 0{,}77\,Q_{\tau 1}$.
11. Použitím vztahu (14) dostaneme $Q_\tau = 133$ W.
12. Postup je obdobný jako při řešení Příkladu 15. 280 K. Úhel 30′ je roven úhlu, pod kterým je vidět Slunce ze Země.
13. a) $L = 3{,}84 \cdot 10^{26}$ W; b) $T_\mathrm{s} = 5\,770$ K; c) $W_\mathrm{den} = 1{,}5 \cdot 10^{22}$ J; $W_\mathrm{roc} = $ $= 5{,}5 \cdot 10^{24}$ J; d) $P_\mathrm{max} = 65{,}5$ MW; e) $T_\mathrm{z} = 278{,}5$ K; $t_\mathrm{z} = 5$ °C; f) $T_\mathrm{m} = 226$ K; $t_\mathrm{m} = -47$ °C; g) od −57 °C do −36 °C. Tato úloha byla uvedena jako 3. úloha 49. ročníku celostátního kola, její podrobné řešení je možno nalézt na Internetu na stránkách FO: *http://www.uhk.cz/fo* nebo na *http://fo.cuni.cz*.

Literatura

[1] DUFKOVÁ, M. *Energie ze všech stran.* Praha: ATYPO, 2003.

[2] HEISENBERG, W. *Fyzika a filozofie.* Praha: AURORA, 2000.

[3] KRAUS, I. *Fyzika v kulturních dějinách Evropy I, II.* Praha: ČVUT, 2006, 2007.

[4] MALÍŠEK, V. *Co víte o dějinách fyziky.* Praha: Horizont, 1986.

[5] KALČÍK, J., SÝKORA, K. *Technická termomechanika.* Praha: Academia, 1973.

[6] KRUPKA, F., KALVODA, L. *Fyzika.* Praha: SNTL, 1989.

[7] ŠORIN, S., N. *Sdílení tepla.* Praha: SNTL, 1968.

[8] FRIŠ, S., E., TIMOREVOVÁ, A., V. *Kurs fyziky I.* Praha: ČSAV, 1962.

[9] HAJKO, V. a kol. *Fyzika v príkladoch.* Bratislava: Alfa, 1983.

[10] BARTUŠKA, K., SVOBODA, E. *Fyzika pro gymnázia – molekulová fyzika a termika.* Praha: Prometheus, 2000.

[11] LEPIL, O. a kol. *Fyzika pro gymnázia – optika.* Praha: Prometheus, 2002.

[12] UNGERMANN, Z. a kol. *28. ročník fyzikální olympiády.* Praha: SPN, 1992.

[13] HOLIDAY, D., RESNICK, R., WALKER, J. *Mechanika – Termodynamika.* Brno: VUTIUM, 2000.

[14] TUREK, I. a kol. *Mechanika – Sbírka úloh.* Praha: SNTL, 1982.

[15] Stránky *časopisu KVANT.* Dostupné na Internetu: <http://kvant.mccme.ru/.>

[16] VÍTEK, J. *Svět hardware – Technologie současného a budoucího chlazení.* Dostupné na Internetu: <http://www.svethardware.cz/.> (Článek ze dne 2.11. 2005)